

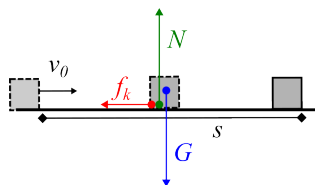
Oppgave 1

Gitt et forbruk av energi på 16,3 kWh/100 km, da blir dette

$$16,3 \text{ kWh}/100 \text{ km} = \frac{16,3 \text{ kWh}/100 \text{ km} \cdot 3,6 \cdot 10^6 \text{ J/kWh}}{1 \cdot 10^4 \text{ m}} = 586.8 \text{ J/m} = 0,59 \text{ kJ/m}$$

Oppgave 2

Figuren under viser kreftene som virker på en kloss med startfart v_0 som sklir bortover et horisontalt underlag og stopper i løpet av strekningen s : tyngden G , normalkrafta N og glidefriksjonskrafta $f_k = \mu_k N$.



Energibevaring gir:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = f_k \cdot s$$

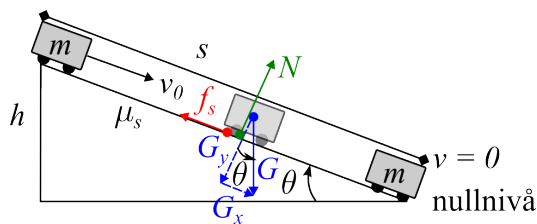
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \mu_k N \cdot s$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \mu_k mg \cdot s \quad (\text{Her er } N = mg)$$

$$\mu_k = \frac{v_0^2}{2gs}$$

Oppgave 3

Figuren under viser kreftene som virker på bilen under oppbremsingen i nedoverbakken: tyngden mg , normalkraften N og (maksimal) statisk friksjon f_s . Et koordinatsystem er valgt slik at x -retningen tilsvarer parallelt med skråplanet, og y -retningen er normalt på.



Som figuren viser er $N = G_y = mg \cos \theta$.

Vi kan bruke energibevaring: hvis vi velger nullnivå for potensiell energi i punktet der bilen stopper, har bilen i utgangspunktet kinetisk og potensiell energi. Alt dette går over til friksjon-

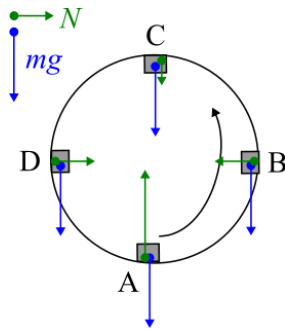
sarbeidet som friksjonskraften f_s utfører over bremsestrekningen s :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh &= f_s \cdot s \\ \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh &= \mu_s mg \cos \theta \cdot s && (\text{Her er } f_s = \mu_s N) \\ \frac{1}{2}mv_0^2 + mg \cdot s \sin \theta &= \mu_s mg \cos \theta \cdot s && (\text{Fra figuren er } h = s \sin \theta) \\ \frac{1}{2}v_0^2 + g \cdot s \sin \theta &= \mu_s g \cos \theta \cdot s \\ s \cdot g (\mu_s \cos \theta - \sin \theta) &= \frac{1}{2}v_0^2\end{aligned}$$

$$s = \frac{v_0^2}{2g(\mu_s \cos \theta - \sin \theta)}$$

Oppgave 4

Figuren under viser kreftene som virker på vogna i de ulike punktene i banen: normalkrafta N og vognas tyngde mg .



Ved sirkelbevegelse må det være en nettokraft $\sum F$ med retning inn mot sentrum av sirkelen med radius r , som besørger sentripetalakselerasjonen $a = v^2/r$:

$$\sum F = ma = m \frac{v^2}{r}.$$

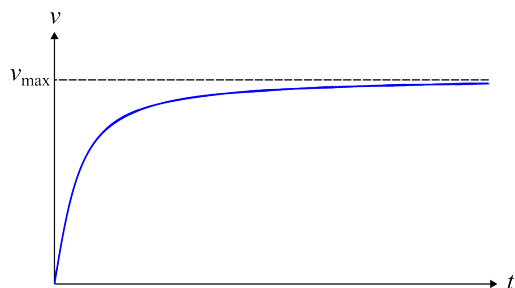
Normalkrafta N i de fire inntegnede punktene finnes fra Newtons 2. lov:

$$\begin{aligned}A : \sum F &= m \frac{v_A^2}{r} = N - G \Rightarrow N = m \frac{v_A^2}{r} + mg \\ B : \sum F &= m \frac{v_B^2}{r} = N \Rightarrow N = m \frac{v_B^2}{r} \\ C : \sum F &= m \frac{v_C^2}{r} = N + G \Rightarrow N = m \frac{v_C^2}{r} - mg \\ D : \sum F &= m \frac{v_D^2}{r} = N \Rightarrow N = m \frac{v_D^2}{r}\end{aligned}$$

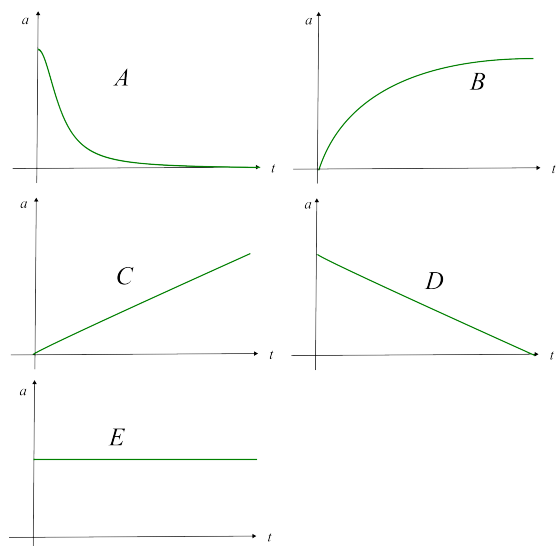
Ut i fra energibevaring er **farten** størst i punkt A. Da viser oversikten over at også **normalkrafta** er størst i punkt A.

Oppgave 5

Gitt fartsgrafen $v(t)$ til en fallende stein:



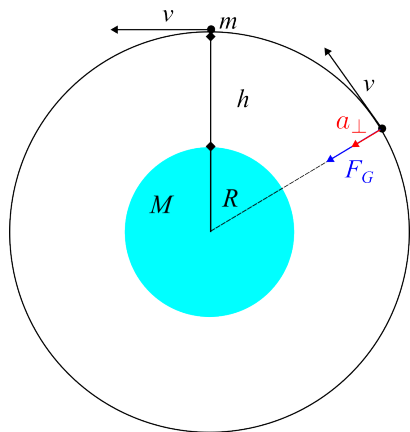
Akselerasjonen til steinen tilsvareer stigningstallet til grafen. Vi ser at $v(t)$ stiger bratt i starten, og flater etterhvert ut på grunn av luftmotstanden. Vi skal altså identifisere den grafen som starter med en “stor” verdi (bratt $v(t)$ betyr stor a), og avtar til 0 etter en viss tid (flat $v(t)$ betyr konstant fart og null akselerasjon). Vi ser at $v(t)$ **ikke** er en andregradsfunksjon, dvs. $a(t) = dv/dt$ kan **ikke** være en lineær graf.



Her er det **graf A** som gir riktig $a(t)$ for den gitte $v(t)$.

Oppgave 6

Figuren under viser at den eneste krafta som virker på satellitten er tyngdekrafta F_G fra Jorda:



Det er tyngdekrafta fra Jorda som holder satellitten i sirkelbanen og besørger sentripetalakselerasjonen $a_{\perp}$. Newtons 2. lov for sirkelbevegelsen:

$$\begin{aligned}\sum F &= ma_{\perp} = m \frac{v^2}{r} = m \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2}, \\ G \frac{Mm}{r^2} &= m \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2} \\ T &= \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi^2 (R+h)^3}{GM}} \quad (\text{Baneradien } r = R+h) \\ &= \sqrt{\frac{4\pi^2 (300 \cdot 10^3 \text{ m} + 6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}} \\ &= 5423,99 \text{ s} \\ &\approx \underline{\underline{5,42 \cdot 10^3 \text{ s}}}\end{aligned}$$

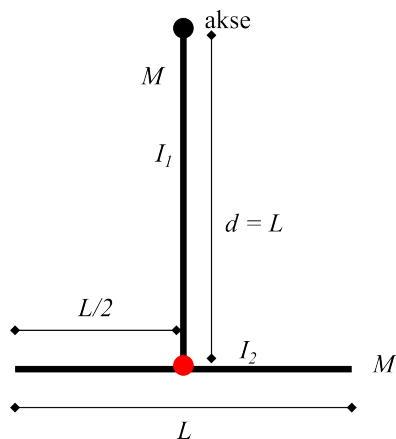
Oppgave 7

Toget med masse $m = 4,0 \cdot 10^5 \text{ kg}$ akselereres fra 0 til en slutfart $v = 80 \text{ km/h}$ i løpet av en tid $t = 30 \text{ s}$. Dersom vi ser bort fra luftmotstand og andre former for tap, vil alt arbeidet W gjort av togets motorer gå med til å øke togets kinetiske energi. Definisjonen av effekt gir

$$\begin{aligned}P &= \frac{W}{t} \\ &= \frac{\frac{1}{2}mv^2}{t} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 4,0 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \left(\frac{80}{3,6} \text{ km/h}\right)^2}{30 \text{ s}} \\ &= 3,29 \cdot 10^6 \text{ W} \\ &\approx \underline{\underline{3,3 \text{ MW}}}\end{aligned}$$

Oppgave 8

Figuren under viser legemet:



Den ene stanga som legemet består av, roterer om en akse gjennom enden, med treghetsmoment (fra formelark) $I_1 = \frac{1}{3}ML^2$. Den andre roterer om en akse som er parallell med en akse gjennom massesenteret, slik at vi kan finne treghetsmomentet I_2 til denne fra Steiners sats:

Den nederste stanga har massesenteret midt på stanga, og avstanden d fra massesenteret til rotasjonsaksen lik L :

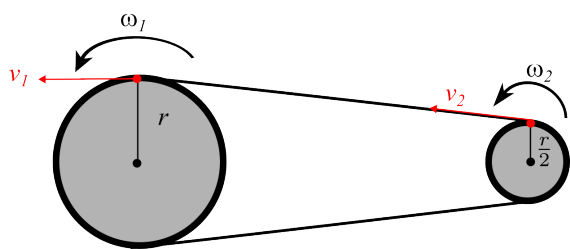
$$I_2 = I_{\text{CM}} + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + ML^2 = \underline{\underline{\frac{13}{12}ML^2}}$$

Treghetsmomentet for hele legemet om den angitte aksen blir da

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ &= \frac{1}{3}ML^2 + \frac{13}{12}ML^2 \\ &= \underline{\underline{\frac{17}{12}ML^2}} \end{aligned}$$

Oppgave 9

Når tannhjulene er forbundet med et stramt kjede, må alle punkter på kjedet ha samme lineære fart v . Se figuren under.

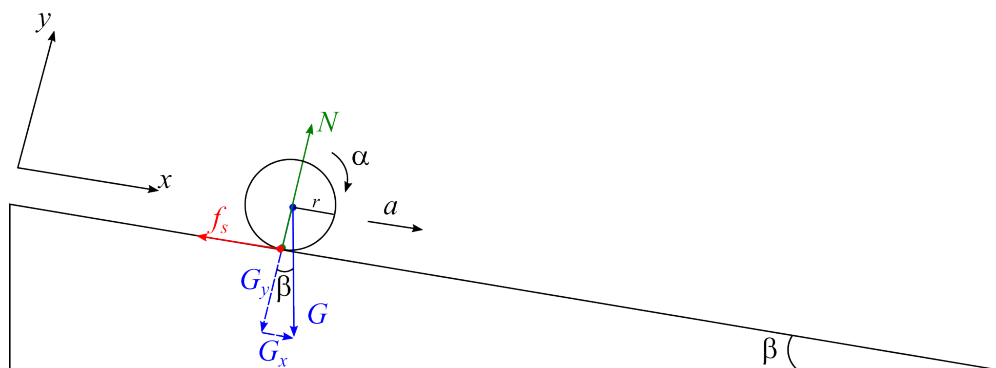


Banefarten til et punkt på hhv. det store og lille tannhjulet må altså oppfylle

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 \\ \omega_1 r &= \omega_2 \cdot \frac{r}{2} \\ \frac{\omega_2}{\omega_1} &= \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

Oppgave 10

Treghetsmomentet til en sylinder om en senterakse parallell med sylindren er gitt ved $I = \frac{1}{2}MR^2$. Vi skal avgjøre hvorvidt masse og/eller radius for sylindrene har betydning for hvem som kommer raskest ned. Tegner figur som viser kreftene som virker på et legeme som ruller uten å gli:



La a betegne akselerasjonen langs skråplanet (positiv x -retning). Newtons 2. lov for translasjon av massesenteret og rotasjon om massesenteret gir:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= Ma \\ \sum \tau &= I\alpha,\end{aligned}$$

der $a = \alpha R$ fra rullebetingelsen. Fra rotasjonsdelen får vi (ettersom N og G går gjennom massesenteret, gir disse null dreiemoment om rotasjonsaksen, slik at kun friksjonskraften f_s bidrar):

$$\begin{aligned}f_s \cdot R &= I \frac{a}{R} \\ f_s &= \frac{I}{R^2} a \\ &= \frac{\frac{1}{2}MR^2}{R^2} a \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}Ma}}\end{aligned}$$

Kombinerer dette med Newtons 2. lov:

$$\begin{aligned}Mg \sin \beta - f_s &= Ma \\ Mg \sin \beta - \frac{1}{2}Ma &= Ma \\ \frac{3}{2}a &= g \sin \beta \\ a &= \underline{\underline{\frac{2}{3}g \sin \beta}}\end{aligned}$$

Akselerasjonen langs skråplanet er altså uavhengig av både massen M og radiusen R . Ergo: sylindrene får **samme akselerasjon**, dvs. massesentrene har til en hver tid **samme fart** - og kommer dermed **samtidig** til bunnen av skråplanet.

Riktig påstand: Sylindrene kommer til bunnen av skråplanet samtidig ettersom massesentrene (CM) hele tiden har samme fart.

Oppgave 11

Fartsendinga Δv til raketten er bestemt fra rakettlikninga

$$\Delta v = u \ln \frac{m_0}{m},$$

der u er absoluttverdien av eksosgassene i forhold til raketten (antatt konstant) og m_0 og m er totalmassen til raketten hhv. før og etter fartsendringen.

Vi skal bestemme u slik at raketten har fått en fartsendring $\Delta v = v_0$ idet alt drivstoffet er oppbrukt. I oppgaven er det oppgitt at massen av den tomme raketten uten drivstoff er M , dvs. $m = M$, mens raketten i utgangspunktet har total masse (rakett og drivstoff) $m_0 = 11M$.

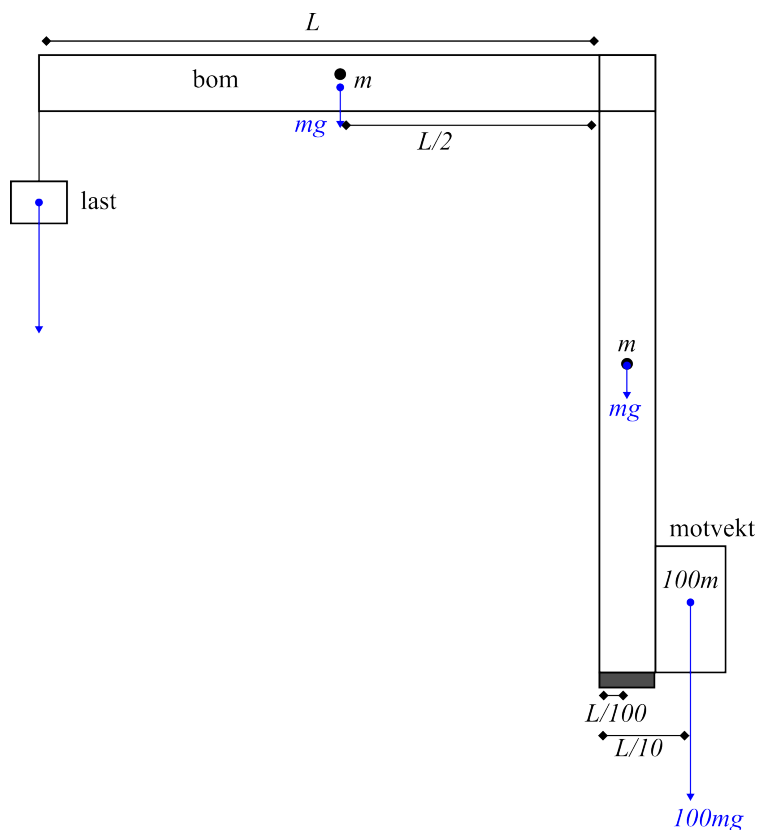
Vi låser rakettlikninga med hensyn på u :

$$\Delta v = u \ln \frac{m_0}{m} \Rightarrow u = \frac{1}{\ln \frac{m_0}{m}} \cdot \Delta v$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\ln \frac{m_0}{m}} \cdot v_0 \\ &= \frac{1}{\ln \frac{11M}{M}} \cdot v_0 \\ &= 0,417v_0 \\ &\approx \underline{\underline{0,42v_0}} \end{aligned}$$

Oppgave 12

Figuren under viser de ulike kreftene som virker på tårnkрана:

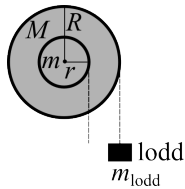


Likevektsbetingelsen for at kрана ikke skal velte: summen av alle dreiemoment om det fremre kontaktpunktet må være 0. Dette gir oss en likning for den maksimale lasten M som kрана kan løfte uten å velte:

$$\begin{aligned}
\sum \tau &= 0 \\
MgL + mg \cdot \frac{L}{2} - mg \cdot \frac{L}{100} - 100mg \cdot \frac{L}{10} &= 0 \\
M + m \cdot \frac{1}{2} - m \cdot \frac{1}{100} - 10m &= 0 & \text{(Forkorter)} \\
M &= m \cdot \left(10 + \frac{1}{100} - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{951}{100}m \\
&= \underline{\underline{9,51m}}
\end{aligned}$$

Oppgave 13

Figuren under viser situasjonen der loddet er festet enten til sylindren med radius R , eller den med mindre radius r :



Generelt, ut i fra Newtons 2. lov for rotasjon, hvis $r_{\perp}$ er arma til tyngdekrafta til tyngden av loddet, $m_{\text{lodd}}g$, så er

$$\begin{aligned}
\sum \tau &= I\alpha \\
m_{\text{lodd}}gr_{\perp} &= I\alpha
\end{aligned}$$

Dette viser at større arm gir større vinkelakselerasjon. Ettersom $r_{\perp}$ tilsvarer radien på sylindren som snora er linnet rundt, vil den største sylindren gi størst arm, og størst α .

Riktig påstand: Sylindrene får størst vinkelakselerasjon dersom tråden vikles rundt den største sylindren med radius R .

Oppgave 14

Like etter sammenstøtet, har leirklumpen banefart v . Dreieimpulsbevaring om hengslingspunktet i bakken gir (merk at det er den totale dreieimpulsen som er bevart; summen av banedreieimpuls og spinn):

$$\begin{aligned}
L_{\text{får}} &= L_{\text{etter}} \\
mv_0L &= mvL + I\omega.
\end{aligned}$$

Her er det brukt at klumpen kun har banedreieimpuls $L_b = r_{\perp}p = mvL$, mens stanga kun har spinn $L_s = I\omega$ etterpå (ettersom den sitter fast i bakken). Ettersom klumpen sitter fast ytterst på stanga, er $v = \omega L$ når stangas vinkelfart etter støtet er ω .

Stanga har treghetsmoment $I = \frac{1}{3}ML^2$ om omdreiningssaksen. Dette gir:

$$\begin{aligned}
 mv_0L &= mvL + I\omega \\
 mv_0L &= m\omega L^2 + I\omega \\
 \omega(mL^2 + I) &= mv_0L \\
 \omega &= \frac{mv_0L}{mL^2 + I} \\
 &= \frac{mv_0L}{mL^2 + \frac{1}{3}ML^2} \\
 &= \frac{m}{m + \frac{1}{3}M} \frac{v_0}{L}
 \end{aligned}$$

Oppgave 15

Banens høyde over gulvet er

$$y(x) = y_0 \frac{x^2}{L^2},$$

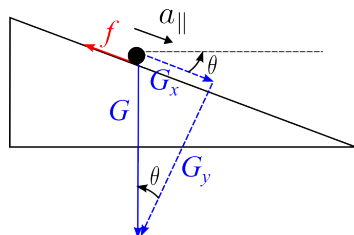
med endepunkter i $x = \pm L$. Legemet slippes i $x = -L$, tilsvarende en høyde $y_1 = y_0(-L)^2/L^2 = y_0$ med null startfart. Finner farten i $x = 0$, der høyden er $y_2 = y(0) = 0$ ved energibevaring (nullpunkt for potensiell energi settes i $y = 0$):

$$\begin{aligned}
 mgy_1 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\
 mgy_0 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mr^2 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 && (\text{Rullebetingelsen: } v = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}) \\
 2gy_0 &= v^2 + \frac{1}{2}v^2 && (\text{Ganger med faktor } \frac{2}{m}) \\
 \frac{3}{2}v^2 &= 2gy_0 \\
 v &= \sqrt{\frac{4gy_0}{3}}
 \end{aligned}$$

Oppgave 16

Vi skal bestemme baneakselerasjonen $a_{\parallel}$ i endepunktet $x = -L$ for gitte baneparametre $L = 2,00 \text{ m}$ og $y_0 = 0,200 \text{ m}$.

Baneakselerasjonen finnes ved å dekomponere kreftene på legemet i to retninger: parallelt med underlaget (x -retning), og normalt på underlaget (y -retning). Se figuren under.



Newtons 2. lov i x -retning (parallelt med underlaget):

$$\begin{aligned}\sum F_x &= ma_{\parallel} \\ mg \sin \theta - f &= ma_{\parallel}\end{aligned}$$

Newtons 2. lov for rotasjon om kulas massesenter:

$$\begin{aligned}\sum \tau &= I\alpha \\ f \cdot r &= I\alpha = I \frac{a_{\parallel}}{r} && \text{(Rullebetingelse: } \alpha = a/r) \\ f &= I \frac{a_{\parallel}}{r^2} \\ &= \frac{1}{2}mr^2 \cdot \frac{a_{\parallel}}{r^2} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}ma_{\parallel}}}\end{aligned}$$

Dette gir:

$$\begin{aligned}mg \sin \theta - f &= ma_{\parallel} \\ mg \sin \theta - \frac{1}{2}ma_{\parallel} &= ma_{\parallel} \\ \frac{3}{2}ma_{\parallel} &= mg \sin \theta \\ a_{\parallel} &= \underline{\underline{\frac{2}{3}g \sin \theta}}\end{aligned}$$

Vinkelen θ kan bestemmes ut i fra den deriverte dy/dx :

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \left| \frac{dy}{dx} \right| \\ &= \left| \frac{2y_0x}{L^2} \right| \\ \theta &= \arctan \left| \frac{2y_0x}{L^2} \right|,\end{aligned}$$

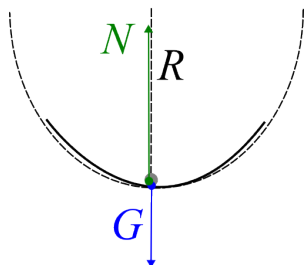
slik at

$$\begin{aligned}a_{\parallel} &= \frac{2}{3}g \sin \theta \\ &= \frac{2}{3}g \sin \left(\arctan \left| \frac{2y_0x}{L^2} \right| \right) \\ &= \frac{2}{3}g \sin \left(\arctan \left| \frac{2y_0(-L)}{L^2} \right| \right) \\ &= \frac{2}{3}g \sin \left(\arctan \frac{2y_0}{L} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \sin \left(\arctan \frac{2 \cdot 0,200 \text{ m}}{2,00 \text{ m}} \right) \\ &= 1,283 \text{ m/s}^2 \\ &= \underline{\underline{\approx 1,28 \text{ m/s}^2}}\end{aligned}$$

Oppgave 17

Vi skal bestemme forholdet mellom normalkrafta N og tyngden G i det laveste punktet $x = 0$ for gitte baneparametre $L = 2,00 \text{ m}$ og $y_0 = 0,200 \text{ m}$, når det oppgis at farten i det laveste punktet er $v = 2,00 \text{ m/s}$.

Figuren under viser situasjonen:



Newtons 2. lov i vertikalretningen gir (her er det kun sentripetalakselerasjon $a_{\perp}$, ettersom baneaks. i det nederste punktet er null):

$$\sum F = ma_{\perp} = m \frac{v^2}{R},$$

der R er krumningsradien i bunnpunktet. Videre er

$$\begin{aligned} N - mg &= m \frac{v^2}{R} \\ N &= m \frac{v^2}{R} + mg \\ \frac{N}{mg} &= \frac{v^2}{g} \cdot \frac{1}{R} + 1 \end{aligned}$$

Krumningsradien er gitt på formelarket:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{y''}{\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= y'', \end{aligned}$$

ettersom $y' = 0$ i bunnpunktet. Fra tidligere er

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2y_0}{L^2} x \\ y'' &= \frac{2y_0}{L^2}, \end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned} \frac{N}{mg} &= \frac{v^2}{g} \cdot \frac{1}{R} + 1 \\ &= \frac{v^2}{g} \cdot \frac{2y_0}{L^2} + 1 \\ &= \frac{(2,00 \text{ m/s})^2}{9,81 \text{ m/s}^2} \cdot \frac{2 \cdot 0,200 \text{ m}}{(2,00 \text{ m})^2} + 1 \\ &= \underline{\underline{1,04}} \end{aligned}$$

Oppgave 18

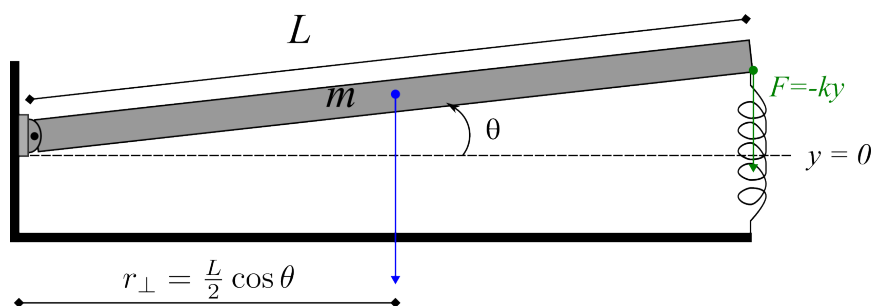
En kloss i en fjær slippes fra $x = A$ med null startfart, og vi skal identifisere i hvilket av de fire punktene $x_1 = A$, $x_2 = \frac{A}{2}$, $x_3 = 0$ og $x_4 = -\frac{A}{4}$ har klossen størst akselerasjon.

Den eneste horisontale krafta som virker på klossen, er fjærkrafta $F = kx$. Jo strammere fjær, dvs. større x , desto større er F , og dermed akselerasjonen.

Punktet med størst akselerasjon blir derfor $x_1 = A$.

Oppgave 19

To krefter virker på stanga: tyngdekraften mg midt på stanga, og fjærkrafta $F = -ky$ i den ene enden (minustegnet indikerer at krafta prøver å dra stanga tilbake til likevektsposisjonen). Se figuren under.



Newtons 2. lov for rotasjonen av stanga (med positiv dreieretning indikert på figuren; begge kreftene forsøker å dreie stanga i negativ dreieretning):

$$\begin{aligned}\sum \tau &= I\alpha = I\ddot{\theta} \\ -mg \cdot \frac{L}{2} \cos \theta - F \cdot L \cos \theta &= I\ddot{\theta} \\ -mg \cdot \frac{L}{2} \cos \theta - ky \cdot L \cos \theta &= I\ddot{\theta} \\ -mg \cdot \frac{L}{2} \cos \theta - k \cdot L \sin \theta \cdot L \cos \theta &= I\ddot{\theta}\end{aligned}$$

Så lenge vinkel $\theta \ll 1$ (små vinkler-tilnærming), er $\sin \theta \approx \theta$ og $\cos \theta \approx 1$, slik at

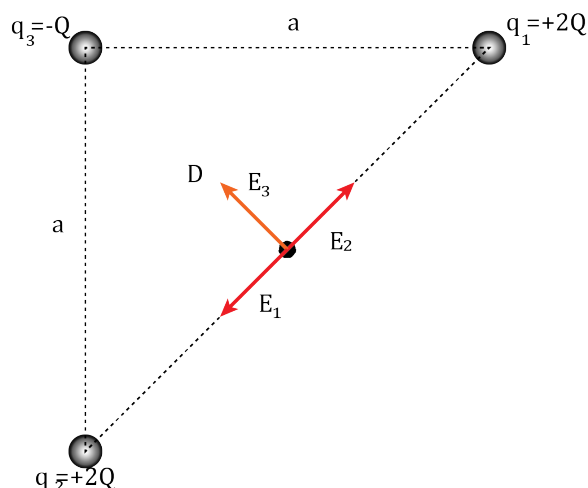
$$\begin{aligned}-mg \cdot \frac{L}{2} - k \cdot L^2 \theta &= I\ddot{\theta} \\ -mg \cdot \frac{L}{2} - k \cdot L^2 \theta &= \frac{1}{3} mL^2 \cdot \ddot{\theta} \\ \ddot{\theta} &= -\frac{3k}{m} \theta - \frac{3g}{2L}\end{aligned}$$

Dette er en (inhomogen) differensiallikning for $\theta(t)$, og vinkelfrekvensen kan vi lese av som

$$\omega^2 = \frac{3k}{m} \approx \omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Oppgave 20

Gitt ladningskonfigurasjonen på figuren under:

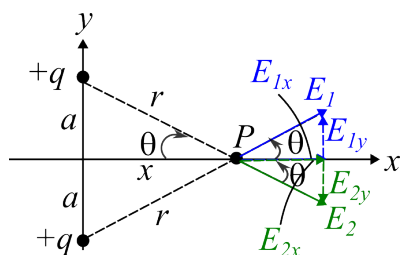


Vi skal besemme retningen for feltet i punkt P , som ligger midt mellom de to positive ladningene.

Som figuren viser, vil feltbidragene fra de to positive ladningene kansellere hverandre, og bidraget fra den negative ladningen $q_3 = -Q$ har retning langs E_3 . Riktig alternativ er alternativ D.

Oppgave 21

Vi skal besemme retningen for feltet i punkt $P(x, 0)$. Figuren under viser feltbidragene E_1 og E_2 fra de to punktladningene:



Som figuren viser, vil feltbidragene i y -retning kansellere hverandre, slik at det totale elektriske feltet blir

$$\begin{aligned}
 E &= E_{1x} + E_{2x} \\
 &= 2 \cdot E_{1x} \\
 &= 2 \cdot E_1 \cos \theta \\
 &= 2 \cdot \frac{kq}{r^2} \cos \theta && \text{(Felt gitt fra Coulombs lov)} \\
 &= 2 \cdot \frac{kq}{r^2} \cdot \frac{x}{r} && \text{(Definisjon av cosinus)} \\
 &= 2kq \frac{x}{r^3} \\
 &= 2kq \frac{x}{\left(\sqrt{x^2 + a^2}\right)^3} && \text{(Pytagoras' for å bestemme } r\text{)} \\
 &= \underline{\underline{2kq \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}}}
 \end{aligned}$$

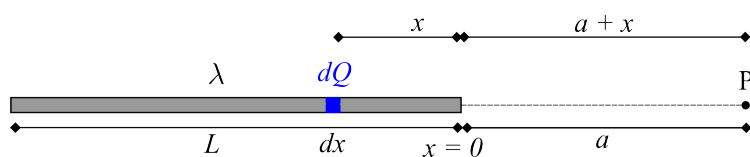
Oppgave 22

Det elektriske potensialet i P er lik summen av potensialene fra de to punktladningene (bruker samme størrelser som ble definert på figuren i forrige oppgave):

$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot \frac{kq}{r} \\ &= \frac{2kq}{\sqrt{a^2 + x^2}} \end{aligned}$$

Oppgave 23

Figuren under viser den elektrisk ladde stanga med lengde L og ladningstetthet λ . Et ladningselement dQ er plassert i punktet x , der $x = 0$ tilsvarer høyre ende av stanga.



Bidraget til det elektriske feltet i punkt P fra dQ er gitt ved Coulombs lov:

$$dE = k \frac{dQ}{r^2} = k \frac{dQ}{(x+a)^2}.$$

Ettersom ladningstettheten er konstant over stanga, er ladningselementet

$$dQ = \lambda dx.$$

Det totale feltet E finnes ved å integrere over lengden av stanga, fra høyre ende $x = 0$ til venstre ende $x = L$:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^L dE \\ &= \int_0^L k \frac{dQ}{(x+a)^2} \\ &= \int_0^L k \frac{\lambda dx}{(x+a)^2} \\ &= k\lambda \left[-\frac{1}{x+a} \right]_0^L \\ &= -k\lambda \left(\frac{1}{L+a} - \frac{1}{a} \right) \\ &= k\lambda \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{L+a} \right) \end{aligned}$$

Oppgave 24

Tidskonstanten for en RC-krets bestående av seriekobling av en motstand med resistans R og en kondensator med kapasitans C er $\tau = RC$. Vi skal ha $\tau = 1,0$ s for $C = 1,0 \cdot 10^{-3}$ F. Da må R

være

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{\tau}{C} \\
 &= \frac{1,0 \text{ s}}{1,0 \cdot 10^{-3} \text{ F}} \\
 &= 1,0 \cdot 10^3 \Omega \\
 &= \underline{\underline{1,0 \text{ k}\Omega}}
 \end{aligned}$$

Oppgave 25

Ladningen Q på en kondensator som lades opp gjennom en motstant er gitt ved

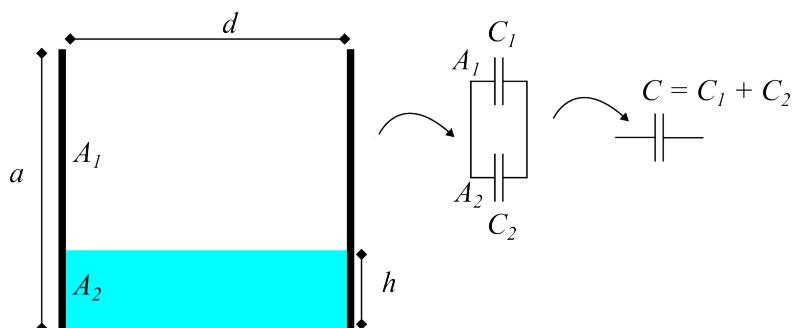
$$Q(t) = Q_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

der tidskonstanten er $\tau = RC$ og Q_0 er den maksimale ladningen på kondensatoren. Tiden til 95 % oppladningen finner vi ved

$$\begin{aligned}
 Q(t) &= 0,95Q_0 \\
 Q_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) &= 0,95Q_0 \\
 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} &= 0,95 \\
 e^{-\frac{t}{\tau}} &= 0,05 \\
 -\frac{t}{\tau} &= \ln 0,05 \\
 t &= \tau \ln 0,05 \\
 &= 0,10 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot 10 \cdot 10^6 \Omega \cdot \ln 0,05 \\
 &= 2,996 \text{ s} \\
 &\approx \underline{\underline{3,0 \text{ s}}}
 \end{aligned}$$

Oppgave 26

Tankmåleren kan ansees som en parallellkobling av en luftfylt og en væskefylt kondensator, som vist på figuren under:



Kapasitansen til den luftfylte platekondensatoren med areal A_1 og plateavstand d er

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{A_1}{d}.$$

Kondensatoren med areal A_2 som er fylt med en væske med relativ permittivitet ε_r , har kapasitans

$$C_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A_2}{d}$$

Den totale kapasitansen C av parallellkoblingen er

$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2 \\ &= \varepsilon_0 \frac{A_1}{d} + \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A_2}{d}. \end{aligned}$$

Platearealene A_1 og A_2 endrer seg med væsknivået h . Hvis platebredden er b (inn i papirplanet) er:

$$\begin{aligned} A_2 &= bh \\ A_1 &= b(a - h), \end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned} C &= \varepsilon_0 \frac{A_1}{d} + \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A_2}{d} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{d} (A_1 + \varepsilon_r A_2) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{d} (b(a - h) + \varepsilon_r \cdot bh) \\ &= \underline{\underline{\frac{\varepsilon_0}{d} b(a + (\varepsilon_r - 1)h)}} \end{aligned}$$

Oppgave 27

I en seriekobling er det samme ladning Q på hver kondensator. Ut i fra definisjonen av kapasitans er spenningen over kondensatoren med kapasitans C lik

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow V = \frac{Q}{C}.$$

Kirchoffs 2. lov for kretsen gir at

$$\begin{aligned} V_0 - \frac{Q}{C} - \frac{Q}{10C} - \frac{Q}{100C} &= 0 \\ \frac{111}{100} \frac{Q}{C} &= V_0 \\ \frac{Q}{C} &= \frac{100}{111} V_0 \end{aligned}$$

slik at spenningen $V = Q/C$ over kondensatoren med kapasitans C blir lik

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{C} \\ &= \underline{\underline{\frac{100}{111} V_0}} \end{aligned}$$

Oppgave 28

Ettersom magnetkrafta $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ hele tiden står normalt på farten til partiklene, vil begge partiklene få en sirkelbevegelse med konstant banefart. Newtons 2. lov for sirkelbevegelsen:

$$\begin{aligned}\sum F &= ma_{\perp} = m \frac{v^2}{R} \\ qvB &= m \frac{v^2}{R} \\ R &= \frac{mv}{qB}\end{aligned}$$

Altså er radien proporsjonal med massen, dvs. forholdet r_e/r_p mellom radiusene til hhv. protonet og elektronet blir lik forholdet mellom massene;

$$\frac{r_e}{r_p} = \frac{m_e}{m_p} = \underline{\underline{\frac{1}{2000}}}$$

Oppgave 29

Dreiemomentet på en strømsløyfe med areal A som fører en strøm I og befinner seg i et ytre magnetfelt B er gitt ved

$$\tau = IAB \sin \phi,$$

dvs. det maksimale dreiemomentet på sløyfa er

$$\tau_{\max} = IAB.$$

Dette er altså proporsjonalt med B , og dersom B reduseres med 5,0%, vil også $\tau_{\max}$ reduseres tilsvarende.

Riktig påstand: Maksimalt dreiemoment reduseres med 5,0%.

Oppgave 30

Ettersom spenningen skal reduseres fra 5,0 V til 3,3 V ved en strøm på 0,50 A, må spenningen over kobberlederen være

$$V = 5,0 \text{ V} - 3,3 \text{ V} = 1,7 \text{ V},$$

dvs. resistansen i lederen må være

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1,7 \text{ V}}{0,50 \text{ A}} = \underline{\underline{3,4 \Omega}}$$

Resistansen til en leder med resistivitet ρ , tverrsnitt A og lengde l er gitt ved

$$\begin{aligned}R &= \frac{\rho l}{A} \Rightarrow l = \frac{RA}{\rho} \\ l &= \frac{3,4 \Omega \cdot 0,050 (10^{-3} \text{ m})^2}{1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}} \\ &= \underline{\underline{10 \text{ m}}}\end{aligned}$$

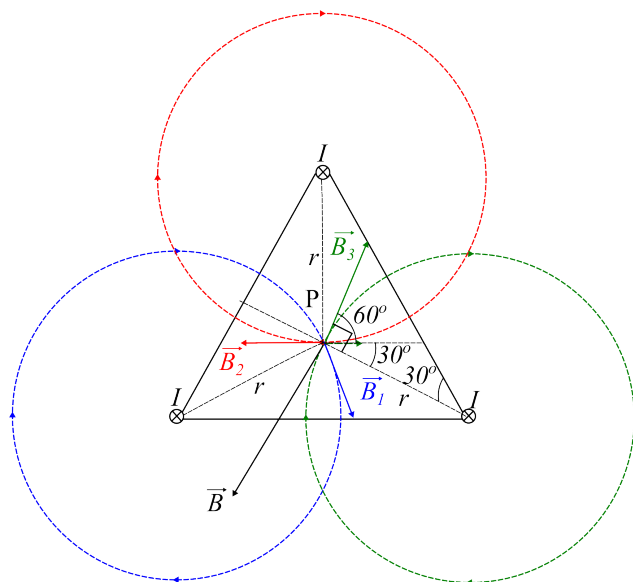
Oppgave 31

Magnetfeltet i avstand R fra en lang, rett leder som fører strømmen I har verdien

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \\
 &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A} \cdot 1,0 \cdot 10^3 \text{ A}}{2\pi \cdot 1,0 \text{ m}} \\
 &= 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ T} \\
 &= \underline{\underline{0,20 \text{ mT}}}
 \end{aligned}$$

Oppgave 32

Feltet rundt en rett leder er sirkulært med en retning gitt fra høyrehåndsregelen. Figuren under viser feltbidragene $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ og $\vec{B}_3$ fra de tre lederne og det resulterende totale feltet $\vec{B}$:



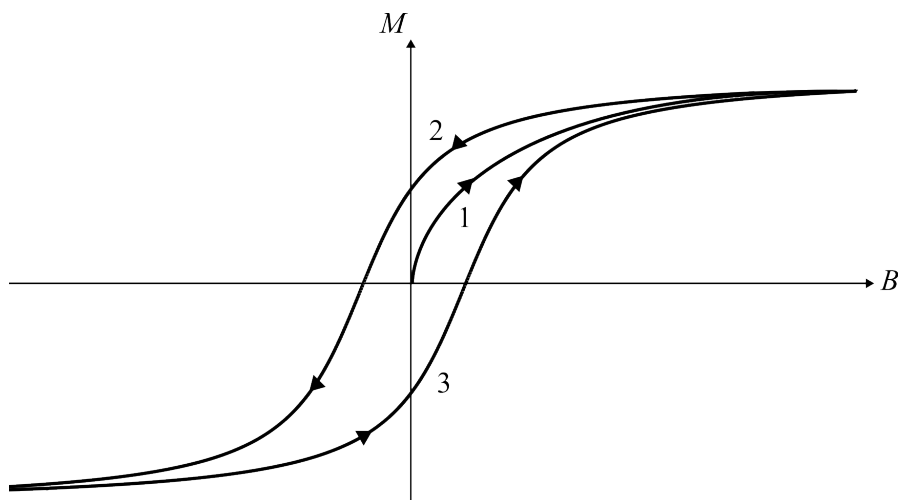
Som figuren viser, vil y -komponentene av B_1 og B_3 kansellere hverandre. Det totale feltet vil derfor være i horisontalretningen, med absoluttverdi

$$\begin{aligned}
 B &= \underbrace{2B_1 \cos 60^\circ}_{x\text{-komponent av } B_1} - B_2 \\
 &= 2 \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\
 &= \underline{\underline{0}}
 \end{aligned}
 \quad (\text{Her er } \cos 60^\circ = \frac{1}{2})$$

Totalt magnetfelt i sentrum er altså null.

Oppgave 33

Gitt hysteresekurven:



Riktig påstand: Ved slutten av kurve 1 og 3 har materialet nådd sin maksimale magnetisering (metning).

Oppgave 34

Ut i fra Faradays induksjonslov er absoluttverdien av den induserte emsen i spolen med N viklinger gitt ved

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \\
 &= N \cdot \frac{d}{dt} (BA \sin \phi) \\
 &= NBA \frac{d}{dt} (\sin \omega t) && (\text{Her er } \omega = 2\pi/T) \\
 &= \underline{NBA\omega \cdot \cos(\omega t)}
 \end{aligned}$$

Amplituden av den induserte spenningen blir da

$$\begin{aligned}
 V_0 &= NBA\omega \\
 &= NBA \cdot \frac{2\pi}{T} \\
 &= 2000 \cdot 80 \cdot 10^{-3} \text{ T} \cdot 60 (10^{-2} \text{ m})^2 \cdot \frac{2\pi}{0,010 \text{ s}} \\
 &= 603,2 \text{ V} \\
 &\approx \underline{\underline{0,60 \text{ kV}}}
 \end{aligned}$$

Oppgave 35

Ved $t = 0$ er strømretningen fra $+$ til $-$ på spenningskilden, slik at høyrehåndsregelen for magnetkrafta tilsier at magnetkrafta $\vec{F}_m$ har retning mot høyre på oppgavefiguren.

Verdien på krafta er (ved $t = 0$ er spenningen over stanga lik V_0 , slik at strømmen gjennom stanga fra Ohms lov er $I = V_0/R$)

$$\begin{aligned}
 F_m &= IlB \\
 &= \underline{\underline{\frac{V_0 l B}{R}}}
 \end{aligned}$$

Newtons 2. lov gir da akselerasjonen til stanga ved $t = 0$:

$$\begin{aligned}\sum F &= ma \\ \frac{V_0 l B}{R} &= ma \\ a &= \frac{V_0 l B}{\underline{\underline{mR}}}\end{aligned}$$