Løsningsforslag eksamen TFY4107 sommer 2023

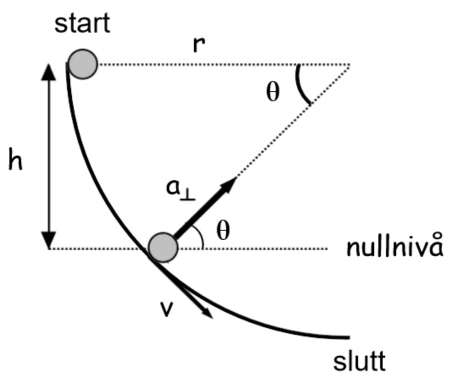
Oppgave 1:

$$20\ \mathrm{kg/m^2} = 20 \cdot \frac{1000\ \mathrm{g}}{(100\ \mathrm{cm})^2} = 20 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{g/cm^2} = 2{,}0\ \mathrm{g/cm^2}$$

Oppgave 2:

Her er det summen av kreftene nedover langs skråplanet som avgjør. Ettersom studenten beveger seg nedover dette skråplanet med konstant hastighet må $\sum F = 0$ i denne retningen. Dette kravet er kun oppfylt av alternativ D. Merk at normalkrafta har retning $\perp$ på skråplanet og vil derfor ikke ha noen innvirkning på studentens hastighet nedover skråplanet.

Oppgave 3:



Sentripetalakselerasjonen, med retning inn mot sentrum av sirkelbanen er gitt ved:

$$a_\perp = \frac{v^2}{r}$$

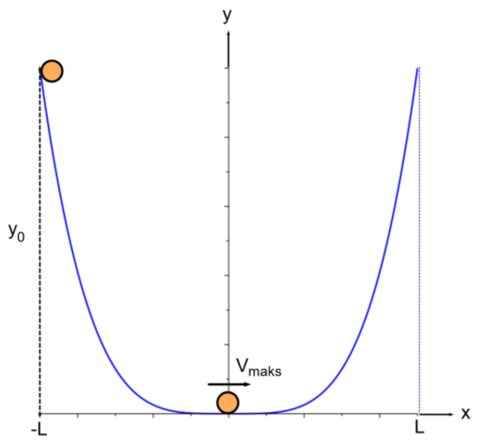
Siden legemet glir friksjonsløst nedover banen finner vi banefarta v ved å anvende loven om bevaring av den totale mekaniske energien.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gh = 2gr\sin\theta$$

Innsatt gir dette en sentripetalakselerasjon

$$a_\perp = \frac{2gr\sin\theta}{r} = 2g\sin\theta$$

Oppgave 4:



Maksimal høyde: $h_{maks} = y_0$

Bevaring av den totale mekaniske energien

$$mgy_0 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_{maks}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Dette gir videre at:

$$mgy_0 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_{maks}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\cdot\left(\frac{\mathrm{v}_{maks}}{r}\right)^2$$

$$\Rightarrow \qquad mgy_0 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_{maks}^2 + \frac{1}{5}m\cdot\mathrm{v}_{maks}^2 = \frac{7}{10}m\mathrm{v}_{maks}^2$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{v}_{maks} = \sqrt{\frac{10}{7}gy_0} = 0.84\ \mathrm{m/s}$$

Oppgave 5:

Den maksimale helningsvinkelen finnes ved endepunktene $x = L$, eller $x = -L$. Det gir at:

$$y' = \frac{4y_0x^3}{L^4} = \frac{4y_0}{L} = 0{,}4$$

Fra hintet:

$$y' = \tan\theta = 0.4 \;\Rightarrow\; \theta = 22^0$$

Oppgave 6:

Newtons 2.lov gir med $u < 0$:

$$u\frac{dm}{dt} = m\frac{d\mathrm{v}}{dt} \;\Rightarrow\; udm = md\mathrm{v} \;\Rightarrow\; \frac{dm}{m} = \frac{1}{u}\,d\mathrm{v}$$

Integrerer opp:

$$\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} = \frac{1}{u}\int_{\mathrm{v}_0}^{\mathrm{v}} d\mathrm{v} \;\Rightarrow\; \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = \frac{1}{u}(\mathrm{v}-\mathrm{v}_0) \;\Rightarrow\; m = m_0e^{-\frac{\mathrm{v}-\mathrm{v}_0}{|u|}}$$

Rakettens nye hastighet er $\mathrm{v} = 2\mathrm{v}_0 \;\Rightarrow\; \mathrm{v}-\mathrm{v}_0 = 1{,}4\ \mathrm{km/s}$.
Innsatt innebærer dette at rakettens gjenværende masse etter hastighetsøkningen er:

$$m = m_0\cdot e^{-\frac{1{,}4\ \mathrm{km/s}}{2{,}6\ \mathrm{km/s}}} = 0{,}584\, m_0$$

Forbruket av masse:

$$m - m_0 = 0.416\, m_0 = 3{,}21\cdot 10^5\ \mathrm{kg}$$

Tiden det tar å fordoble rakettens hastighet er dermed:

$$\frac{m-m_0}{dm/dt} = 24\ \mathrm{s}$$

Oppgave 7:

Newtons 2.lov:

$$\sum F = G - f = m\frac{d\mathrm{v}}{dt} \;\Rightarrow\; mg - k\mathrm{v} = m\frac{d\mathrm{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{d\mathrm{v}}{mg-k\mathrm{v}} = \frac{1}{m}\,dt \;\Rightarrow\; \frac{d\mathrm{v}}{mg\left(1-\frac{k\mathrm{v}}{mg}\right)} = \frac{1}{m}\,dt \;\Rightarrow\; \frac{d\mathrm{v}}{1-\frac{k\mathrm{v}}{mg}} = gdt$$

Oppgave 8:

Støtet er uelastisk $\Rightarrow$ Kun systemets bevegelsesmengde er bevart.

$$M\mathrm{v}_{M,f} = m\mathrm{v}_{m,e} + M\mathrm{v}_{M,e} \;\Rightarrow\; \mathrm{v}_{M,e} = \mathrm{v}_{M,f} - \frac{m}{M}\mathrm{v}_{m.e}$$

Oppgave 9:

Elastisk støt: Både bevegelsesmengden og den totale kinetiske energien er bevart.

$$m\mathrm{v}_{m,f} = m\mathrm{v}_{m,e} + 2m\mathrm{v}_{M,e} \quad (1)$$

$$m\mathrm{v}_{m,f}^2 = m\mathrm{v}_{m,e}^2 + 2m\mathrm{v}_{M,e}^2 \quad (2)$$

Fra (1) er:

$$\mathrm{v}_{m,e} = \mathrm{v}_{m,f} - 2\mathrm{v}_{M,e}$$

Innsatt i (2) gir dette:

$$\mathrm{v}_{m,f}^2 = \mathrm{v}_{m,f}^2 - 4\mathrm{v}_{m,f}\mathrm{v}_{M,e} + 6\mathrm{v}_{M,e}^2$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{v}_{M,e}(6\mathrm{v}_{M,e} - 4\mathrm{v}_{m,f}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{v}_{M,e} = \frac{2}{3}\mathrm{v}_{m,f}$$

Oppgave 10:

Hjulets vinkelforflytning:

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 11 \text{ rad}$$

Oppgave 11:

Sylinderens totale kinetiske energi:

$$K = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{v}}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 + \frac{1}{4}m\mathrm{v}^2 = \frac{3}{4}m\mathrm{v}^2$$

Oppgave 12:

Den statiske friksjonskrafta f som virker på hver enkelt sylinder er:

$$\tau = f \cdot r = I\alpha = I\ \frac{a}{r} \ \Rightarrow \quad f = I\ \frac{a}{r^2}$$

Newtons 2.lov gir videre at:

$$G_x - f = ma \quad \Rightarrow \ mg\sin\alpha - I\ \frac{a}{r^2} = ma \ \Rightarrow \quad g\sin\alpha - \frac{1}{2}\ a = a$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\ a = g\sin\alpha \ \Rightarrow \quad a = \frac{2}{3}\ g\sin\alpha$$

Akselerasjonen som massemiddelpunktet til de to sylinderne erfarer, er uavhengig av både massen m og radien r. De to sylinderne kommer dermed samtidig ned til bunnen av skråplanet.

Oppgave 13:

Treghetsmomentet til legemet:

$$I = cmr^2$$

Forholdet mellom den translatoriske kinetiske energien og den tilsvarende rotasjonsenergien:

$$\frac{K_{rot}}{K_{tr}} = \frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2} = \frac{I\omega^2}{m\mathrm{v}^2} = \frac{\left(cmr^2 \cdot \frac{\mathrm{v}^2}{r^2}\right)}{m\mathrm{v}^2} = \frac{cm\mathrm{v}^2}{m\mathrm{v}^2} = c$$

Oppgave 14:

Det totale treghetsmomentet til det sammensatte legemet:

$$I_{tot} = I_{pl} + 2I_{st} = \frac{1}{12}M(a^2 + L^2) + 2\left(\frac{1}{12}m \cdot\ 4L^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{12}Ma^2 + \frac{1}{12}ML^2 + \frac{2}{3}mL^2 + \frac{1}{2}ma^2$$
$$= \left(\frac{1}{12}M + \frac{1}{2}m\right)a^2 + \left(\frac{1}{12}M + \frac{2}{3}m\right)L^2$$

Oppgave 15:

Masse-elementet dm for en liten halvsirkulær arealdel inne i legemet:

$$dm = \sigma dA = \sigma\, \pi r dr$$

Massetettheten σ:

$$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{M}{\frac{1}{2}\pi(r_2^2 - r_1^2)}$$

Innsatt i uttrykket for dm:

$$dm = \frac{2M}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \cdot \pi r dr = \frac{2M}{(r_2^2 - r_1^2)} \cdot r dr$$

Legemets treghetsmoment:

$$I = \int_{r_1}^{r_2} r^2\, dm = \int_{r_1}^{r_2} \frac{2M}{(r_2^2 - r_1^2)} \cdot r dr = \frac{2M}{(r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^{r_2} r^3\, dr$$
$$= \frac{2M}{(r_2^2 - r_1^2)} \left[\frac{1}{4}r^4\right]_{r_1}^{r_2} = 0{,}013\ \mathrm{kgm^2}$$

Oppgave 16:

Massemiddelpunktets akselerasjon a:

$$a = r\alpha = 3{,}50\ \mathrm{m/s^2}$$

Det mekaniske arbeidet W:

$$W = \tau \cdot \theta = I\alpha \cdot \theta = I \cdot \frac{a}{r} \cdot \frac{s}{r} = I \cdot \frac{as}{r^2} = \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{as}{r^2} = \frac{2}{5}m \cdot\ as = 0{,}042\ \mathrm{J}$$

Oppgave 17

Den totale dreieimpulsen:

$$I = I_{trans} + I_{rot} = rm\mathrm{v} + I\omega = rm\mathrm{v} + \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{\mathrm{v}}{r} = \frac{7}{5}rm\mathrm{v} = 4{,}78 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kgm^2/s}$$

Oppgave 18

Det totale dreiemomentet:

$$\sum\tau = I\alpha = \frac{dL_A}{dt} = \frac{d}{dt}(8mr\mathrm{v}) = 8mr\frac{d\mathrm{v}}{dt} = 8mra$$

Samtidig er:

$$\sum\tau = (G_{2m} - G_m) \cdot r = (2mg - mg)r = mgr$$

Sammenligner:

$$8mra = mgr \;\Rightarrow\; 8a = g \;\Rightarrow\; a = \frac{g}{8}$$

Punktmassenes hastighet etter $t = 0{,}50$ s er dermed:

$$\mathrm{v}(0{,}50) = \mathrm{v}_0 + at = at = \frac{1}{8}gt = 0{,}63 \text{ m/s}$$

Oppgave 19:

Bølgens forplantningshastighet:

$$\mathrm{v} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1}{k} = 1{,}85 \text{ m/s}$$

Oppgave 20:

Pendelens periode er:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{3mg\left(\frac{L}{2}\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Perioden er uavhengig av massen m. Samtidig varierer $T \sim \sqrt{L}$.

Oppgave 21:

Fra forrige oppgave :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Snorlengden L forkortes for å oppnå samme periode T. Det innebærer at gravitasjonsakselerasjonen på planeten må reduseres i forhold til gravitasjonsakselerasjonen på jorda.

Oppgave 22:

Svingefrekvensen til en torsjonspendel:

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Treghetsmomentet til torsjonspendelen:

$$I = \kappa\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \kappa\left(\frac{\left(\frac{270 \text{ s}}{50 \text{ svingninger}}\right)}{2\pi}\right)^2 = 0{,}41 \text{ kgm}^2$$

Oppgave 23:

De to fjærene utøver like stor kraft og i samme retning under svingebevegelsen.
Newtons 2.lov:

$$2F = -2kx = ma = m\,\frac{dx^2}{dt^2} \;\Rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k}{m}x = 0$$

Systemets frekvens f:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} \;\Rightarrow\; f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Oppgave 24:

Svingningens amplitude som funksjon av tida:

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}$$

Her er A_0 amplituden ved tiden $t = 0$. Dempingsfaktoren b finnes ved å sette:

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} = \frac{1}{2} A_0 \quad \Rightarrow \quad e^{\left(-\frac{b}{2m}\right)t} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{b}{2m} t = \ln \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{2m}{t} \ln \frac{1}{2} = 2{,}3 \text{ g/s}$$

Oppgave 25:

Den harmoniske vinkelfrekvensen ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Den tilsvarende vinkelfrekvensen μ for den dempede svingningen:

$$\mu = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Forholdet:

$$\frac{\mu}{\omega_0} = \sqrt{\left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right) \cdot \frac{m}{k}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4mk}} = 0{,}8$$

Oppgave 26:

Amplitudeligningen for den dempede svingningen når $A_0 = 7{,}0$ ved tiden $t = 0$:

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} = 7{,}0 e^{-\frac{b}{2m}t}$$

Direkte avlesning fra grafen tilsier at

$$A(t = 4{,}0 \text{ s}) = 3.0 \quad \Rightarrow \quad 7{,}0\, e^{-\frac{4b}{2m}} = 3{,}0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{2b}{m} = \ln \frac{3{,}0}{7{,}0} \quad \Rightarrow \quad m = 30{,}4 \text{ kg}$$

Innsatt gir dette svingeligningen:

$$A(t) = 7{,}0\, e^{-0{,}212\, t}$$

Oppgave 27:

Tonens bølgetall når første overtone innebærer at $\lambda = L = 1{,}50 \text{ m}$:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 4{,}19 \text{ 1/m}$$

Tonens vinkelfrekvens:

$$\omega = \mathrm{v} \cdot k = 1437 \text{ m/s}$$

Tonens frekvens:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 229 \text{ Hz}$$

Oppgave 28:

Bølgas forplantningshastighet:

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{mF}{L}} = 50{,}7\ \mathrm{m/s}$$

Oppgave 29:

Effekten bølgegeneratoren må levere:

$$P = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2\ \mathrm{v} = \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{L}\cdot A^2\cdot(2\pi f)^2\cdot\ \mathrm{v} = 165\ \mathrm{W}$$

Oppgave 30:

Grunntonen tilsvarer at en stående bølge har bølgelengde $\lambda = 2L$ der L er lengden av strengen. Bølgelengden:

$$\lambda = 2L = 1400\ \mathrm{mm}$$

Strekk-krafta F:

$$F = \mu\mathrm{v}^2 = \mu(\lambda f)^2 = 134\ \mathrm{N}$$

Oppgave 31:

Lydbølgens hastighet gjennom vannet:

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = 1483\ \mathrm{m/s}$$

Intensiteten:

$$I = \frac{1}{2}\rho s_m^2\omega^2\ \mathrm{v} = \frac{1}{2}\rho s_m^2(2\pi f)^2\ \mathrm{v} = 1{,}45\ \mathrm{W/m^2}$$

Oppgave 32:

Intensiteten i enheter av $\mathrm{W/m^2}$:

$$I = \frac{(\Delta P)^2}{2\rho\mathrm{v}} = 5{,}04\cdot 10^{-4}\ \mathrm{W/m^2}$$

I enheter av dB tilsvarer dette:

$$\beta = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10\log\left(\frac{5{,}04\cdot 10^{-4}\ \mathrm{W/m^2}}{10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}}\right) = 87\ \mathrm{dB}$$

Oppgave 33:

Ettersom måsen og flaggermusen flyr mot hverandre vil frekvensen som flaggermusa hører være av størrelsesorden:

$$f' = f\left(\frac{\mathrm{v} + \mathrm{v}_{må}}{\mathrm{v} - \mathrm{v}_{fl}}\right) = 1{,}0\cdot 10^5\ \mathrm{Hz}\cdot\left(\frac{343\ \mathrm{m/s} + 15\ \mathrm{m/s}}{343\ \mathrm{m/s} - 10\ \mathrm{m/s}}\right) = 1{,}075\cdot 10^5\ \mathrm{Hz} \approx\ \ 108\ \mathrm{kHz}$$