

## FY1008 Introduksjon til Numerisk Fysikk

## Øving 2 Høst 2025

NTNU

Institutt for  
fysikk

I denne øvingen skal vi studere følgende rekke

$$S_N = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad (1)$$

hvor  $N$  er et positivt heltall. Dersom vi antar at  $N > 4$ , er de første leddene av denne rekken

$$S_N = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \quad (2)$$

Nedenfor vil vi referere til summen av den *uendelige rekken* som  $S_\infty$  og vi definerer den på basis av likning (1) via uttrykket

$$S_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}. \quad (3)$$

La oss definere integralet

$$I(a, b) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^b dx \exp(-x^2), \quad (4)$$

hvor  $a$  og  $b > a$  er reelle tall.

Integraler, f.eks. slik som det i likning (4), representerer arealet under kurven som integranden definerer. En tilnærming av integralet kan man få ved å summere opp arealene av  $N$  rektangler som alle har samme bredden  $\Delta x$  og høyden  $\exp(-x_n^2)$  (i dette tilfellet). Her betegner  $x_n$  midtpunktet langs  $x$ -aksen for rektangel nummer  $n$  talt fra venstre. Denne metoden for å beregne integralet (4) kalles for *midpunkt metoden*. Matematisk kan det som er beskrevet overfor uttrykkes som summen

$$I \approx \Delta x \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^N \exp(-x_n^2). \quad (5)$$

Dette betyr at å regne ut et integral med midpunkt metoden, tilsvarer å summere en rekke!

## 1 Oppgaver

- a) Beregn de numeriske verdiene for  $S_{10}$ ,  $S_{50}$  og  $S_M$  ved å summere rekken fra første-til-siste ledd. Her velger du selv en verdi for  $M > 50$ .
- b) Gjennomfør den samme beregningen, *men* summer nå rekken bakfra, dvs. fra siste-til-første ledd. Sammenlign de numeriske verdiene du nå får mot tilsvarende verdier fra forrige delspørsmål. Er verdiene de samme? Prøv å kommenter resultatene du finner. *Kommentar:* Årsaken til at dette er av interesse er at man i numerisk analyse 101, lærer man man kan redusere avrundings feil ved i legge sammen de minste tallene først. Dette har den konsekvens at i mange programmeringsspråk, og spesielt når man bruker single presisjon flyttall (dvs. reelle tall) kan man få forskjellige resultater avhengig av måten man summerer rekken.

- c) På bakgrunn av resultatene fra forrige delspørsmål, beregn verdien av den uendelige rekken  $S_\infty$  ved å bruke de to foregående metodene for å summere rekken, dvs. summasjon (a) forfra  $[S_\infty^{(a)}]$ , og (b) bakfra  $[S_\infty^{(b)}]$ . Sammenlikn resultatene du finner for  $S_\infty$  mot den analytiske verdien  $\pi/4$ . Hvor stort er ev. avviket i dine beregnede verdier i forhold til den analytiske verdien? Hvor mange desimaler har du fått riktige? Prøv å kommenter dine resultater.

Regn ut integralet i likning (4) for verdiene  $a = 0$  og  $b = 4$ .

- d) Finn uttrykkene for  $\Delta x$  og midtpunktente  $x_n$ .
- e) Bruk disse resultatene til å beregne en tilnærming til integralet i likning (4) for verdiene  $a$  og  $b$  som vi antar, dvs beregn en tilnærming for integralet  $I(0, 4)$ . Gjennomfør beregningen for ulike verdier for antall rektangler  $N$ . Hva tror du er den mest riktige verdien for dette integralet er?