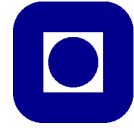


FY1008 Introduksjon til Numerisk Fysikk

Øving 5 Høst 2025

NTNU

Institutt for
fysikk

I denne øvingen skal vi studere en *stokastisk prosess*. En slik prosess har noe tilfeldig ved seg som vi vil se nedenfor. Her vil du få trening i å bruke og jobbe med tilfeldige tall, eller på engelsk random numbers, som er generert på en datamaskin.

Rent konkret skal vi studere enkelte egenskaper ved hva man på engelsk kaller for en *random walk* (eller en “drunken sailor’s random walk”). På norsk kalles dette for en *virrevandrer* (engelsk walker), et navn som fysikk professor og tidligere NTNU rektor, Eivind Hiis Hauge opprinnelig var den som foreslo. En virrevandrer i en dimensjon starter ved tiden $t = 0$ fra en gitt posisjon, la oss her si $x(0) = x_0 = 0$. I neste tidssteg, altså ved tiden $t = 1$, har den posisjonen $x_1 = +1$ eller $x_1 = -1$, dvs. at steglengden er ± 1 . Hvilket av de to mulige stegene virrevandrerens tar blir valgt med sannsynligheten 50% for hver av dem. I neste tidssteg, $t = 2$, blir den ny posisjon x_2 , dvs. den forrige posisjonen x_1 pluss et steg ± 1 som er valgt med lik sannsynlighet for steg opp (+1) og sted ned (-1). På tilsvarende måte beregner man posisjonen for senere tidspunkt.

Vi vil nedenfor betegne steglengden som blir valgt ved tiden $t = n$ som ξ_n . I vårt tilfelle så har vi at¹

$$\xi_n \in \{-1, +1\}, \quad (1)$$

slik at posisjonen for virrevandrerens ved tiden t finnes ved å summere opp alle stegene frem til og med tiden t , dvs. for $n \leq t$, eller $[x(t) \equiv x_t]$

$$x_t = \sum_{n=1}^t \xi_n. \quad (2)$$

Merk deg at vi har antatt at $x_0 = 0$ selv om dette ikke er en nødvendig antakelse. Egenskaper til virrevandrere er noe som har vært studert inngående i *statistisk fysikk*.

For økende tid, kan virrevandrerens bevege seg lengre og lengre bort fra start posisjonen $x_0 = 0$. Nedenfor skal vi studere hvor langt fra startpunktet den har kommet i *middel* (eller i middel verdi), dvs. dersom vi studerer *mange* virrevandrere hvor vil en gjennomsnittlig vandrer befinne seg. Dessuten vil vi studere hvor stort område vandrere kan dekke for en gitt tid. Dette vil vi måle med det såkalte *standardavviket*. For et sett med N tall $\{a_n\}$ [ev. skevet som $\{a_n\}_{n=1}^N$] så er standardavviket av disse tallene σ_a definert som²

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (a_n - \langle a \rangle)^2}, \quad (3)$$

¹Teknisk sett trenger ikke steglengden å være ± 1 . Mer generelt kan steglengden bli valgt fra en sannsynlighetsfordeling som er symmetrisk og som avtar raskt nok for store argument (har endelig varians eller andre moment).

²Alternativt kan man skrive dette som $\sigma_a = \sqrt{\langle (a - \langle a \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2}$.

hvor

$$\langle a \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n, \quad (4)$$

betegner middelveiden (engelsk *mean*) av de samme tallen³.

- a) Hvordan vil du bestemme om virrevandrerens skal ta ett steg opp eller ett steg ned? For dette trenger du en generator for tilfeldige tall⁴. Finn denne relevante funksjonen i numpy for dette og test den for å forsikre deg om at den gjør hva du ønsker.
- b) Videre finn numpy funksjonene for å regne ut middelveiden (en: mean) og standard avviket (en: standard deviation) for et sett med tall. Test også disse funksjonene for å forsikre deg om at du bruker disse funksjonene riktig.
- c) Skriv en python funksjon for å produsere posisjonen til en virrevandrer frem til en gitt tid t . Plot posisjonen til vandreren som funksjon av tiden $t \leq 1000$ for *minst* fem ulike virrevandrere (gjærne flere).
- d) Hvordan tolker du resultatene vist i plottet fra forrige delspørsmål? Hva skjer med spredningen mellom posisjonen for de ulike vandrere når tiden øker? Er den konstant, øker den, eller minker den?

Vi skal nå se på egenskapene til et stort antall virrevandrere for å studere hvordan en gjennomsnittlig vandrers oppfører seg. Det første vi skal se på er histogrammet, eller sannsynlighetsfordelingen, for posisjon $p(x_t)$ for et gitt tidspunkt t .

- e) Hva er den maksimale og minimale posisjonen en vandrers kan ha ved tiden t ?
- f) Bruk dette til å beregne $p(x_t)$ for et stort antall vandrere for tidspunktene $t = 10, 100, 500$ og 1000 . Plot disse resultatene i samme plot. *Tips:* Om disse grafene ikke er glatte for små verdier av posisjonen, har du mest sannsynlig brukt for få antall vandrere i din beregning og bør derfor øke dette.
- g) Fra dette plottet, hva kan du si om hvordan

$$m_t = \langle x_t \rangle \quad (5)$$

og standardavviket

$$\sigma_t = \sqrt{\langle (x_t - \langle x_t \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle x_t^2 \rangle - \langle x_t \rangle^2}, \quad (6)$$

endrer seg med tiden?

- h) Regn ut m_t og σ_t som funksjon av tiden t for $t \leq 1000$ og plott disse størrelsene mot tiden i samme plot. Sørg for at du bruker et stort nok antall vandrere slik at resultatene er glatte.

³Det kan tenkes at du er mer vant med å bruke $\bar{a}$ for å betegne middelveiden. Hva vi bruker her er veldig vanlig notasjon i fysikken, så jeg har valgt å bruke den her.

⁴Om generatoren returnere samme tall hver gang, må du sette et såkalt seed. Les dokumentasjonen for å finne ut detaljer.

- i) Fra de beregnede dataene i forrige delspørsmål skal du forsøke å finne den funksjonelle sammenhengen mellom m_t og tiden t samt mellom σ_t og tiden. *Tips:* Om du trenger å tilpasse de beregnede datasettene til en funksjonell form, har *scipy* funksjoner for dette. Prøv om du kan finne en av dem og hvordan den brukes. *Tips 2:* Test funksjonen først på et dataset som du kjenner oppførselen til, før du bruker den på dine beregnede data (med ukjent funksjonell oppførsel).