

FY1008 Introduksjon til Numerisk Fysikk

Øving 6 Høst 2025

NTNU

Institutt for
fysikk

I denne øvingen skal vi studere en enkel *Monte Carlo* (MC) metode. Slike metoder er en vid klasse av beregningsalgoritmer som bruker tilfeldige tall for å kunne gjøre numeriske beregninger. Ofte brukes uorden (eller tilfeldigheter) til å løse deterministiske problemer. Navnet er avledet av casinoet i Monaco med navnet Monte Carlo. MC metoder brukes mye i naturvitenskap som fysikk og kjemi, matematikk, finans og kryptologi.

Rent konkret skal vi her gjennomføre en såkalt Monte Carlo integrasjon. For å illustre dette, skal vi regne ut arealet av første kvadrant av en sirkel. Som kjent er arealet av en sirkel med radius en gitt som π . Dermed må arealet av en av de fire kvadrantene av en slik sirkelen bli $\pi/4$. Derfor er ikke svaret i seg selv av spesiell interesse. Dog håper jeg at du vil finne metoden vi bruker for å regne dette ut på av mer interesse. MC integrasjon er av spesiell interesse dersom man ønsker å regne integraler over funksjoner i et stort antall dimensjoner. For slike integraler vil typisk de klassiske metodene bli lite effektive.

Arealet av første kvadrant av en sirkel er gitt som dobbel integralet av funksjonen $f(x, y) = 1$ over første kvadrant $\mathcal{A}$ av en sirkel med radius en, noe vi skriver som

$$I = \int_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy. \quad (1)$$

Dette integralet er bare en komplisert måte å skrive arealet av dette området. Du vet trolig ikke helt hva et dobbelt integral er, men du kan tenke på det som volum under funksjonen (eller overflaten) $f(x, y) = 1$, analogt til at integralet av (den positive) funksjonen $g(x)$ er arealet under kurven.

Om vi legger senteret på vår sirkel av radius en i origo, da vil dens første kvadrant havne innenfor kvadratet med sider definert av hjørnene $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, og til sist $(1, 1)$ i planet.

La oss betegne et punkt i planet som

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2). \quad (2)$$

La x_1 og x_2 begge være tilfeldige tall mellom 0 og 1 slik at de er *uniformt* fordelt og uten at det er noen sammenheng¹ mellom x_1 og x_2 . Da vil de ulike punktene $\mathbf{x}_n$ (hvor $n = 1, 2, \dots$) plassere seg jevnt utover kvadratet med sider en og ett hjørne i origo (se Fig. 1 nedenfor).

Velg deg et stort antall N slike punkter. For hvert av dem, avgjør om punktet er innenfor eller på sirkelen, dvs. kontroller om

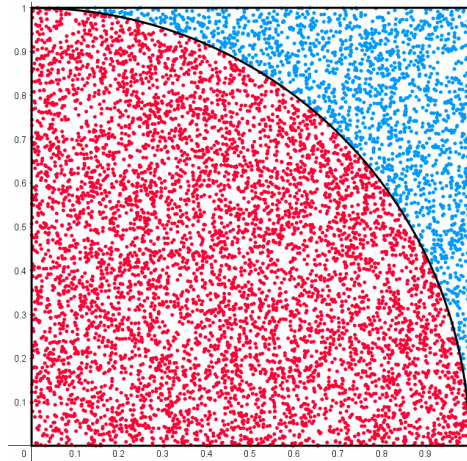
$$|\mathbf{x}_n| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1. \quad (3)$$

Dersom det er innfor, oppdatere du en teller N_o med en, dvs. $N_o \rightarrow N_o + 1$.

Etter at du har kontrollert alle punktene som du har generert, vil N_o svare til det totale antall punkter som er innenfor, eller på, sirkelen. Da vil integralet i likning (1) være tilnærmet lik

$$I \approx \frac{N_o}{N}. \quad (4)$$

¹Teknisk sier vi at det er ingen korrelasjon mellom x_1 og x_2



Figur 1: Illustrasjon av Monte Carlo integrasjon. De røde punktene er punkter som er innenfor sirkelen, mens de blå punkter er utenfor. Figuren er hentet fra Wikipedia.

Men siden vi vet at $I = \pi/4$ finner vi at en tilnærming til π må bli

$$\pi \approx 4 \frac{N_o}{N}. \quad (5)$$

Hele prosessen er illustrert i Fig. 1

- a) Skrive et program som regner ut π ved hjelp av Monte Carlo integrasjon som vist overfor. Prøv å skrive koden slik at du ikke trenger å bruke løkker (da vi vet det ikke er effektivt i Python). Her er trolig igjen *numpy* din venn!

Kommentar: Dette er ikke en nøyaktig måte å regne ut tallet π på.

- b) Plot punktene du har generert og forsøk om du klarer å lage et plot som likner på det i Fig. 1.
- c) Med hvor mange siffrers nøyaktighet greier du å bestemme verdien på π ved å bruke denne metoden?
- d) Da denne øvingen er en smule kort, bør du først fullføre tidligere øvinger om du ikke allerede har gjort det..
- e) Om du har gjort alle sammen, så anbefales det at du velger noen passende oppgaver fra boken til Landtangen (se hjemmesiden) å bryne deg på.