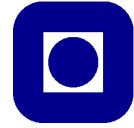


FY1008 Introduksjon til Numerisk Fysikk

Øving 7 Høst 2025

NTNU

Institutt for
fysikk

I denne øvingen vil vi studere andre *ordens ordinære differentiaallikninger*, dvs. likninger som inneholder andre ordens deriverte av en ukjent funksjon. Denne type likninger brukes mye i fysikken, f.eks. i mekanikk der Newtons andre lov kan skrives på denne formen. Newtons andre lov sier at summen av kreftene ($\mathbf{F}$) som virker på et objekt er lik dets masse (m) multiplisert med dets akselerasjon ($\mathbf{a}$), eller $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Siden man per definisjon har $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2$, hvor $\mathbf{v}$ og $\mathbf{r}$ er henholdsvis hastighet og posisjon, følger den ordinære differentiaallikningen, eller på engelsk *the ordinary differential equation* (ODE),

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (1)$$

Ofte vil du se at man i fysikk bruker “dots” over et symbol for å indikere dets tidsderivate. For eksempel, skriver man

$$\dot{\mathbf{r}}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{r}}(t) \equiv \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}, \quad (2)$$

slik at likning (1) kan skrives som

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}, \quad (3a)$$

Videre for å ha en *unik* løsning av likning (3a) må man også angi *initial betingelser* ved et gitt tidspunkt $t = t_0$, også kalt *start betingelser*. Siden ODEen (3a) er av andre orden, må man angi *to* slik betingelser og man skriver

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 \quad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}_0, \quad (3b)$$

hvor $\mathbf{r}_0$ og $\mathbf{v}_0$ er kjente konstante vektorer for posisjon og hastighet. Vanligvis er start betingelsene gitt ved tidspunktet $t_0 = 0$ s. Samlet kalles man hva som er uttrykt via linkingene (3a) og (3b) for inertial verdi problemet (IVP) [engelsk: initial value problem].

I denne øvingen skal vi se på hvordan dere numerisk kan løse mer generelle IVPer av andre orden [se f.eks. likning (3)].

Kommentar: Dessverre har vi ennå ikke dekket dette i forelesningene, men siden dere vil få bruk for dette i prosjektet som nå er startet i emnet FY1010, skal vi starte med dette allerede i denne øvingen. Jeg vil gi en kort introduksjon til dette temaet i begynnelsen på øvingstimen på mandag. En mer grundig introduksjon vil bli gitt siden i forelesningene. Det er bare å beklage at rekkefølgen her ikke er helt optimal. Dog valgte jeg å gjøre det på denne måten da dere vil få bruk for dette for prosjektet i FY1010. Håper på forståelse for dette.

Vi vil starte med å jobbe i en dimensjon hvor den ukjente posisjonen som funksjon av tiden er $r(t)$. La oss anta at den ODEen som denne funksjonen oppfyller kan skrives på den (lineære) formen

$$a\ddot{r} + b\dot{r} + c = 0, \quad (4a)$$

hvor a , b og c er kjente konstanter. Videre så setter vi initialbetingelsene til

$$r(0) = r_0 \qquad \dot{r}(0) = v_0, \qquad (4b)$$

hvor posisjonen r_0 og hastigheten v_0 ved tiden $t_0 = 0$ s er kjente konstanter.

Vi bemerker at ODEen ikke trenger å være lineær, slik som likning (4a), men vi har antatt dette for å illustrere metoden.

For å kunne løse numerisk IVPen gitt av likning (4), er standard prosedyre å først skrive om likning (4a) som et system av to første ordens differentiallikninger. Dette gjøres enklest ved å innføre en ny ukjent funksjon $v(t)$ for hastigheten, som per definisjonen er gitt av $v(t) = dr(t)/dt$. På denne måten kan vi skrive IVPet i likning (4) på formen

$$\dot{r} = v \qquad (5a)$$

$$\dot{v} = -\frac{b}{a}v - \frac{c}{a}, \qquad (5b)$$

med inertial betingelsene

$$r(0) = r_0 \qquad v(0) = v_0. \qquad (5c)$$

Neste steg, noe du garantert vil lære mer om i linear algebra, er å innføre en ny ukjent vektorfunksjon (i to dimensjoner)

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

slik at systemet (5) kan skrives om til et system av første ordens ODEer på formen

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{U}), \qquad (7a)$$

hvor vektorfunksjonen $\mathbf{f}(\cdot)$ er definert som

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} U_2(t) \\ -\frac{b}{a}U_2 - \frac{c}{a} \end{pmatrix}, \qquad (7b)$$

og startbetingelsen er gitt som

$$\mathbf{U}(0) \equiv \mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \qquad (7c)$$

Den ordinære differentiallikningen (7a) er på formen man krever for å løse denne via en funksjonen i *scipy* som heter *scipy.integrate.solve_ivp*. Denne funksjonen er på mange måter arbeidshesten i Python for å løse IVPer.

- a) Studer hjelpefunksjonen for *scipy.integrate.solve_ivp* for å finne ut hvordan du skal bruke denne. Merk deg spesielt eksemplene som som er angitt nederst på denne hjelpesiden. Det er viktig at du forstår disse eksemplene slik at du senere vil være istand til å bruke denne funksjonen for å løse dine IVPer.
- b) For å komme igang med bruk av denne *scipy*-funksjonen, vil vi igjen løse problemet med ballen fra Øving 3. Her starter ballen ved tiden $t = 0$ s fra posisjon $r_0 = 0$ m og med hastighet $v_0 = 5$ m/s (se Øving 3 for detaljer). Løs dette problemet vha *scipy*. Plot posisjonen og hastigheten du finner som funksjon av tiden. I samme grafen, plot også den analytiske løsningen. Stemmer resultatene overens?

- c) Bruk *scipy* til å løse problemet fra Øving 4 hvor ballen også er utsatt for luftmotstand som avhenger av kvadratet av hastigheten. Sammenlign dine resultater med hva du fikk i Øving 4. Plot i samme graf “scipy-resultatene” for posisjon og hastighet, sammen med de tilsvarende resultatene du fikk i Øving 4.

Hvordan blir det om differentiallikningen vår er en vektorlikning, à la likning (3)? Dette vil vi se på nå. For enkelthets skyld, la oss anta at vi er i to dimensjoner. Utvidelsen til høyere dimensjoner er helt tilsvarende. I to dimensjoner skriver vi posisjonsvektoren og hastighetsvektoren som henholdsvis

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

For å kunne bruke rutinen fra *scipy* som vi brukte overfor, må vi skrive differential likningen på formen (7a). Dette betyr at den nye vektoren man innfører blir

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Tilsvarende vil funksjonen på høyresiden i likning (7b) bli en fire-dimensjonal vektorfunksjon.

La oss igjen utforske ballen som starter fra bakkenivå $[\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}m]$ og med en gitt start hastighet

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 = v_0 \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Her er θ_0 vinkelen starthastigheten $\mathbf{v}_0$ danner med den positive vertikale retningen (som er antatt positiv oppover). Dette betyr at

$$\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \cos \theta_0 \\ v_0 \sin \theta_0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Igjen vil vi anta at $v_0 = 5 \text{ m/s}$.

- d) Implementer vektorfunksjonen $\mathbf{f}(t, \mathbf{U})$ for ballen når vi skriver systemet at differentiaallikninger på formen (7a) og $\mathbf{U}(t)$ er gitt av uttrykket i likning (9). Anta at det er kvadratisk luftmotstand. Test din implementasjonen for $\theta_0 = 0^\circ$.
- e) La oss så anta at $\theta_0 = 45^\circ$, dvs at ballen ikke starter med en hastighet rett opp. Plott resultatene for posisjon og hastighet som funksjon av tiden. Plott også ballens bane i xy -planet. Hvor lang til siden kommer ballen? Hvor lang tid tar det før ballen treffer bakken? Hva skjer med disse resultatene om drag koeffisienten øker eller minker? Hvordan blir resultatene dersom $\theta_0 = -0^\circ$? [Positiv retning for vinkelen antar vi til å være med klokken.]

Vi vil nå anta at en konstant sidevind vind blåser fra venstre og at vindhastigheten er gitt ved

$$\mathbf{w} = w_0 \hat{\mathbf{x}}, \quad (12)$$

hvor w_0 er en positiv konstant og $\hat{\mathbf{x}}$ er enhetsvektoren i positiv x -retning. Denne vinden vil gi opphavet til en konstant kraft $\mathbf{F}_w$ som virker på ballen. Denne kraften vil i motsetning til luftmotstanden være rettet langs vindretningen, altså langs $\hat{\mathbf{x}}$ (enhetsvektor langs positiv x -aksen). Dersom vinden er tilstrekkelig kraftig, vil denne kraften også være proporsjonal med vindhastigheten i kvadrat (tilsvarende som for luftmotstanden). Om drag koeffisienten er k , blir kraften

$$\mathbf{F}_w = kw_0^2 \hat{\mathbf{x}}. \quad (13)$$

- f) For denne situasjonen, implementer vektorfunksjonen $\mathbf{f}(t, \mathbf{U})$ for ballen med vind når vi skriver systemet av differentiallikninger på formen (7a) og $\mathbf{U}(t)$ er gitt av uttrykket i likning (9). Anta også her at luftmotstanden er kvadratisk.
- g) Simuler systemet for $\theta_0 = 0^\circ$. Anta at vinden svarer til liten kuling slik at vi kan sette $w_0 = 12 \text{ m/s}$. Hvor lang til venstre fra startpunktet vil ballen lande? Plot banen til ballen i xy -planet. *Tilleggsspørsmål*: Kunne du ha funnet denne verdien fra beregningen du gjorde overfor når det ikke var noe vind?
- h) Gjenta beregningen fra forrige delspørsmål dersom man har (i) $\theta_0 = 45^\circ$ eller (ii) $\theta_0 = -45^\circ$. Plott banene til de to ballen i xy -planen.

Tilleggsoppgaver dersom du føler for det.

- i) Prøv om du kan finne ut om det er mulig å få ballen til å gå rett-opp og rett-ned (dvs. vertikal bevegelse) ved å velge en passende starthastighet $\mathbf{v}_0$ (dvs θ_0 og v_0).

La oss se på tilfellet hvor vindhastigheten ikke er konstant, men istedet varierer i tid. For enkelhets skyld vil vi anta at vindhastigheten endrer seg periodisk med tiden, noe vi skriver som

$$\mathbf{w}(t) = \left[w_0 + w_1 \sin \left(2\pi \frac{t}{T} \right) \right] \hat{\mathbf{x}}, \quad (14)$$

hvor w_1 er en positiv konstant slik at $w_1 < w_0$, og T er vindens periode.

- j) Velg noen passende verdier for w_1 og T og simuler ballens bane som funksjon av tiden for $\theta_0 = \pm 45^\circ$. Studer og plott banen til ballene for ulike verdier av w_1 , T , og θ_0 .