

FY1008 Introduksjon til Numerisk Fysikk

Prosjekt 1 Høst 2025

SIDE 1 AV 4

NTNU



Institutt for
fysikk

Bakgrunn

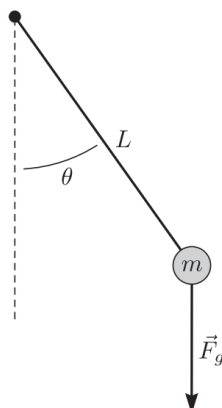
Dette prosjektet er et felles prosjekt mellom emnene FY1010 og FY1008. Man vil over en periode av semesteret jobbe parallelt med dette prosjektet i disse emnene. Tanken er at det analytiske arbeidet primært skal gjennomføres i emnet F1010, mens det numeriske arbeidet skal utføres i FY1008.

Innlevering

Dere skal levere inn deres besvarelse på dette prosjektet. Innlevering skjer via Inspera og dere skal levere inn en Jupiter notebook fil, en ipynb-fil, samt en pdf av denne. Innleveringsfirsten vil jeg komme tilbake til, men mest sannsynlig blir det i siste halvdel av uke 44. Mer detaljer vil komme siden. Dette prosjektet vil telle med i den endelige karakteren i emnet.

Prosjekt

Prosjektet omhandler pendelbevegelse i to dimensjoner (for enkelthets skyld). Dette er et tema som konseptuelt er lett å forstå, men er allikevel ganske rikt. Den første versjonen av systemet består av en masse m , her antatt å være en kule, hengt opp i en masseløs snor (eller streng) av lengde L . Vinkelutslaget fra vertikalretningen av denne massen som funksjon av tiden vil vi betegne som $\theta(t)$. Geometrien som vi vil betrakte er skissert i Fig. 1. Vi antar at vi er på jorden slik at tyngde akselnasjonen er $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$. Videre vil vi for enkelthets skyld anta at massen er $m = 0.1 \text{ kg}$ og snorlengden setter vi til $L = 1 \text{ m}$.



Figur 1: En enkel pendel bestående av en masse m og en snor av lengde L . Massen blir påvirket av gravitasjons kraften $\vec{F}_g$.

Dersom vinkelutslaget, som vi måler i radianer, er lite, kan man gjøre tilnærmingen

$$\sin \theta \approx \theta. \quad (1)$$

Om ikke noe annet er sagt, vil det bli antatt at *startbetingelsene* (angitt ved $t = 0$ s) er

$$\theta(t)|_{t=0} = \theta(0) = \theta_0, \quad (2a)$$

$$\left. \frac{d\theta(t)}{dt} \right|_{t=0} = \dot{\theta}(0) = 0, \quad (2b)$$

hvor θ_0 er en positiv konstant. Størrelsen $\omega(t) = d\theta(t)/dt = \dot{\theta}(t)$ kalles ofte for *vinkelhastigheten* av pendelen (eller massen). Hva startbetingelsen for denne størrelsen betyr er at massen ved $t = 0$ s er i ro.

- a) Utled (eller sett opp) differensiallikningen for vinkel utslaget som $\theta(t)$ oppfyller når vinkelutslaget antas å være lite. Finn løsningen for denne likningen og plot $\theta(t)$ og $\omega(t)$ som funksjoner av tiden for et passende tidsvindu. Plassere disse to plottene slik at de har felles tidsakse og påse at du angir enheter på aksene samt oppgir parametrene du har antatt. Hvordan utvikler den maksimale amplituden til vinkelutslaget seg etterhvert som systemet oscillerer? Hva er perioden til denne pendelen? Vurder om de resultatene du får virker rimelige.
- b) Regn ut og plot kinetisk energi E_K , potensiell energi E_P og total energi $E_T = E_K + E_P$ for systemet.

Vi vil nå anta at massen m også blir utsatt for luftmotstand mens den svinger frem og tilbake. Luftmotstanden vil bli modellert ved å anta den kraften på massen som den gir opphav til er proporsjonal med hastigheten til massen, og vi vil bruke γ til å betegne denne proporsjonalitetskonstanten. Denne konstanten måler styrken til luftmotstanden (dvs. drag kraften) fra mediet massen beveger seg i.

Kommentar: Luftmotstanden kan være både lineær og kvadratisk i hastigheten til objektet (dette siste antok vi i øving 4). Typisk for små hastigheter, eller for små objekter, vil luftmotstanden være lineær i hastigheten. Det er for større hastigheter, og/eller større (ofte irregulære) objekter, slik som en bil, at luftmotstanden er kvadratisk i hastigheten. Her vil vi anta at luftmotstanden er lineær.

- c) For dette tilfellet, sett opp den tilhørende differential likningen og finn dens analytiske løsning (skal være gjort i F1010). Igjen plot $\theta(t)$ og $\omega(t)$ med felles tidsakse for en passende tidsperiode. Hvordan utvikler det maksimale utslaget seg med tiden. For lange tider, hva blir vinkel utslaget? Hva blir “perioden”, dvs. tiden mellom to påfølgende maksimal utslag. Blir denne perioden endret av å inkludere luftmotstanden?
- d) Vi skal nå løse de to foregående delspørsmålene numerisk. Bruk minst to ulike metoder for å finne den numeriske løsningen hvor minst en av metodene er implementert av deg, og minst en er en metode fra fra scipy. Sammenlikn de beregnede løsningen mot de analytiske løsningen du allerede har funnet, samt sammenlign de numeriske løsningene mot hverandre. Hva viser resultatene og hvordan tolker du disse?
- e) Numerisk regn ut og plot kinetisk E_K , potensiell E_P og total energi $E_T = E_K + E_P$ for systemet.

Nå skal vi tillate større vinkel utslag for pendelen slik at vi ikke lenger kan gjøre tilnærmingen vi gjorde i likning (1).

- f) Sett opp den relevante differential likningen som gjelder når vinkelutslaget ikke nødvendigvis er lite og luftmotstand er inkludert. Løs den differential likningen numerisk for vilkårlig stor θ_0 ved å bruke en av metodene du tidligere fant til å gi gode resultater. Hvorfor tror du at den løsningen du fant er den riktige løsningen? Begrunn ditt svar. Studer hvor stor θ_0 tilnærmingavis kan være for at småvinkel tilnærmingen fortsatt er en god antagelse for problemet. Tenk gjennom hva man skal mene med at to løsninger er tilnærmet like. Hvordan vil du kvantisere forskjellen mellom to slike løsningene.
- g) Øk nå gradvis verdien til θ_0 . Hva finner du, og hvordan tolker du disse resultatene?

Vi anta nå følgende initial betingelser

$$\theta(0) = \theta_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad (3a)$$

$$\omega(0) = \omega_0, \quad (3b)$$

hvor $\omega_0 \geq 0$. Dette betyr at pendelen ved $t = 0$ s starter i horisontal posisjonen (og mot venstre) og med en positiv vinkelhastighet ω_0 .

- h) Hva forventer du vil skje når man øker ω_0 ? Prøv deg frem for å finne hvor stor ω_0 minst må være for at pendelen skal snurre helt rundt. Dersom vi kan se bort fra luftmotstanden, kan man estimere hva vinkelhastigheten minst må være. Gjør denne beregningen. Dersom der er luftmotstand, er denne vinkelhastigheten noe større, men hvor mye større? For gitt verdi av γ , bruk koden din til å finne den tilhørende *kritiske* verdien for ω_0 . Hva kan du gjøre om du ønsker å bergene denne verdien direkte?
- i) Anta at $\theta_0 = -\pi/2$ og studer hvor stor den initiale vinkel hastigheten $\omega_0 = d\theta(0)/dt$ må være for at pendelen snurrer helt rundt.

Til nå har vi antatt at massen beveger seg langs en sirkel. Det er derfor vi har brukt vinkel posisjonen $\theta(t)$ til å beskrive posisjonen av massepunktet. Nedenfor vil vi studere et system hvor massepunktet *ikke* nødvendigvis vil bevege seg langs en sirkel bane. I slike situasjoner er det mer hensiktsmessig å beskrive posisjonen av massepunktet m ved hjelp av posisjonsvektoren $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$. Her er $x(t)$ og $y(t)$, henholdsvis x - og y -koordinaten til massepunktet ved tiden t .

- j) Skriv om differensial likningen for $\theta(t)$ til en differential likning for $\mathbf{r}(t)$. Løs denne likningen numerisk for systemet som du løste i foregående delspørsmål og forsikr deg om at løsningen blir den samme som tidligere.

I den siste del av dette prosjektet vil vi erstatte den masseløse snora med en masseløs fjær med fjærkonstant k . Når fjære er i likevekt, dvs. den ikke er utstrakt (eller trykket sammen), har den lengden L , altså den samme lengden som snora hadde. Fjæren oppfyller Hooks lov noe som betyr at fjærkraften som virker på massen er gitt av

$$\mathbf{T} = -k(r - L)\hat{\mathbf{r}}, \quad (4)$$

hvor $r = |\mathbf{r}|$ er lengden til fjæren, $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ er enhets vektoren (lengde 1) i radiell retning, og origo for koordinat systemet som man bruker er valgt til å være i opphengpunktet. For enkelhets skyld vil vi anta at fjæren ikke lar seg bøye, men kan bare forlenges/presses sammen i radiell retning. Derfor vil all bevegelse skjer i ett og samme plan. Dog, vil ikke massen nødvendigvis i dette tilfellet bevege seg langs en sirkel bane. Derfor, er det bedre å beskrive bevegelsen til posisjonen til masse punkt med vektoren $\mathbf{r}$ på samme måte som du gjorde i

foregående delspørsmål nemlig med x - og y -koordinatene. Vel, i dette tilfellet er det faktisk mer hensiktsmessig å bruke polar koordinater slik at man bruker $r(t)$ og $\theta(t)$ til å beskrive posisjonensvektoren $\mathbf{r}(t)$ av massen. Det kan vises at den relevante koplede differential likningen som beskriver dette systemet er (ingen luftmotstand er antatt her)

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{k}{m}(r - L) + g \cos \theta, \quad (5a)$$

$$r\ddot{\theta} = -2\dot{r}\dot{\theta} - g \sin \theta. \quad (5b)$$

Dette settet av koplede (og ikke lineære) differential likninger er *bevegelseslikningene* for systemet som vi studerer. Det ser ganske fryktinngytende ut, spesielt når du ikke blir presentert for hvordan det utledes. Opprinnelig var det mening at dere skulle utlede disse likningen i FY1010, men dette viser seg at ikke vil bli gjort. Derfor har jeg *bare* gitt dere likningssettet. Å løse dette settet av likninger analytiske er langt utenfor hva som kan forventes. . . ; det er ei heller mulig så langt jeg vet. Det som derimot er *mulig*, er å løse problemet numerisk med den kunnskapen dere har. Dette faktumet viser at selv i deres første semester av fysikk studiet kan dere studere relativt kompliserte fysiske systemer dersom dere behersker bruken av numeriske beregninger.

k) (utgår) Utled differential ligning for posisjonen til masse punktet $\mathbf{r}(t)$.

- l) For å få en føling med om likningssystemet virker rimelig, ber jeg dere å se på den analytiske grensen hvor (1) $x(t) = 0$ og (2) $\theta(t) = 0$. Hvordan tolker du disse resultatene og er de rimelige?
- m) For å kunne bruke f.eks. *scipy* til å løse systemet i likning (5) må det skrives om til et sett av første ordens ODEer. Gjør dette og skriv det omformede systemet matriseformen

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}).$$

Angi hvordan du har definert vektoren $\mathbf{y}(t)$ og matrisen $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$. Skriv en python rutine for beregning av $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$.

- n) Løs denne differential likningen (5) for startbetingelsene i likning (2) med $\theta_0 = \pi/3$ og for ulike verdier av fjærkonstanten k . Anta at fjæren ikke er utstrakt ved tiden $t = 0$ s. Med felles tidsakse, plot størrelsene $r(t)$, $\theta(t)$, $\dot{r}(t)$ og $\dot{\theta}(t)$ mot tiden t .

For eksempel kan du bruke fjærkonstantene

1. $k = 2 \times 10^6$ N/m
2. $k = 2000$ N/m
3. $k = 200$ N/m
4. $k = 20$ N/m

Virker resultatene du får rimelige? Begrunn ditt svar!

Tips: Om man kan ser bort fra luftmotstanden, skal energien til systemet være bevart. Er dette tilfellet?

- o) Prøv å lage figurer som er velegnet til å illustrere bevegelsen til massepunktet. Her må du gjerne være kreativ. En mulighet er å presenterer $r(t)$ mot $\theta(t)$ i samme plot.