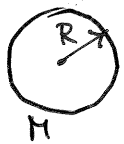
Tre eksempler på beregning av treghetsmoment

(i) Ring: (sykkehjul)



"All" masse i periferien
Omdreining om sentrum

$$I = MR^2$$

(ii) Massiv sylinder (slipestein)

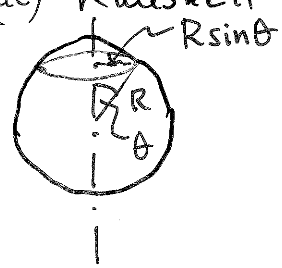
Sylinder-lengde L.

$$I = \int_V d^3r\, \rho \cdot r_\perp^2 = \rho L \int d^2r\, r^2 = \rho L \int_0^R 2\pi r dr \cdot r^2$$

$$= 2\pi\rho L \frac{R^4}{4} \quad ; \quad M = \pi R^2 L \rho$$

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

(iii) Kuleskall



$$M = 4\pi R^2 \cdot \rho$$

$$I = \rho \int_0^\pi R d\theta \cdot 2\pi R \sin\theta \cdot (R\sin\theta)^2$$

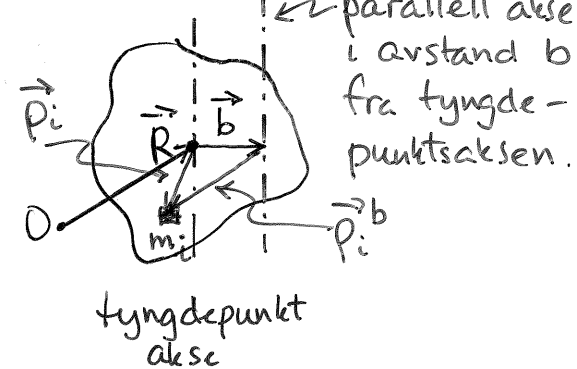
$$= 2\pi R^4 \rho \int_0^\pi \underbrace{d\theta \sin\theta}_{-d\cos\theta = -dx} (1 - \cos^2\theta)$$

$$= 2\pi R^4 \rho \cdot \underbrace{\int_{-1}^{1} dx (1 - x^2)}_{2(1-\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}}$$

$$I = \frac{2}{3} MR^2$$

Steiners sats (eller: parallellakseteoremet)

? Hva er treghetsmomentet til et (vilkårlig) legeme relativt en omdreiningsakse parallell med aksen gjennom tyngdepunktet?



Når m_i's posisjon relativt tyngde-punktet er $\vec{\rho}_i$, må posisjonen relativt $\vec{R}+\vec{b}$ være

$$\vec{\rho}_i^{\,b} = \vec{\rho}_i - \vec{b}$$

Pr definisjon blir da treghetsmomentet relativt rotasjon om aksen gjennom $\vec{R}+\vec{b}$

$$I = \sum_i m_i \rho_{i\perp}^{b\,2} = \sum_i m_i (\vec{\rho}_{i\perp} - \vec{b})_\perp^2$$

$$= \sum_i m_i \left(\rho_{i\perp}^2 + b^2 - 2\vec{\rho}_{i\perp} \cdot \vec{b}\right)$$

Men $\sum_i m_i \rho_{i\perp}^2 = I_0$, $\sum_i m_i b^2 = Mb^2$ og

$$\sum_i m_i \vec{\rho}_{i\perp} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \sum_i m_i \vec{\rho}_{i\perp} \equiv 0$$

siden definisjonen av tyngdepktet er $M\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}_i$.

Altså

$$\boxed{I = I_0 + Mb^2}$$

"Steiners sats"

Rulling på skråplan (1)

Vi minner om N2 for tyngdepunktsbevegelsen

Total ytre kraft på stivt legeme med masse $M=\sum_i m_i$

$\vec F = \sum_i \vec F_i$ der $\vec F_i$ er den ytre kraft som virker på masseelementet m_i

$$\vec F = \sum_i \vec F_i = \sum_i m_i \frac{d^2\vec r_i}{dt^2} \underset{\text{når } m_i \text{ er konstante}}{=} \frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i \vec r_i = \frac{d^2}{dt^2} M\vec R$$

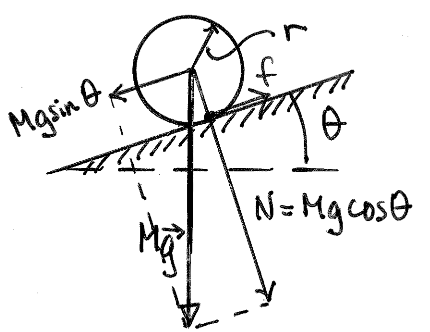
der siste ligning er definisjonen av tyngdepunktets (=massemiddelpunktets) posisjonsvektor, $\vec R$.

Altså
$$\boxed{\vec F = M\frac{d^2\vec R}{dt^2}}$$

Tyngdepunktets bevegelse er gitt av N2 for translasjon, uansett relativbevegelse (som rotasjon) om tyngdepunktet.*

Derved kan en sammensatt bevegelse, som rulling av en sylinder nedover et skråplan, analyseres som (i) Lineær akselerasjon av tyngdepunktet parallelt med skråplanet. (ii) Rotasjon av sylinderen rundt sylinderaksen gjennom tyngdepunktet.

*Her har vi stilltiende antatt at de ytre kreftene $\vec F_i$ på m_i ikke avhenger av legemets orientering. Dersom luftmotstand er viktig, avhenger den av orienteringen!



Ved rulling nedover skråplanet parallellforskyves rotasjonsaksen gjennom tyngdepunktet. Rotasjonsaksens retning er konstant under bevegelsen. Vi har to ukjente, som vi kan velge som friksjonskraften f og tyngdepunktets hastighet, V

N2 for translasjon:

$$Mg\sin\theta - f = M\frac{dV}{dt}$$

N2 for rotasjon:

$$\tau = fr = I_0\frac{d\omega}{dt} \underset{\text{"ren rulling": } V = r\omega}{=} I_0 \frac{1}{r} \frac{dV}{dt}$$

To lign. med to ukjente

Eliminasjon av f gir

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g\sin\theta}{1+(I_0/Mr^2)}$$

som innsatt i ligningen for f gir

$$f = \frac{mg\sin\theta}{1+(Mr^2/I_0)}$$

Betingelsen for at vi får ren rulling, dvs at sylinderen ikke glir på underlaget, er $f\le\mu_s N$, eller

$$\frac{mg\sin\theta}{1+(Mr^2/I_0)} \le \mu_s mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\theta \le \mu_s\left(1+\frac{Mr^2}{I_0}\right)}$$

Sylinder $I_0=\frac{1}{2}Mr^2$

Kule $I_0=\frac{2}{5}Mr^2$

Kuleskall $I_0=\frac{2}{3}Mr^2$

etc.

Energien til et stivt legeme i bevegelse

Den kinetiske energien til et system av partikler er

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

La oss innføre tyngdepunktskoordinater

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{\rho}_i \quad (\vec{\rho}_i\text{: posisjonen til } m_i \text{ relativt tyngdepunktet})$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{\rho}}_i = \vec{V} + \vec{u}_i$$

Da er $\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{V}+\vec{u}_i)\cdot(\vec{V}+\vec{u}_i)$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[V^2 + u_i^2 + 2\vec{V}\cdot\vec{u}_i\right]$$

Men $\sum_i m_i \vec{V}\cdot\vec{u}_i = \vec{V}\cdot\sum_i m_i \vec{u}_i = \vec{V}\cdot\frac{d}{dt}\underbrace{\sum_i m_i \vec{\rho}_i}_{\equiv 0 \text{ pr def t.p.}} = 0$

Altså:

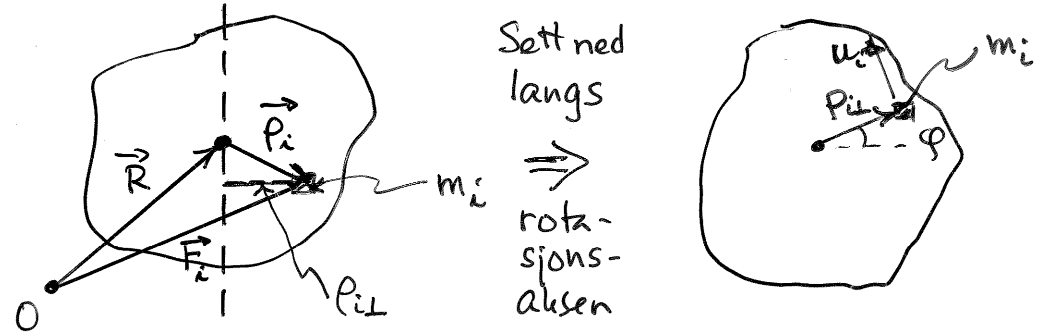
$$\boxed{K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i u_i^2}$$

energi i tyngdepunktets bevegelse ↑

↑ energi knyttet til relativbevegelsen i forhold til tyngdepunktet (rotasjon, vibrasjon, ···)

(Mer om rotasjon i kap. 9&10)

Total kinetisk energi når relativbevegelsen er rotasjon



Når relativbevegelsen i forhold til tyngdepunktet skyldes rotasjon rundt en akse gjennom tyngdepunktet, viser figuren til høyre at relativfarten til masseelementet m_i er gitt som

$$u_i = \rho_{i\perp}\omega$$

der ω er rotasjonens vinkelhastighet, $\omega = \dot{\varphi}$.

Derved:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i u_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \rho_{i\perp}^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

(der $I = I_0$ understreker at det dreier seg om treghetsmomentet om en akse gjennom t.p.)

Alt i alt blir den kinetiske energien

$$\boxed{K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2}$$

translasjon ↑ ↑ rotasjon