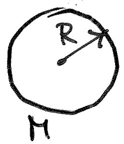
Tre eksempler på beregning av treghetsmoment

(i) Ring:
(sykkehjul)



"All" masse i periferien
Omdreining om sentrum

$$I = MR^2$$

(ii) Massiv sylinder
(slipestein)

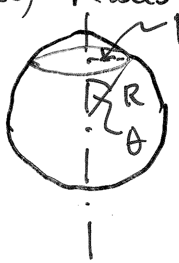
Sylinder-
lengde L.

$$I = \int_V d^3r\, \rho \cdot r_\perp^2 = \rho L \int d^2r\, r^2 = \rho L \int_0^R 2\pi r\,dr \cdot r^2$$

$$= 2\pi\rho L \frac{R^4}{4} \quad ; \quad M = \pi R^2 L \rho$$

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

(iii) Kuleskall



$M = 4\pi R^2 \cdot \rho$

$$I = \rho \int_0^\pi R\,d\theta \cdot 2\pi R\sin\theta \cdot (R\sin\theta)^2$$

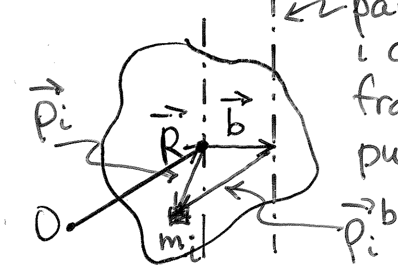
$$= 2\pi R^4 \rho \int_0^\pi \underbrace{d\theta \sin\theta}_{-d\cos\theta \,=\, -dx} (1-\cos^2\theta)$$

$$= 2\pi R^4 \rho \cdot \underbrace{\int_{-1}^{1} dx\,(1-x^2)}_{2(1-\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}}$$

$$I = \frac{2}{3} MR^2$$

Steiners sats (eller: parallellakseteoremet)

? Hva er treghetsmomentet til et (vilkårlig) legeme relativt en omdreinings akse parallell med aksen gjennom tyngdepunktet?



parallell akse i avstand b fra tyngde-punktsaksen.

tyngdepunkt akse

Når m_i's posisjon relativt tyngde-punktet er $\vec{p}_i$, må posisjonen relativt $\vec{R}+\vec{b}$ være

$$\vec{p}_i^{\,b} = \vec{p}_i - \vec{b}$$

Pr definisjon blir da treghetsmomentet relativt rotasjon om aksen gjennom $\vec{R}+\vec{b}$

$$I = \sum_i m_i p_{i\perp}^{b\,2} = \sum_i m_i \left(\vec{p}_{i\perp} - \vec{b}\right)_\perp^2$$

$$= \sum_i m_i \left(p_{i\perp}^2 + b^2 - 2\vec{p}_{i\perp}\cdot\vec{b}\right)$$

Men $\sum_i m_i p_{i\perp}^2 = I_0$, $\sum_i m_i b^2 = Mb^2$ og

$$\sum_i m_i \vec{p}_{i\perp}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\sum_i m_i \vec{p}_{i\perp} \equiv 0$$

siden definisjonen av tyngdepktet er $M\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}_i$.

Altså

$$\boxed{I = I_0 + Mb^2}$$

"Steiners sats"

Rulling på skråplan (1)

Vi minner om N2 for tyngdepunktsbevegelsen
Total ytre kraft på stivt legeme med masse $M=\sum_i m_i$

$$\vec F = \sum_i \vec F_i$$ der $\vec F_i$ er den ytre kraft som virker på masseelementet m_i

$$\vec F = \sum_i \vec F_i = \sum_i m_i \frac{d^2\vec r_i}{dt^2} \underset{\text{når } m_i \text{ er konstante}}{=} \frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i \vec r_i = \frac{d^2}{dt^2} M\vec R$$

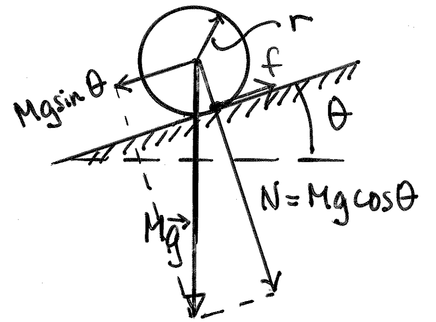
der siste ligning er definisjonen av tyngdepunktets (=massemiddelpunktets) posisjonsvektor, $\vec R$.
Altså

$$\boxed{\vec F = M\frac{d^2\vec R}{dt^2}}$$

Tyngdepunktets bevegelse er gitt av N2 for translasjon, uansett relativbevegelse (som rotasjon) om tyngdepunktet.*

Derved kan en sammensatt bevegelse, som rulling av en sylinder nedover et skråplan, analyseres som (i) Lineær akselerasjon av tyngdepunktet parallelt med skråplanet. (ii) Rotasjon av sylinderen rundt sylinderaksen gjennom tyngdepunktet.

*Her har vi stilltiende antatt at de ytre kreftene $\vec F_i$ på m_i ikke avhenger av legemets orientering. Dersom luftmotstand er viktig, avhenger den av orienteringen!



Ved rulling nedover skråplanet parallellforskyves rotasjonsaksen gjennom tyngdepunktet. Rotasjonsaksens retning er konstant under bevegelsen. Vi har to ukjente, som vi kan velge som friksjonskraften f og tyngdepunktets hastighet, V

N2 for translasjon:

$$Mg\sin\theta - f = M\frac{dV}{dt}$$

N2 for rotasjon:

$$\tau = fr = I_0\frac{d\omega}{dt} \underset{\text{"ren rulling": } V = r\omega}{=} I_0 \frac{1}{r}\frac{dV}{dt}$$

To lign. med to ukjente

Eliminasjon av f gir

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g\sin\theta}{1+(I_0/Mr^2)}$$

som innsatt i ligningen for f gir

$$f = \frac{mg\sin\theta}{1+(Mr^2/I_0)}$$

Betingelsen for at vi får ren rulling, dvs at sylinderen ikke glir på underlaget, er $f\le\mu_s N$, eller

$$\frac{mg\sin\theta}{1+(Mr^2/I_0)} \le \mu_s mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tan\theta \le \mu_s\left(1+\frac{Mr^2}{I_0}\right)}$$

Sylinder $I_0=\frac{1}{2}Mr^2$
Kule $I_0=\frac{2}{5}Mr^2$
Kuleskall $I_0=\frac{2}{3}Mr^2$
etc.

Energien til et stivt legeme i bevegelse

Den kinetiske energien til et system av partikler er

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

La oss innføre tyngdepunktskoordinater

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{\rho}_i \quad (\vec{\rho}_i: \text{posisjonen til } m_i \text{ relativt tyngdepunktet})$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{\rho}}_i = \vec{V} + \vec{u}_i$$

Da er
$$\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{V}+\vec{u}_i)\cdot(\vec{V}+\vec{u}_i)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[V^2 + u_i^2 + 2\vec{V}\cdot\vec{u}_i\right]$$

Men
$$\sum_i m_i \vec{V}\cdot\vec{u}_i = \vec{V}\cdot\sum_i m_i\vec{u}_i = \vec{V}\cdot\frac{d}{dt}\underbrace{\sum_i m_i\vec{\rho}_i}_{\equiv 0 \text{ pr def t.p.}} = 0$$

Altså:

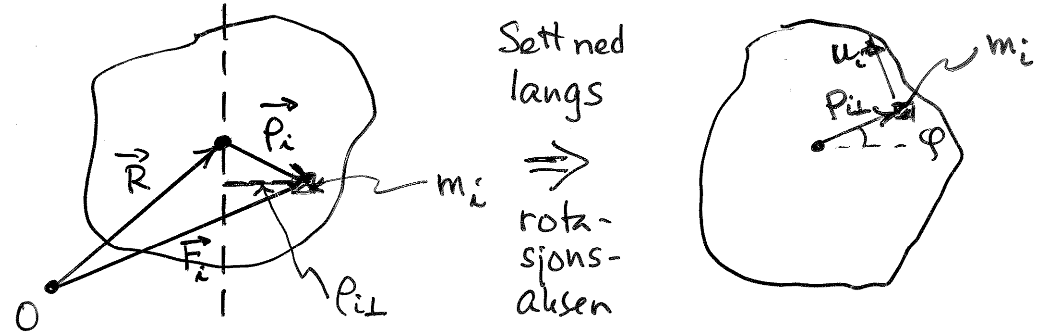
$$\boxed{K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i u_i^2}$$

energi i tyngdepunktets bevegelse

energi knyttet til relativbevegelsen i forhold til tyngdepunktet (rotasjon, vibrasjon, ⋯)

(Mer om rotasjon i kap. 9 & 10)

Total kinetisk energi når relativbevegelsen er rotasjon



Når relativbevegelsen i forhold til tyngdepunktet skyldes rotasjon rundt en akse gjennom tyngdepunktet, viser figuren til høyre at relativfarten til masseelementet m_i er gitt som

$$u_i = \rho_{i\perp}\omega$$

der ω er rotasjonens vinkelhastighet, $\omega = \dot{\varphi}$.

Derved:

$$\sum_i \frac{1}{2}m_i u_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \rho_{i\perp}^2\,\omega^2 = \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

(der $I = I_0$ understreker at det dreier seg om treghetsmomentet om en akse gjennom t.p.)

Alt i alt blir den kinetiske energien

$$\boxed{K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2}$$

translasjon   rotasjon

Rotasjon i 3 dimensjoner: Vektorer!

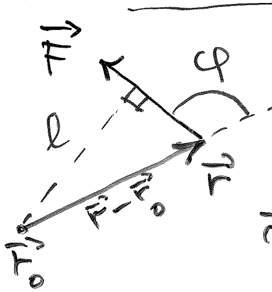
Så langt har vi bare sett på rotasjon om en akse med fast retning, enten aksen er fast montert som i en roterende maskindel, eller parallellforskyves som når en sylinder ruller nedover et skråplan med rotasjonsaksen vinkelrett på bevegelsen. For å komme videre må vi ta rotasjonsbevegelsers vektor-natur på alvor.

Først: Dreiemomentet

Den grunnleggende definisjonen av dreie-moment-vektoren er

$$\boxed{\vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}}$$ vektorprodukt!

Her angriper kraften $\vec{F}$ i punktet $\vec{r}$ og $\vec{\tau}$ er da kraftens dreiemoment relativt referansepunktet $\vec{r}_0$



$$|\vec{\tau}| = \underbrace{|\vec{r}-\vec{r}_0|\sin\varphi}_{l=\text{"arm"}} \, \underbrace{|\vec{F}|}_{\text{Kraft}}$$

$\vec{\tau}$ er vinkelrett på $\vec{r}-\vec{r}_0$ & $\vec{F}$, peker ut av papirplanet her

Referansepunktet kan ligge på omdreiningsaksen, men ikke nødvendigvis. Vi kan selv bestemme hvor vi velger referansepunktet, men $\vec{\tau}$ er alltid definert relativt et referansepunkt. Valget av $\vec{r}_0$ er et spørsmål om hensiktsmessighet. Skriver vi

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

har vi valgt $\vec{r}_0 = 0$!

Med mange krefter $\vec{F}_i$ som virker på hvert sitt masseelement i et stivt legeme generaliseres definisjonen av $\vec{\tau}$ umiddelbart til

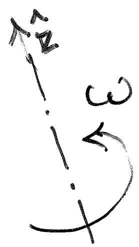
$$\boxed{\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_i}$$

Referansepunktet $\vec{r}_0$ er felles!

Når $\vec{\tau}$, dreiemomentet, er en vektor må tilsvarende vinkelhastigheten ω oppfattes som vektoren $\vec{\omega}$, pekende langs omdreiningsaksen. For et sylinder-symmetrisk legeme som roterer rundt symmetriaksen og har treghetsmomentet I_0 om denne aksen er da (se side 32)

$$\vec{\tau} = I_0 \dot{\vec{\omega}} = I_0 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_0 \hat{\omega} \frac{d\omega}{dt}$$

Med rotasjons-aksen i z-retning vil rotasjonen foregå i xy-planet. En positiv τ_z vil da gi en positiv $\dot{\vec{\omega}}\cdot\hat{z}$, altså: En økende vinkelhastighet <u>mot klokka</u>



$$\vec{\tau} = I_0\dot{\vec{\omega}}$$

$$\tau_z = I_0\dot{\omega}_z \Leftrightarrow \tau = I_0\dot{\omega}$$

Så langt har vi begrenset oss til rotasjon om en fast akse, og da har "Newtons 2. lov" for rotasjon den enkle formen $\tau = I_0\omega$. Men når vi nå vil generalisere til en vilkårlig bevegelse sammensatt av tyngdepunktsbevegelsen pluss rotasjon rundt en akse gjennom tyngdepunktet, trenger vi en generalisering av $I_0\omega$ som i dette spesielle tilfellet er analogien til "bevegelsesmengde" (eller "impuls"):

N2: $$\underbrace{F = \dot{p} = \frac{d}{dt}(mv)}_{\text{translasjon}} \Leftrightarrow \underbrace{\tau = \frac{d}{dt}(I_0\omega)}_{\text{rotasjon}}$$

Altså, for translasjon

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{\tau} = \frac{d}{dt}(??)$$

Formelt er svaret enkelt

For én partikkel ("punktpartikkel")

$$\boxed{\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_0)\times\vec{p}}$$

Dreieimpuls, angulært momentum, totalt <u>spinn</u>

Bevis: (når referansepunktet holdes fast)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = (\dot{\vec{r}} - \underbrace{\dot{\vec{r}}_0}_{=0})\times\vec{p} + (\vec{r} - \vec{r}_0)\times\underbrace{\dot{\vec{p}}}_{=\vec{F}\ (N2)}$$

Men $\dot{\vec{r}}\times\vec{p} = m\,\vec{v}\times\vec{v} \equiv 0$, slik at

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = (\vec{r} - \vec{r}_0)\times\vec{F} = \vec{\tau} \quad !$$

For et stivt legeme som består av masse-elementene m_i generaliserer dette umiddelbart til

$$\boxed{\vec{L} = \sum_i(\vec{r}_i - \vec{r}_0)\times\vec{p}_i = \sum_i m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_0)\times\vec{v}_i}$$

og vi har de formelle analogiene (vektorielt!)

$$\underbrace{\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v}_i}_{\text{translasjon}} \Leftrightarrow \underbrace{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}_{\text{rotasjon}} =$$

Merk at $\vec{L}$, i likhet med $\vec{\tau}$, er def. relativt $\overset{\text{valgt referansepkt.}}{\underline{\underline{\vec{r}_0}}}$

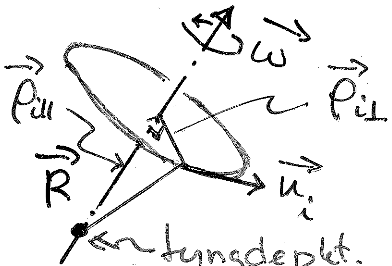
Av denne relasjonen følger en konserveringslov:

$$\boxed{\text{Dersom } \vec{\tau}=\sum_i \vec{\tau}_i = 0 \text{ er } \vec{L} \text{ en bevegelseskonst.}}$$

I likhet med konserveringsloven for bevegelsesmengde ($\vec{F}=0$ gir $\vec{P}=$konst.), er denne <u>konserveringsloven</u> for <u>spinn</u> (eller total dreieimpuls) en grunnleggende viktig (og nyttig!) bevarelsesetning i mange sammenhenger.

Men vi trenger mer håndfaste uttrykk for $\vec{L}$ for stive legemer!

Først: Kinematikk ved rotasjon om akse gjennom tyngdepunktet:



$$\vec{u}_i = \vec{\omega}\times\vec{\rho}_i = \vec{\omega}\times\vec{\rho}_{i\perp}$$

$$u_i = \omega\rho_{i\perp} \qquad (\sim v=\omega r)$$

Så: Matematisk identitet:

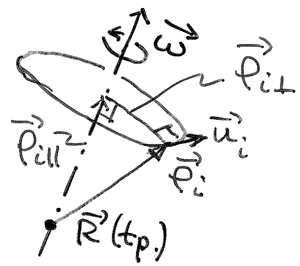
$$\boxed{\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})}$$

Utfordring: Bevis den ut fra definisjonen av vektorproduktet

<u>Spinnet for et stivt legeme med translasjon og rotasjon</u>

Vi velger $\vec{r}_0=0$, dvs. vi legger origo i vårt referansepunkt. Legemets tyngdepunkt er i $\vec{R}(t)$, og har hastigheten $\vec{V}(t)=\dot{\vec{R}}(t)$. Legemet roterer med vinkelhastigheten $\vec{\omega}(t)$ om en akse gjennom tyngdepunktet.

Masseelementet m_i er lokalisert ved $\vec{r}_i(t)=\vec{R}(t)+\vec{\rho}_i(t)$ med hastighet $\vec{v}_i(t)=\dot{\vec{r}}_i(t)=\vec{V}(t)+\vec{u}_i(t)$, der $\vec{u}_i=\dot{\vec{\rho}}_i$.



Når legemet roterer rundt en akse gjennom tyngdepunktet har vi

$$\vec{u}_i=\vec{\omega}\times\vec{\rho}_i=\vec{\omega}\times\vec{\rho}_{i\perp}$$

Her er $\vec{\rho}_i=\vec{\rho}_{i\parallel}+\vec{\rho}_{i\perp}=\hat{\omega}\rho_{i\parallel}+\vec{\rho}_{i\perp}$

Definisjonen av $\vec{L}$ for stive legemer gir:

$$\vec{L}=\sum_i m_i(\vec{r}_i\times\vec{v}_i)=\sum_i m_i[(\vec{R}+\vec{\rho}_i)\times(\vec{V}+\vec{u}_i)]$$

$$=\sum_i m_i\left[\vec{R}\times\vec{V}+\vec{R}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_i)+\vec{\rho}_i\times\vec{V}+\vec{\rho}_i\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_i)\right]$$

Siden pr def av t.p. $\sum_i m_i\vec{\rho}_i=0$ og $\vec{R}$, $\vec{\omega}$ og $\vec{V}$ kan settes utenfor summasjonstegnet, er de to midterste leddene lik <u>null</u>. Altså:

$$\vec{L}=M\vec{R}\times\vec{V}+\sum_i m_i\left[\vec{\omega}\rho_i^2-\vec{\rho}_i(\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}_i)\right]$$

$$= \text{—''—} + \sum_i m_i\left[\vec{\omega}(\rho_i^2-\rho_{i\parallel}^2)-\vec{\rho}_{i\perp}(\vec{\omega}\cdot\vec{\rho}_i)\right]$$

Her er $\rho_i^2 - \rho_{i\parallel}^2 = \rho_{i\perp}^2$, og derved blir den første summen:

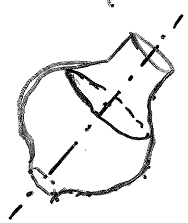
$$\sum_i m_i \vec{\omega}\left(\rho_i^2 - \rho_{i\parallel}^2\right) = \vec{\omega} \sum_i m_i \rho_{i\perp}^2 = \vec{\omega}\, I_0$$

Alt i alt:

$$\vec{L} = M\vec{R}\times\vec{V} + I_0\vec{\omega} - \omega \sum_i m_i \rho_{i\parallel} \vec{\rho_{i\perp}}$$

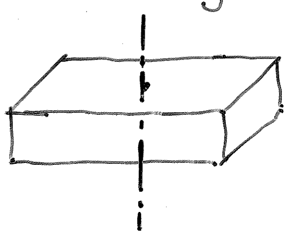
De to første leddene er enkle og gjenkjennelige, men det 3dje? I dette kurset skal vi begrense oss til objekter som er tilstrekkelig symmetriske til at siste ledd er null.

Ex 1: Sylindersymmetri



For gitt $\rho_{i\parallel}$ og m_i vil $\sum_i \vec{\rho_{i\perp}} = 0$ pga symmetrien

Ex 2: Rektangulær symmetri



Med konstant massetetthet og gitt $\rho_{i\parallel}$ vil også her $\sum_i \vec{\rho_{i\perp}} = 0$

Merk: Begge eksemplene forutsetter at omdreiningsaksen er langs en symmetriakse!

Vi skal altså her begrense oss til tilfeller der det totale spinnet kan skrives som

$$\boxed{\vec{L} = M\vec{R}\times\vec{V} + I_0\vec{\omega}}$$

banespinn   egenspinn

[Men det er viktig å være klar over at leddet vi satte lik null er helt avgjørende i mange sammenhenger. En formel-1 bil som knuffer borti noe og slynges opp i luften vil ikke rotere pent og pyntelig om en (ikke-eksisterende i det tilfellet!) symmetriakse, $\vec{\omega}$ vil endre retning underveis etc. Alt dette kan bare forstås med det leddet vi sløyfet her. Tilsvarende for en snurrebass av typen som har en tendens til å snu seg opp-ned, til posisjonen under rotasjonen.

Kort sagt: Der er flere rotasjonsfenomener mellom himmel og jord enn dem vi drømmer konstruktivt om i dette kurset!]

$$\boxed{\text{Rotasjon i xy-planet: } \tau_z = \frac{dL_z}{dt} = M\frac{d}{dt}\left(\vec{R}\times\vec{V}\right)_z + I_0\dot{\omega}_z}$$