Rotasjon i 3 dimensjoner: Vektorer!

Så langt har vi bare sett på rotasjon om en akse med fast retning, enten aksen er fast montert som i en roterende maskindel, eller parallellforskyves som når en sylinder ruller nedover et skråplan med rotasjonsaksen vinkelrett på bevegelsen. For å komme videre må vi ta rotasjonsbevegelsers vektor-natur på alvor.

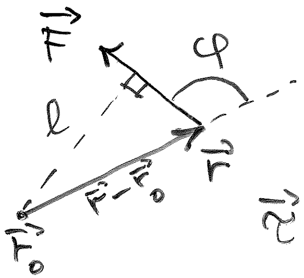
Først: Dreiemomentet

Den grunnleggende definisjonen av dreie-moment-vektoren er

$$\boxed{\vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}}$$

vektorprodukt!

Her angriper kraften $\vec{F}$ i punktet $\vec{r}$ og $\vec{\tau}$ er da kraftens dreiemoment relativt referansepunktet $\vec{r}_0$



$$|\vec{\tau}| = \underbrace{|\vec{r}-\vec{r}_0|\sin\varphi}_{l=\text{"arm"}}\,|\vec{F}|$$

Kraft

$\vec{\tau}$ er vinkelrett på $\vec{r}-\vec{r}_0$ & $\vec{F}$, peker ut av papirplanet her

Referansepunktet kan ligge på omdreiningsaksen, men ikke nødvendigvis. Vi kan selv bestemme hvor vi velger referansepunktet, men $\vec{\tau}$ er alltid definert relativt et referansepunkt. Valget av $\vec{r}_0$ er et spørsmål om hensiktsmessighet. Skriver vi

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

har vi valgt $\vec{r}_0 = 0$!

Med mange krefter $\vec{F}_i$ som virker på hvert sitt masseelement i et stivt legeme generaliseres definisjonen av $\vec{\tau}$ umiddelbart til

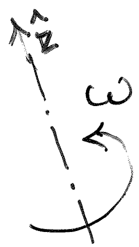
$$\boxed{\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_i}$$

Referansepunktet $\vec{r}_0$ er felles!

Når $\vec{\tau}$, dreiemomentet, er en vektor må tilsvarende vinkelhastigheten ω oppfattes som vektoren $\vec{\omega}$, pekende langs omdreiningsaksen. For et sylinder-symmetrisk legeme som roterer rundt symmetriaksen og har treghetsmomentet I_0 om denne aksen er da (se side 32)

$$\vec{\tau} = I_0 \dot{\vec{\omega}} = I_0 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_0 \hat{\omega} \frac{d\omega}{dt}$$

Med rotasjons-aksen i z-retning vil rotasjonen foregå i xy-planet. En positiv τ_z vil da gi en positiv $\dot{\vec{\omega}}\cdot\hat{z}$, altså: En økende vinkelhastighet mot klokka



$$\vec{\tau} = I_0 \dot{\vec{\omega}}$$

$$\tau_z = I_0 \dot{\omega}_z \Leftrightarrow \tau = I_0 \dot{\omega}$$

Så langt har vi begrenset oss til rotasjon om en fast akse, og da har "Newtons 2. lov" for rotasjon den enkle formen $\tau = I_0\dot{\omega}$. Men når vi nå vil generalisere til en vilkårlig bevegelse sammensatt av tyngdepunktsbevegelsen pluss rotasjon rundt en akse gjennom tyngdepunktet, trenger vi en generalisering av $I_0\omega$ som i dette spesielle tilfellet er analogien til "bevegelsesmengde" (eller "impuls"):

N2: $\underbrace{F = \dot{p} = \frac{d}{dt}(mv)}_{\text{translasjon}} \Leftrightarrow \underbrace{\tau = \frac{d}{dt}(I_0\omega)}_{\text{rotasjon}}$

Altså, for translasjon

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{\tau} = \frac{d}{dt}(??)$$

Formelt er svaret enkelt

For én partikkel ("punktpartikkel")

$$\boxed{\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_0)\times\vec{p}}$$

Dreieimpuls, angulært momentum, totalt spinn

Bevis: (når referansepunktet holdes fast)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = (\dot{\vec{r}} - \underbrace{\dot{\vec{r}}_0}_{=0})\times\vec{p} + (\vec{r} - \vec{r}_0)\times\underbrace{\dot{\vec{p}}}_{=\vec{F}\ (N2)}$$

Men $\dot{\vec{r}}\times\vec{p} = m\,\vec{v}\times\vec{v} \equiv 0$, slik at

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = (\vec{r} - \vec{r}_0)\times\vec{F} = \vec{\tau} \quad !$$

For et stivt legeme som består av masse-elementene m_i generaliserer dette umiddelbart til

$$\boxed{\vec{L} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0)\times\vec{p}_i = \sum_i m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_0)\times\vec{v}_i}$$

og vi har de formelle analogiene (vektorielt!)

$$\overbrace{\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v}_i}^{\text{translasjon}} \Leftrightarrow \overbrace{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}^{\text{rotasjon}} =$$

Merk at $\vec{L}$, i likhet med $\vec{\tau}$, er def. relativt $\underline{\underline{\vec{r}_0}}$ (valgt referansepkt.)

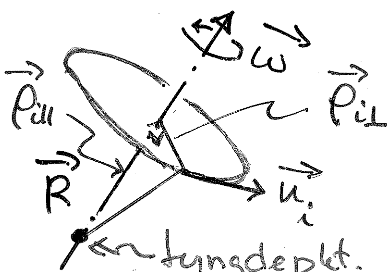
Av denne relasjonen følger en konserveringslov:

$$\boxed{\text{Dersom } \vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = 0 \text{ er } \vec{L} \text{ en bevegelseskonst.}}$$

I likhet med konserveringsloven for bevegelsesmengde ($\vec{F}=0$ gir $\vec{P}=$konst.), er denne konserveringsloven for spinn (eller total dreieimpuls) en grunnleggende viktig (Og nyttig!) bevarelsesetning i mange sammenhenger.

Men vi trenger mer håndfaste uttrykk for $\vec{L}$ for stive legemer!

Først: Kinematikk ved rotasjon om akse gjennom tyngdepunktet:



$$\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{i\perp}$$

$$u_i = \omega \rho_{i\perp} \qquad (\sim v = \omega r)$$

Så: Matematisk identitet:

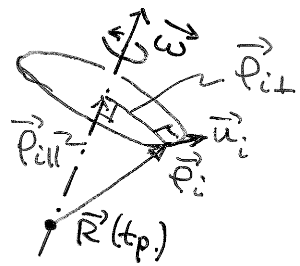
$$\boxed{\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})}$$

Utfordring: Bevis den ut fra definisjonen av vektorproduktet

Spinnet for et stivt legeme med translasjon og rotasjon

Vi velger $\vec{r}_0 = 0$, dvs. vi legger origo i vårt referansepunkt. Legemets tyngdepunkt er i $\vec{R}(t)$, og her hastigheten $\vec{V}(t) = \dot{\vec{R}}(t)$. Legemet roterer med vinkelhastigheten $\vec{\omega}(t)$ om en akse gjennom tyngdepunktet.

Masseelementet m_i er lokalisert ved $\vec{r}_i(t) = \vec{R}(t) + \vec{\rho}_i(t)$ med hastighet $\vec{v}_i(t) = \dot{\vec{r}}_i(t) = \vec{V}(t) + \vec{u}_i(t)$, der $\vec{u}_i = \dot{\vec{\rho}}_i$.



Når legemet roterer rundt en akse gjennom tyngdepunktet har vi

$$\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{i\perp}$$

Her er $\vec{\rho}_i = \vec{\rho}_{i\parallel} + \vec{\rho}_{i\perp} = \hat{\omega}\rho_{i\parallel} + \vec{\rho}_{i\perp}$

Definisjonen av $\vec{L}$ for stive legemer gir:

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_i m_i [(\vec{R} + \vec{\rho}_i) \times (\vec{V} + \vec{u}_i)]$$

$$= \sum_i m_i \left[\vec{R} \times \vec{V} + \vec{R} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) + \vec{\rho}_i \times \vec{V} + \vec{\rho}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) \right]$$

Siden pr def av t.p. $\sum_i m_i \vec{\rho}_i = 0$ og $\vec{R}$, $\vec{\omega}$ og $\vec{V}$ kan settes utenfor summasjonstegnet, er de to midterste leddene lik null. Altså:

$$\vec{L} = M \vec{R} \times \vec{V} + \sum_i m_i \left[\vec{\omega} \rho_i^2 - \vec{\rho}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}_i) \right]$$

$$= \text{—''—} + \sum_i m_i \left[\vec{\omega} (\rho_i^2 - \rho_{i\parallel}^2) - \vec{\rho}_{i\perp} (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}_i) \right]$$

Her er $\rho_i^2 - \rho_{i\parallel}^2 = \rho_{i\perp}^2$, og derved blir den første summen:

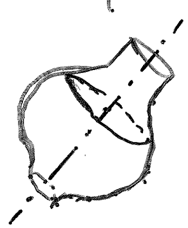
$$\sum_i m_i \vec{\omega}\left(\rho_i^2 - \rho_{i\parallel}^2\right) = \vec{\omega} \sum_i m_i \rho_{i\perp}^2 = \vec{\omega}\, I_0$$

Alt i alt:

$$\vec{L} = M\vec{R}\times\vec{V} + I_0\vec{\omega} - \omega \sum_i m_i \rho_{i\parallel} \vec{\rho}_{i\perp}$$

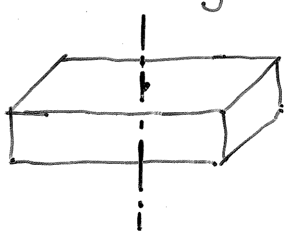
De to første leddene er enkle og gjenkjennelige, men det 3dje? I dette kurset skal vi begrense oss til objekter som er tilstrekkelig symmetriske til at siste ledd er null.

Ex 1: Sylindersymmetri



For gitt $\rho_{i\parallel}$ og m_i vil $\sum_i \vec{\rho}_{i\perp} = 0$ pga symmetrien

Ex 2: Rektangulær symmetri

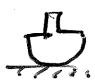


Med konstant massetetthet og gitt $\rho_{i\parallel}$ vil også her $\sum_i \vec{\rho}_{i\perp} = 0$

Merk: Begge eksemplene forutsetter at omdreiningsaksen er langs en symmetriakse!

Vi skal altså her begrense oss til tilfeller der det totale spinnet kan skrives som

$$\boxed{\vec{L} = \underbrace{M\vec{R}\times\vec{V}}_{\text{banespinn}} + \underbrace{I_0\vec{\omega}}_{\text{egenspinn}}}$$

[Men det er viktig å være klar over at leddet vi satte lik null er helt avgjørende i mange sammenhenger. En formel-1 bil som knuffer borti noe og slynges opp i luften vil *ikke* rotere pent og pyntelig om en (ikke-eksisterende i det tilfellet!) symmetriakse, $\vec{\omega}$ vil endre retning underveis etc. Alt dette kan bare forstås *med* det leddet vi sløyfet her. Tilsvarende for en snurrebass av typen  som har en tendens til å snu seg opp-ned, til posisjonen  under rotasjonen.

Kort sagt: Der er flere rotasjonsfenomener mellom himmel og jord enn dem vi drømmer konstruktivt om i dette kurset!]

$$\boxed{\text{Rotasjon i } xy\text{-planet: } \tau_z = \frac{dL_z}{dt} = M\frac{d}{dt}\left(\vec{R}\times\vec{V}\right)_z + I_0\dot{\omega}_z}$$