

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
 Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:

Navn: Ola Hunderi

Tlf.: 93411

BOKMÅL
EKSAMEN I FAG SIF4065 ATOM- OG MOLEKYLFYSIKK

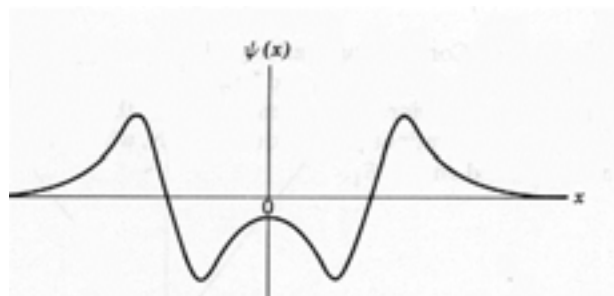
Fakultet for fysikk, matematikk og informatikk

Fredag 1. desember 2000

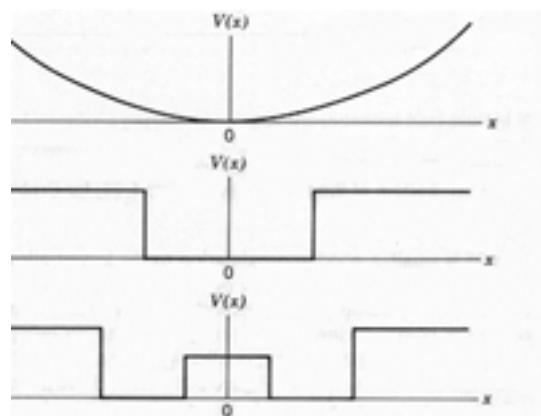
Tid: 0900 - 1400

Tillatte hjelpemidler (B2): Rottmann: Matematisk formelsamling (alle utgaver)
 Barnet & Cronin: Mathematical Formulae
 O. Øgrim og B. Ebbe Lian: Størrelser og enheter i fysikk og
 teknikk
 Typegodkjent kalkulator

Oppgave 1



Figur 1(a)



Figur 1(b)

- a) Betrakt bølgefunksjonen i Figur 1(a). Hvilket av potensialene illustrert i Figur 1(b) vil gi en slik bølgefunksjon. Forklar kvalitativt hvorfor det potensialet du velger fører til bølgefunksjonen i 1(a).
- b) Bølgefunksjonen gitt i 1(a) er ikke grunntilstanden. Skisser formen av bølgefunksjonen for grunntilstanden. Hvilken tilstand representerer bølgefunksjonen illustrert i 1(a)
- c) Beregn tilnærmet energien til de to laveste tilstandene i en endimensjonal uendelig dyp brønn av bredde a som har en cosinusformet hump i bunnen; dvs. et potensial gitt av

$$V = V_0 \cos(\pi x/a) \quad -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$$

$$V = \infty \quad x < -\frac{a}{2}, \quad x > \frac{a}{2}$$

$$\text{med } V_0 \ll \pi^2 \hbar^2 / 2ma^2.$$

Hint: Løs problemet ved først å løse problemet der $V = \text{konst}$ for $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$

Oppgave 2

- a) Finn forventningsverdiene av x , x^2 , p og p^2 for $n=0$ og $n=1$ tilstandene for en endimensjonal harmonisk oscillator.
- b) Bruk resultatet til å vise at forventningsverdien av den kinetiske energi $\langle T \rangle$ er lik forventningsverdien av potensiell energi $\langle V \rangle$ for $n=0$ og $n=1$.
- c) $\langle T \rangle = \langle V \rangle$ viser seg å gjelde generelt for den harmoniske oscillator. Bruk dette til å vise at $\Delta x \Delta p = \hbar (n + 1/2)$ for en endimensjonal harmonisk oscillator.

Oppgitt:
$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \cdot e^{-m\omega_0 x^2 / 2\hbar}$$

$$\psi_1 = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \cdot \left(\frac{2m\omega_0}{\hbar} \right)^{1/2} \cdot x e^{-m\omega_0 x^2 / 2\hbar}$$

$$\omega_0 = \sqrt{K/m}$$

$$\int_0^{\infty} x^k e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}(k+1)} \Gamma\left(\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$$

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Oppgave 3

- a) Gjør rede for Stern-Gerlach eksperimentet. Forklar hvorfor det er nødvendig med et magnetfelt som har en feltgradient for å utføre eksperimentet. Gi en kort utledning som viser at kraften i z-retningen på en partikkel med spinn-kvantetall s , m_s er gitt av

$$F_z = - \frac{\partial B_z}{\partial z} \mu_B g_s m_s$$

- b) En stråle av hydrogenatom kommer ut av en ovn med temperatur $T = 400\text{K}$. Strålen sendes gjennom et Stern-Gerlach apparat med lengde $x = 1\text{m}$. Feltgradienten i apparatet er $\frac{\partial B_z}{\partial z} = 10\text{ T/m}$. Beregn splittingen mellom spinn opp og spinn ned strålene ved utgangen av Stern-Gerlach magneten.

Opgitt: En partikkel som emitteres fra et hulrom i termisk likevekt gjennom en liten åpning har i middel en kinetisk energi $2kT$.

$$\mu_B = 0.927 \cdot 10^{-23} \text{ Am}^2$$

$$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

- c) Et hydrogenatom i tilstanden $n = 2$, $l = 1$ plasseres i et ytre magnetfelt med feltstyrke B . Beregn den totale Zeeman splittingen mellom høyeste og laveste energinivå dersom
- magnetfeltet er svakt
 - magnetfeltet er sterkt

Se i denne delen av oppgaven bort fra spinn-bane vekselvirkningen. Beregn deretter det B-feltet som gjør Zeemann splittingen lik spin-bane vekselvirkningen $\langle V_{SL} \rangle$ for $2P_{3/2}$ tilstanden.

Opgitt:

$$g = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$$

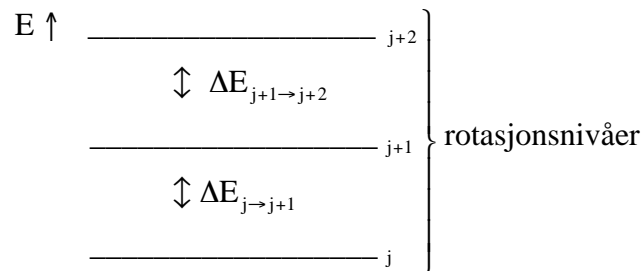
$$\langle V_{SL} \rangle = \frac{Z^4 \alpha^2}{n^3} \cdot E_0 \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{l(l+1)(2l+1)}$$

$$\text{med } \alpha = \frac{1}{137} \text{ og } E_0 = 13.6 \text{ eV}$$

Oppgave 4

- a) Finn avstanden mellom atomkjernene i HCl molekylet når energiforskjellen mellom to nabo-overganger mellom rotasjonsnivåer er:

$$\Delta E_{j+1 \rightarrow j+2} - \Delta E_{j \rightarrow j+1} = 4.2 \cdot 10^{-22} \text{ J} = 0.0026 \text{ eV}$$



Massen for ^{35}Cl er $5.81 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$, og massen for H er $1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

- b) Forklar hvorfor Lennard-Jones potensialet er et realistisk potensial for å beskrive vekselvirkningen mellom atomene i et Ar_2 -molekyl.

Bestem krumningen av Lennard-Jones potensialet for likevektsavstanden i Ar_2 -molekylet, og bruk harmonisk oscillator approksimasjonen til å bestemme nullpunktsenergien for vibrasjoner. Sammenlign dette med minimum i Lennard-Jones potensialet og bestem dissosiasjonsenergien for Ar_2 -molekylet. Relevante data er gitt nedenfor.

- c) Gjenta beregningene for et He_2 molekyl. Hva sier resultatet om muligheten for at et He_2 molekyl kan dannes.

Oppgitt: Lennard-Jones potensialet:

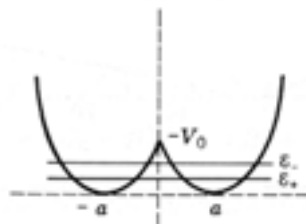
$$V(R) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{R} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{R} \right)^6 \right]$$

med	$\sigma(\text{nm})$	$\epsilon(\text{eV})$
He	0.256	$8.79 \cdot 10^{-4}$
Ar	0.340	$1.05 \cdot 10^{-2}$

- d) Vi skal så se på et endimensjonalt problem der en partikkel med masse m beveger seg i et dobbelt oscillator potensial gitt av:

$$V(x) = \frac{1}{2} k (|x| - a)^2$$

Dette potensialet er plottet i Figur 2.



Figur 2

Når avstanden mellom de to brønnene er tilstrekkelig stor, er bølgefunksjonen approximativt gitt av:

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_a \pm \phi_{-a})$$

der

$$\phi_{\pm a}(x) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha(x \mp a)^2}$$

er bølgefunksjonen for en enkelt oscillator sentrert i $x = \pm a$ og med

$\alpha = \frac{1}{2} m\omega_0 / \hbar$ og $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Vis at energien til de to laveste tilstandene tilnærmet er gitt av

$$\varepsilon_{\pm} = \varepsilon_0 + G \pm S$$

der $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega_0$ og

$$G = \int \phi_{-a}^2 V_1(x) dx = \int \phi_a^2 V_2(x) dx$$

$$S = \int \phi_a V_1(x) \phi_{-a} dx = \int \phi_{-a} V_2(x) \phi_a dx$$

med $V_1 = -k(x + |x|)$ og $V_2(x) = -k(-x + |x|)$

Beregn S og vis at splitting mellom de to laveste tilstandene er proporsjonal med $e^{-2\alpha a^2}$.