NTNU
Det skapende universitet

Institutt for fysikk

Eksamensoppgave i FY8104 / FY3105 Symmetrigrupper i fysikken

Faglig kontakt under eksamen: Jan Myrheim

Tlf.: 73 59 36 53 / 900 75 172

Eksamensdato: 9. desember 2013

Eksamenstid: 9–13

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, matematiske og fysiske tabeller

Målform: Bokmål

Antall sider: 5

Antall sider vedlegg: 0

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 73 59 36 53 (mobil 900 75 172)

Eksamen i fag FY8104/FY3105 Symmetri i fysikken
Mandag 9. desember 2013
Tid: 09:00–13:00

Sensurfrist: Torsdag 9. januar 2014

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, matematiske tabeller.

En tabell over fysiske konstanter finnes sist i dette oppgavesettet.
Alle deloppgaver teller likt ved sensuren.

Oppgave 1:

En gruppe G av orden 16 har følgende multiplikasjonstabell.

	e	a	b	c	j	k	l	m	p	q	r	s	t	u	v	w
e	e	a	b	c	j	k	l	m	p	q	r	s	t	u	v	w
a	a	b	c	j	k	l	m	e	q	r	s	t	u	v	w	p
b	b	c	j	k	l	m	e	a	r	s	t	u	v	w	p	q
c	c	j	k	l	m	e	a	b	s	t	u	v	w	p	q	r
j	j	k	l	m	e	a	b	c	t	u	v	w	p	q	r	s
k	k	l	m	e	a	b	c	j	u	v	w	p	q	r	s	t
l	l	m	e	a	b	c	j	k	v	w	p	q	r	s	t	u
m	m	e	a	b	c	j	k	l	w	p	q	r	s	t	u	v
p	p	u	r	w	t	q	v	s	e	k	b	m	j	a	l	c
q	q	v	s	p	u	r	w	t	a	l	c	e	k	b	m	j
r	r	w	t	q	v	s	p	u	b	m	j	a	l	c	e	k
s	s	p	u	r	w	t	q	v	c	e	k	b	m	j	a	l
t	t	q	v	s	p	u	r	w	j	a	l	c	e	k	b	m
u	u	r	w	t	q	v	s	p	k	b	m	j	a	l	c	e
v	v	s	p	u	r	w	t	q	l	c	e	k	b	m	j	a
w	w	t	q	v	s	p	u	r	m	j	a	l	c	e	k	b

Elementene a og p oppfyller relasjonene $a^8 = p^2 = e$, $pa = a^5 p$, og genererer gruppen.

Konjugasjonsklassene er:
$C_1 = \{e\}\,,\ C_2 = \{a^2\} = \{b\}\,,\ C_3 = \{a^4\} = \{j\}\,,\ C_4 = \{a^6\} = \{l\}\,,$
$C_5 = \{a, a^5\} = \{a, k\}\,,\ C_6 = \{a^3, a^7\} = \{c, m\}\,,$
$C_7 = \{p, a^4 p\} = \{p, t\}\,,\ C_8 = \{ap, a^5 p\} = \{q, u\}\,,$
$C_9 = \{a^2 p, a^6 p\} = \{r, v\}\,,\ C_{10} = \{a^3 p, a^7 p\} = \{s, w\}\,.$

a) Finn undergrupper av G. Finn spesielt $Z(G)$, sentret til G (som kommuterer med hele G).

b) Hvilke undergrupper er normale (invariante)?

c) I en endelig gruppe er $\chi(g^{-1}) = (\chi(g))^*$ for enhver karakter χ og ethvert gruppeelement g. Hvorfor?

d) Ingen gruppe av orden 16 kan ha en irredusibel representasjon av dimensjon høyere enn to. Hvorfor?

e) Find karaktertabellen til gruppen G.

Bruk karaktertabellen til å kontrollere at du har funnet alle de normale undergruppene.

Følgende ortogonalitetsrelasjoner gjelder for en endelig gruppe av orden N.

La $\chi_i^{(\mu)}$ være karakterverdien til konjugasjonsklasse nr. i, med N_i elementer, i den irredusible representasjonen μ. Da er

$$\sum_i N_i (\chi_i^{(\mu)})^* \chi_i^{(\nu)} = N\, \delta_{\mu\nu} \; ,$$

$$\sum_\mu (\chi_i^{(\mu)})^* \chi_j^{(\mu)} = \frac{N}{N_i}\, \delta_{ij} \; .$$

Andre hint:

- I en endimensjonal representasjon er det karakteren som er representasjonen.
- Den kompleksskonjugerte av en representasjon er også en representasjon.
- Hvis ϕ og ψ er karakterer, og $\chi(g) = \phi(g)\,\psi(g)$ for alle $g \in G$, så er χ en karakter.
- Dimensjonen til en irredusibel representasjon er alltid en divisor i ordenen til gruppen.
- En representasjon av en kvotientgruppe G/H, der H er en normal undergruppe, er også en representasjon av G.

Oppgave 2:

Den ikke-relativistiske Hamilton-funksjonen

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\, r}$$

beskriver et hydrogenatom, hvis vi ser bort fra elektronspinnet.
m er den reduserte massen, og e er elementærladningen.
For å løse den tidsuavhengige tredimensjonale Schrödinger-ligningen

$$H\psi = E\psi$$

separerer vi variable i polarkoordinater og skriver

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{u(r)}{r}\, Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \; ,$$

der $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ er en sfærisk harmonisk funksjon.

Radialbølgefunksjonen $u(r)$ er definert for $r \geq 0$, og oppfyller randkravene

$$u(0) = 0 \ , \qquad u(r) \to 0 \quad \text{når} \quad r \to \infty \ . \tag{1}$$

Det tredimensjonale normaliseringsintegralet

$$\int \mathrm{d}^3\vec{r}\ |\psi(\vec{r})|^2 = 1$$

går over til det endimensjonale normaliseringsintegralet

$$\int_0^\infty \mathrm{d}r\ |u(r)|^2 = 1 \ .$$

Bølgefunksjonen $u(r)$ oppfyller den endimensjonale Schrödinger-ligningen

$$H_\ell\, u = Eu \ ,$$

der

$$H_\ell = \frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2}{a_0 r}\right) \ .$$

Her er $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2)$ Bohr-radien, og dreieimpulskvantetallet ℓ er en parameter i den endimensjonale Hamilton-funksjonen H_ℓ.

Det endimensjonale problemet med Hamilton-funksjonen H_ℓ kan vi løse med en metode som ligner på den algebraiske metoden for å løse problemet med den endimensjonale harmoniske oscillatoren. For dette formålet definerer vi operatoren

$$A_\ell = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + W_\ell(r) \ ,$$

med

$$W_\ell(r) = -\frac{\alpha_\ell}{r} + \beta_\ell \ .$$

Vi tar α_ℓ og β_ℓ til å være positive konstanter, avhengige av ℓ.

a) Bruk randkravene i lign. (1) til å vise at

$$A_\ell^\dagger = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + W_\ell(r) \ .$$

b) Vis at det er mulig å velge α_ℓ og β_ℓ slik at

$$H_\ell = \frac{\hbar^2}{2m}\left(A_\ell^\dagger A_\ell - \gamma_\ell\right) , \tag{2}$$

der γ_ℓ er en konstant. Hva er γ_ℓ?

Vis at med dette valget av konstanter $\alpha_\ell, \beta_\ell, \gamma_\ell$ har vi at

$$H_{\ell+1} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(A_\ell A_\ell^\dagger - \gamma_\ell\right) . \tag{3}$$

c) Løs ligningen $A_\ell u = 0$ for bølgefunksjonen $u = u(r)$.
(Uttrykk løsningen ved α_ℓ og β_ℓ, dersom du ikke fant de eksplisitte uttrykkene for disse konstantene.)

Dett er grunntilstanden til Hamilton-operatoren H_ℓ. Hvordan vet vi det?

Hva er energien til hydrogenatomet i denne tilstanden?

Løs også ligningen $A_\ell^\dagger u = 0$.

Hvorfor er dette ikke grunntilstanden til Hamilton-operatoren $H_{\ell+1}$?

d) De to ligningene (2) og (3) impliserer at de to Hamilton-operatorene H_ℓ og $H_{\ell+1}$ har i alt vesentlig samme energispektrum.

Vis at hvis $u = u(r)$ er en egenfunksjon for H_ℓ med energi E, det vil si, hvis

$$H_\ell \, u = E u \; ,$$

så er $v = A_\ell u$ en egenfunksjon for $H_{\ell+1}$ med samme energi E. Det vil si at

$$H_{\ell+1} \, v = E v \; .$$

Hva skjer dersom u er grunntilstanden til H_ℓ?

Vis på samme måte at hvis $v = v(r)$ er en egenfunksjon for $H_{\ell+1}$ med energi E, så er $w = A_\ell^\dagger v$ en egenfunksjon for H_ℓ med samme energi E.

e) Oppsummer det du nå har lært (eller visste fra før) om energinivåene til hydrogenatomet, og spesielt hvordan de er degenererte.

Merk at med denne operatormetoden finner vi de bundne tilstandene med bølgefunksjoner og energier. Kontinuumet av egentilstander med positiv energi er en annen historie.

Oppgave 3:

En basis for Lie-algebraen $\mathrm{so}(3,\mathbb{C})$ til den komplekse ortogonale gruppen $\mathrm{SO}(3,\mathbb{C})$ består av de seks antisymmetriske komplekse 3×3 matrisene

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{\lambda}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{\lambda}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

og $\boldsymbol{\kappa}_1 = \mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}_1$, $\boldsymbol{\kappa}_2 = \mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}_2$, $\boldsymbol{\kappa}_3 = \mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}_3$.

a) Finn kommutasjonsrelasjonene.

b) Beregn eksponensialfunksjonene

$$\mathbf{A} = \exp(\alpha \boldsymbol{\lambda}_1) \; , \qquad \mathbf{B} = \exp(\chi \boldsymbol{\kappa}_1) \; ,$$

der α og χ er reelle parametre.

Her ser vi på denne Lie-algebraen som en representasjon av Lie-algebraen $\mathrm{so}(1,3,\mathbb{R})$ til Lorentz-gruppen.

Hva er da den fysiske tolkningen av $\mathbf{A}$ og $\mathbf{B}$?

c) La

$$\vec{x} = \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \qquad \vec{y} = \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

være tredimensjonale reelle vektorer, og la $\vec{z} = \vec{x} + \mathrm{i}\vec{y}$.

Vis at det komplekse skalarproduktet

$$\vec{z} \cdot \vec{z} = \mathbf{z}^\top \mathbf{z} = (z_1)^2 + (z_2)^2 + (z_3)^2$$

er invariant under enhver Lorentz-transformasjon $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{C}\mathbf{z}$ med $\mathbf{C} = \exp(\mathbf{L})$ og $\mathbf{L}^\top = -\mathbf{L}$.

d) En fysisk størrelse som transformeres under denne representasjonen av Lorentz-gruppen er $\vec{G} = c\vec{B} + \mathrm{i}\vec{E}$, der $\vec{E}$ er det elektriske feltet og $\vec{B}$ er den magnetiske flukstettheten.

En kompleks Lorentz-invariant inneholder to reelle Lorentz-invarianter.

Hva er de to Lorentz-invariantene til det elektromagnetiske feltet?

Vi har vist her at de er invariante under kontinuerlige Lorentz-transformasjoner. Er de også paritetsinvariante? Begrunn svaret.

Noen nyttige konstanter:	
Lyshastigheten i vakuum:	$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$
Permeabiliteten i vakuum:	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$
Permittiviteten i vakuum:	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) = 8,854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$
Den reduserte Plancks konstant:	$\hbar = 1,055 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Elementærladningen:	$e = 1,602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Finstrukturkonstanten:	$\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137,036$
Elektronmassen:	$m_\mathrm{e} = 9,109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} = 0,511\,\mathrm{MeV}/c^2$
Bohr-radien i hydrogen:	$a_0 = \hbar/(\alpha m_\mathrm{e} c) = 0,529\,\mathrm{Å}$

NTNU
Det skapende universitet

Department of physics

Examination paper for FY8104 / FY3105 Symmetry groups in physics

Academic contact during examination: Jan Myrheim

Phone: 73 59 36 53 / 900 75 172

Examination date: December 9, 2013

Examination time: 9–13

Permitted support material: Calculator, mathematical and physical tables

Language: English

Number of pages: 5

Number of pages enclosed: 0

THE NORWEGIAN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF PHYSICS

Contact person:
Name: Jan Myrheim
Telephone: 73 59 36 53 (mobil 900 75 172)

Examination, course FY8104/FY3105 Symmetry in physics
Monday December 9, 2013
Time: 09:00–13:00

Grades made public: Thursday January 9, 2014

Allowed to use: Calculator, mathematical tables.

A table of physical constants is given at the end of this problem set.
All subproblems are given the same weight in the grading.

Problem 1:

A group G of order 16 has the following multiplication table.

	e	a	b	c	j	k	l	m	p	q	r	s	t	u	v	w
e	e	a	b	c	j	k	l	m	p	q	r	s	t	u	v	w
a	a	b	c	j	k	l	m	e	q	r	s	t	u	v	w	p
b	b	c	j	k	l	m	e	a	r	s	t	u	v	w	p	q
c	c	j	k	l	m	e	a	b	s	t	u	v	w	p	q	r
j	j	k	l	m	e	a	b	c	t	u	v	w	p	q	r	s
k	k	l	m	e	a	b	c	j	u	v	w	p	q	r	s	t
l	l	m	e	a	b	c	j	k	v	w	p	q	r	s	t	u
m	m	e	a	b	c	j	k	l	w	p	q	r	s	t	u	v
p	p	u	r	w	t	q	v	s	e	k	b	m	j	a	l	c
q	q	v	s	p	u	r	w	t	a	l	c	e	k	b	m	j
r	r	w	t	q	v	s	p	u	b	m	j	a	l	c	e	k
s	s	p	u	r	w	t	q	v	c	e	k	b	m	j	a	l
t	t	q	v	s	p	u	r	w	j	a	l	c	e	k	b	m
u	u	r	w	t	q	v	s	p	k	b	m	j	a	l	c	e
v	v	s	p	u	r	w	t	q	l	c	e	k	b	m	j	a
w	w	t	q	v	s	p	u	r	m	j	a	l	c	e	k	b

The elements a and p satisfy the relations $a^8 = p^2 = e$, $pa = a^5 p$ and generate the group.

The conjugation classes are:
$C_1 = \{e\}\,,\ C_2 = \{a^2\} = \{b\}\,,\ C_3 = \{a^4\} = \{j\}\,,\ C_4 = \{a^6\} = \{l\}\,,$
$C_5 = \{a, a^5\} = \{a, k\}\,,\ C_6 = \{a^3, a^7\} = \{c, m\}\,,$
$C_7 = \{p, a^4 p\} = \{p, t\}\,,\ C_8 = \{ap, a^5 p\} = \{q, u\}\,,$
$C_9 = \{a^2 p, a^6 p\} = \{r, v\}\,,\ C_{10} = \{a^3 p, a^7 p\} = \{s, w\}\,.$

a) Find subgroups of G. Find especially $Z(G)$, the centre of G (commuting with all of G).

b) Which subgroups are normal (invariant)?

c) In a finite group, $\chi(g^{-1}) = (\chi(g))^*$ for any character χ and any group element g. Why?

d) No group of order 16 can have an irreducible representation of dimension higher than two. Why?

e) Find the character table of the group G.

Check with the character table that you have found all the normal subgroups.

The following orthogonality relations hold for a finite group of order N.

Let $\chi_i^{(\mu)}$ be the character value of the conjugation class i, with N_i elements, in the irreducible representation μ. Then

$$\sum_i N_i (\chi_i^{(\mu)})^* \chi_i^{(\nu)} = N\,\delta_{\mu\nu}\ ,$$
$$\sum_\mu (\chi_i^{(\mu)})^* \chi_j^{(\mu)} = \frac{N}{N_i}\,\delta_{ij}\ .$$

Other hints:

- In a one dimensional representation the character is the representation.
- The complex conjugate of a representation is also a representation.
- If ϕ and ψ are characters, and $\chi(g) = \phi(g)\,\psi(g)$ for all $g \in G$, then χ is a character.
- The dimension of an irreducible representation is always a divisor of the order of the group.
- A representation of a quotient group G/H, where H is a normal subgroup, is also a representation of G.

Problem 2:

The non-relativistic Hamiltonian

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\, r}$$

describes a hydrogen atom, if we disregard the electron spin.
m is the reduced mass, and e is the elementary charge.
To solve the time independent three dimensional Schrödinger equation

$$H\psi = E\psi$$

we separate variables in polar coordinates and write

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{u(r)}{r}\,Y_{\ell m}(\theta,\varphi)\ ,$$

where $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ is a spherical harmonic function.

The radial wave function $u(r)$ is defined for $r \geq 0$, and satisfies the boundary conditions

$$u(0) = 0 \;, \qquad u(r) \to 0 \quad \text{as} \quad r \to \infty \;. \tag{1}$$

The three dimensional normalization integral

$$\int \mathrm{d}^3\vec{r}\; |\psi(\vec{r})|^2 = 1$$

turns into the one dimensional normalization integral

$$\int_0^\infty \mathrm{d}r\; |u(r)|^2 = 1 \;.$$

The wave function $u(r)$ satisfies the one dimensional Schrödinger equation

$$H_\ell\, u = Eu \;,$$

where

$$H_\ell = \frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2}{a_0 r} \right) \;.$$

Here $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2)$ is the Bohr radius, and the angular momentum quantum number ℓ is a parameter of the one dimensional Hamiltonian H_ℓ.

The one dimensional problem with the Hamiltonian H_ℓ can be solved by a method which is similar to the algebraic method for solving the problem of the one dimensional harmonic oscillator. For this purpose we introduce the operator

$$A_\ell = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + W_\ell(r) \;,$$

with

$$W_\ell(r) = -\frac{\alpha_\ell}{r} + \beta_\ell \;.$$

We take α_ℓ and β_ℓ to be positive constants, depending on ℓ.

a) Use the boundary conditions in eq. (1) to show that

$$A_\ell^\dagger = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + W_\ell(r) \;.$$

b) Show that it is possible to choose α_ℓ and β_ℓ such that

$$H_\ell = \frac{\hbar^2}{2m} \left(A_\ell^\dagger A_\ell - \gamma_\ell \right) , \tag{2}$$

where γ_ℓ is a constant. What is γ_ℓ?

Show that with this choice of constants $\alpha_\ell, \beta_\ell, \gamma_\ell$ we have that

$$H_{\ell+1} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(A_\ell A_\ell^\dagger - \gamma_\ell \right) . \tag{3}$$

c) Solve the equation $A_\ell u = 0$ for the wave function $u = u(r)$.
(Write the solution in terms of α_ℓ and β_ℓ, if you did not find the explicit expressions for these constants.)

This is the ground state of the Hamiltonian H_ℓ. How do we know?

What is the energy of the hydrogen atom in this state?

Solve also the equation $A_\ell^\dagger u = 0$.

Why is this not the ground state of the Hamiltonian $H_{\ell+1}$?

d) The two equations (2) and (3) imply that the two Hamiltonians H_ℓ and $H_{\ell+1}$ have essentially the same energy spectrum.

Show that if $u = u(r)$ is an eigenfunction of H_ℓ with energy E, that is, if

$$H_\ell \, u = Eu \ ,$$

then $v = A_\ell u$ is an eigenfunction of $H_{\ell+1}$ with the same energy E. That is,

$$H_{\ell+1} \, v = Ev \ .$$

What happens when u is the ground state of H_ℓ?

In the same way, show that if $v = v(r)$ is an eigenfunction of $H_{\ell+1}$ with energy E, then $w = A_\ell^\dagger v$ is an eigenfunction of H_ℓ with the same energy E.

e) Summarize what you have now learned (or knew already) about the energy levels of the hydrogen atom, and in particular how they are degenerate.

Note that by the present operator method we find the bound state wave functions and energies. The continuum of positive energy eigenstates is a different story.

Problem 3:

A basis for the Lie algebra so$(3, \mathbb{C})$ of the complex orthogonal group SO$(3, \mathbb{C})$ consists of the six antisymmetric complex 3×3 matrices

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{\lambda}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{\lambda}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

and $\boldsymbol{\kappa}_1 = \mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}_1$, $\boldsymbol{\kappa}_2 = \mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}_2$, $\boldsymbol{\kappa}_3 = \mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}_3$.

a) Find the commutation relations.

b) Compute the exponentials

$$\mathbf{A} = \exp(\alpha\boldsymbol{\lambda}_1) \ , \qquad \mathbf{B} = \exp(\chi\boldsymbol{\kappa}_1) \ ,$$

where α and χ are real parameters.

We regard this Lie algebra here as a representation of the Lie algebra so$(1, 3, \mathbb{R})$ of the Lorentz group.

What are then the physical interpretations of $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$?

c) Let

$$\vec{x} = \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \qquad \vec{y} = \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

be three dimensional real vectors, and let $\vec{z} = \vec{x} + \mathrm{i}\vec{y}$.

Show that the complex scalar product

$$\vec{z} \cdot \vec{z} = \mathbf{z}^\top \mathbf{z} = (z_1)^2 + (z_2)^2 + (z_3)^2$$

is invariant under every Lorentz transformation $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{C}\mathbf{z}$ with $\mathbf{C} = \exp(\mathbf{L})$ and $\mathbf{L}^\top = -\mathbf{L}$.

d) A physical quantity transforming under this representation of the Lorentz group is $\vec{G} = c\vec{B} + \mathrm{i}\vec{E}$, where $\vec{E}$ is the electric field and $\vec{B}$ is the magnetic flux density.

One complex Lorentz invariant contains two real Lorentz invariants.

What are the two Lorentz invariants of the electromagnetic field?

We have proved here that they are invariant under continuous Lorentz transformations. Are they also parity invariant? Give reasons for your answer.

Some useful constants:

The speed of light in vacuum:	$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$
The permeability of vacuum:	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$
The permittivity of vacuum:	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$
The reduced Planck's constant:	$\hbar = h/(2\pi) = 1.055 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
The elementary charge:	$e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
The fine structure constant:	$\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137.036$
The electron mass:	$m_\mathrm{e} = 9.109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} = 0,511\,\mathrm{MeV}/c^2$
The hydrogen Bohr radius:	$a_0 = \hbar/(\alpha m_\mathrm{e} c) = 0.529\,\mathrm{Å}$