Løysingsforslag (Skisse) Eksamen FY3452 Gravitasjon og Kosmologi Våren 2007

May 24, 2007

Oppgave 1

a) Lorentztransformasjonane er

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \ , \\ t' &= \gamma(t - Vx) \ , \end{aligned}$$

der $\gamma = 1/\sqrt{1-V^2}$. Vi tar differensiala av desse likningane og får

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma\left(\Delta x - V\Delta t\right) \ , \\ \Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - V\Delta x\right) \ . \end{aligned}$$

Divisjon gir

$$\begin{aligned} v' &= \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \\ &= \frac{\Delta x - V\Delta t}{\Delta t - V\Delta x} \\ &= \underline{\underline{\frac{v - V}{1 - Vv}}} \ . \end{aligned}$$

b) Vi tar differensialet av uttrykket for v':

$$\begin{aligned} \Delta v' &= \frac{\Delta v}{1 - Vv} + \frac{(v-V)V\Delta v}{(1-Vv)^2} \\ &= \frac{1}{\gamma^2}\frac{\Delta v}{(1-Vv)^2} \ . \end{aligned}$$

Divisjon med $\Delta t'$ gjev

$$\frac{\Delta v'}{\Delta t'} = \frac{1}{\gamma^3}\frac{1}{(1-Vv)^3}\frac{\Delta v}{\Delta t} .$$

Eller

$$\underline{\underline{a' = \frac{a}{\gamma^3}\frac{1}{(1-Vv)^3}}} .$$

c) Det instantane kvilesystemet er definert ved $v' = 0$ eller $V = v$. Dette gjev

$$a' = \gamma^3 a .$$

Konstant akselerasjon g i S' gjev

$$a = \frac{g}{\gamma^3} .$$

Dette kan skrivast som

$$\frac{dv}{dt}\frac{1}{(1-v^2)^{3/2}} = g .$$

Integrasjon gjev

$$\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = gt + c ,$$

der c er ein integrasjonskonstant. $v(0) = 0$ impliserer at $c = 0$. Likninga over løyast mop v:

$$\underline{\underline{v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1+g^2t^2}}}} .$$

Oppgave 2

a) Λ er den kosmologiske konstanten, ρ er energitettheiten til stråling og materie. p er strålingstrykket (trykket til vanleg materie er tilnærma lik null).

b) $k = 0$ tilsvarer topologien til Euklidsk rom. $k = 1$ er topologien til ei tredimensjonal kule (S^3) i R^4. $k = -1$ er topologien til ein tredimensjonal hyperboloide i eit firedimensjonalt flatt tidrom.

c) Vi prøver med $a =$ konst i den andre av Friedmans likningar. Dette gjev

$$\frac{1}{a^2} = \Lambda ,$$

eller

$$\underline{\underline{a = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}}} .$$

Den første av Friedmans likningar kan skrivast

$$\rho \quad = \quad \frac{1}{8\pi}\left[3\frac{1}{a^2} - \Lambda\right] \ .$$

Ved innsetting for a får vi

$$\underline{\underline{\rho = \frac{\Lambda}{4\pi}}} \ .$$

Oppgave 3

a) m er massen til det svarte holet. $r = 0$ er ein fysisk singularitet i tidrommet. $r = 2m$ er ein koordinatsingularitet som kan transformerast bort ved å velge andre koordintar (t.d. Eiddington-Finkelstein koordinatar).

b) Gro ser Kåre falle radielt innover mot det svarte holet. Det tek uendeleg lang koordinattid t for Kåre å nærme seg horisonten $r = 2m$. Koordinatetida er essensielt det same som eigentida for Gro, slik at ho ser at han nærmar seg horisonten men aldri når fram. Radiosignalet blir meir og meir raudforskjøve, og blir borte når $r = 2m$ (uendeleg raudforskyvning på horisonten).

c) Innafor $r < 2m$ er r tidlik og må difor vere ein monoton funksjon av eigentida. På grunn av kontinuitet når ein kryssar $r = 2m$, må r minke og ein møter singulariteten $r = 0$ om ein vil eller ikkje. Innafor $r = 2$ er t ikkje tidlik og det er ikkje slike krav på denne koordinate. Frå minusteinket i metrikken følger det at vi kan maksimere eigentida τ ved å sette $dt = 0$ i metrikken. Dette gir

$$d\tau \quad = \quad \frac{r^{\frac{1}{2}}\,dr}{\sqrt{2m - r}} \ .$$

Integrasjon gjev da

$$\begin{aligned}\Delta\tau_{\text{maks}} \quad &= \quad \int_0^{2m} \frac{r^{\frac{1}{2}}\,dr}{\sqrt{2m - r}} \\ &= \quad 4m\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx \ ,\end{aligned}$$

der ein har skifta variable $r = 2m\sin^2 x$. Dette gjev

$$\underline{\underline{\Delta\tau_{\text{maks}} = m\pi}} \ ,$$

som er er omlag 2.36 lenger tid enn ved fritt fall.

Oppgave 4

a) Bevegelseslikninga for ψ er

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^*)} \quad = \quad \frac{\partial L}{\partial\psi^*}$$

eller

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\psi^*}{\partial t})}+\nabla\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi^*)}\frac{\partial L}{\partial\psi^*}$$

Lagrangetettheiten gir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^*} &= \frac{1}{2}i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}\ , \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\psi^*}{\partial t})} &= -\frac{1}{2}i\hbar\psi\ , \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi^*)} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi\ .
\end{aligned}$$

Bevegelseslikninga blir da

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}\ .$$

Dette er Schrödingerlikninga for ein fri partikkel.

Lagrangetettheiten er invariant under globale fasetransformasjonar fordi differensialoperartorane spaserer forbi alle fasefaktorane og blir kansellert av ein fasefaktor frå det komplekskonjugerte feltet.

Vi kan skrive variasjonen i $\mathcal{L}$

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^*}\delta\psi^*+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial t})}\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\psi^*}{\partial t})}\delta\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)}\delta\left(\nabla\psi\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi^*)}\delta\left(\nabla\psi^*\right) \\
&= 0\ .
\end{aligned}$$

Vi bruker nå

$$\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\delta\psi\ ,$$

osb. Dersom vi kombinerer dette med bevegelseslikninga for ψ og ψ^*, får vi

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\psi}{\partial t})}\delta\psi\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\psi^*}{\partial t})}\delta\psi^*\right]+\nabla\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)}\delta\psi\right]+\nabla\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi^*)}\delta\psi^*\right] \\
&= 0\ .
\end{aligned}$$

Rekkeutvikling av global fasetransformasjon til første orden gjev

$$\begin{aligned}
\delta\psi &= i\alpha\psi \\
\delta\psi^* &= -i\alpha\psi^*\ .
\end{aligned}$$

$\Delta\mathcal{L}=0$ kan da skrivast som ei kontinuitetslikning:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{j} = 0\ ,$$

der $\rho = \psi^* \psi$ og straumen er

$$\mathbf{j} \quad = \quad \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* \right) \; .$$

ρ tolkast som sannsynlegheitstettheit i kvantemekanikken og kontinuitetslikninga kan tolkast som bevaring av sannsynlegheit eller partikkeltal.

Ein innfører eit gaugefelt A_μ der ein erstatter partielt deriverte med den kovariant deriverte:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - i A_\mu \; .$$

Gaugefeltet transformerer også under lokale fasetransformasjonar og transformasjonen er

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(\mathbf{x}, t) \; .$$

I tillegg må vi addere eit kinetisk ledd for gaugefeltet til Lagrangetettheiten

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \; ,$$

der $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ er den elektromagnetiske felttensoren.

b) Gruppa $SO(N)$ er gruppa av alle ortogonale ($A^T = A^{-1}$) inverterbare matriser med determinant lik $+1$ og reelle matriseelement.

Vi har $SO(1) = \{1\}$ som er den trivielle gruppa og trivielt er abelsk.

Vi har $SO(2)$ som er gruppa av rotasjonar rundt ein akse. Alle rotasjonar rundt ein akse kommuterer slik at denne gruppa er abelsk (er også isomorf med gruppa $U(1)$).

Gruppa $SO(N)$ for $N > 2$ er ikkje abelsk. Dette er gruppa av rotasjonar i eit N-dimensjonalt rom og rotasjonar om ulike aksar kommuterer ikkje.

Det er $N(N-1)/2$ plan i eit N-dimensjonalt rom. Dette er og antalet av rotasjonsaksar og difor antal generatorar.

c) Ergosfæren er eit område i tidrommet mellom horisonten

$$r_+ \quad = \quad m + \sqrt{m^2 - a^2} \; ,$$

og flata

$$r_e \quad = \quad m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta} \; ,$$

der m er massen til holet, $a = J/m$ der J er spinnet til holet. θ er vinkelen med $z-$aksen. I ergosfæren er det ikkje mogleg for ein observatør å ha faste koordinatar r, θ og ϕ. Det er mogleg å ha faste koordinatar r og θ, men observatøren må rotere rundt det svarte holet med ein vinkelhastigheit Ω som ligg i eit intervall som er ein funksjon av r og θ.