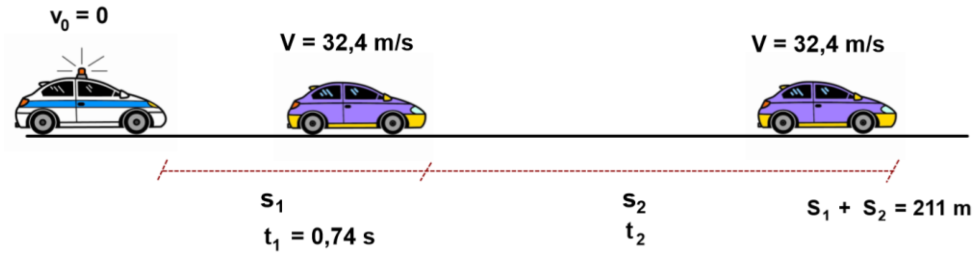
Løsningsforslag eksamen august 2022.

Oppgave 1



Før politibilen rekker å komme i bevegelse har den andre bilen beveget seg en distanse

$$s_1 = \mathrm{v} \cdot t_1 = 32{,}4\ \mathrm{m/s} \cdot 0{,}74\ \mathrm{s} = 24{,}0\ \mathrm{m}$$

Tiden som politibilen dermed har til rådighet for å tilbakelegge distansen $s_1 + s_2 = 211\ \mathrm{m}$ er den samme tiden som den andre bilen bruker på å tilbakelegge distansen $s_2 = 211\ \mathrm{m} - 24{,}0\ \mathrm{m} = 187\ \mathrm{m}$. Det vil si:

$$t_2 = \frac{s_2}{\mathrm{v}} = \frac{187\ \mathrm{m}}{32{,}4\ \mathrm{m/s}} = 5{,}77\ \mathrm{s}$$

Politibilens akselerasjon blir dermed:

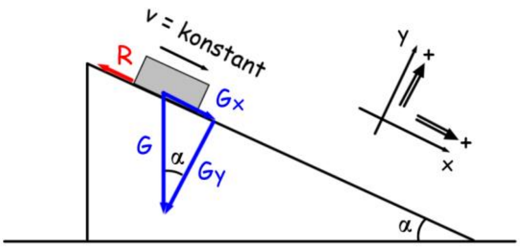
$$s_1 + s_2 = \frac{1}{2} a t_2^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2(s_1 + s_2)}{t_2^2} = \frac{2 \cdot 211\ \mathrm{m}}{(5{,}77\ \mathrm{s})^2} = 12{,}7\ \mathrm{m/s^2}$$

Oppgave 2

Endringen i gokartens fart v over akselerasjonsperioden på 5.0 sekunder er

$$\mathrm{v}(5) = \int_0^5 a(t)dt = \int_0^5 8.0 \sin\left(\frac{\pi t}{5}\right) dt = -\left[\frac{40}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right]_0^5 = \frac{80}{\pi}\ \mathrm{m/s} \approx 92\ \mathrm{km/t}$$

Oppgave 3



Newtons 2.lov med hensyn på klossens bevegelse nedover skråplanet er gitt ved:

$$\sum F = G_x - R = G_x - \mu_k G_y = ma$$

Løser denne ligningen med hensyn på friksjonskoeffisienten μ_k:

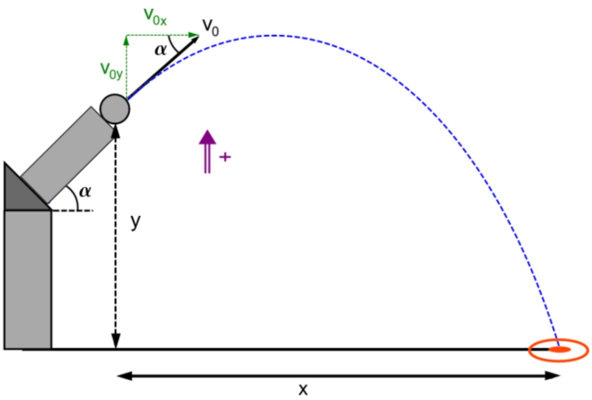
$$mg\sin\alpha - \mu_k mg\cos\alpha = ma$$

$$\Rightarrow \qquad g\sin\alpha - \mu_k g\cos\alpha = a$$

$$\Rightarrow \qquad \mu_k = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{a}{g\cos\alpha}$$

$$= \tan 22^\circ - \frac{0{,}94\ \mathrm{m/s^2}}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot \cos 22^0} = 0{,}30$$

Oppgave 4



Kulas bevegelse i henholdsvis x -og y-retningen rett etter utskytningen er:

$$x = \mathrm{v}_0\cos\alpha \cdot t$$

$$y = \mathrm{v}_0\sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

Tiden t finner vi fra den horisontale bevegelsesligningen der:

$$t = \frac{x}{\mathrm{v}_0\cos\alpha}$$

Setter denne ligningen inn i bevegelsesligningen for y-retningen:

$$y = \mathrm{v}_0\sin\alpha \cdot \frac{x}{\mathrm{v}_0\cos\alpha} - \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{x}{\mathrm{v}_0\cos\alpha}\right)^2$$

$$= x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2\mathrm{v}_0^2\cos^2\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} + \frac{gx}{2\mathrm{v}_0^2\cos^2\alpha}$$

Oppgave 5

Sentripetalakselerasjonen a_s til legemet i posisjon B er gitt ved:

$$a_s = \frac{\mathrm{v}_B^2}{r}$$

Farta v_B finner vi fra energiloven der:

$$mgh_A = mgr + \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\mathrm{v}_B^2 = mg(h_A - r) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}_B^2 = 2g(h_A - r)$$

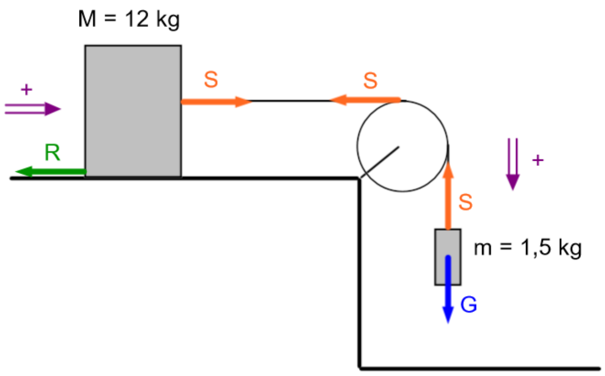
som innsatt gir:

$$a_s = \frac{2g(h_A - r)}{r}$$

Legemets totale akselerasjon blir dermed ut fra vektordiagrammet og valg av positiv retning

$$\vec{a}_{tot} = -\left(\frac{2g(h_A - r)}{r}\right)\vec{\imath} - g\,\vec{\jmath}$$

Oppgave 6



Newtons 2.lov (eller 1.lov) for dette systemet gir at:

$$mg - S = 0 \qquad (1)$$

$$S - \mu_s Mg = 0 \qquad (2)$$

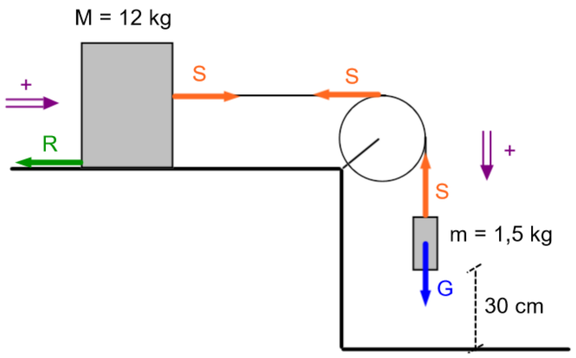
Ut fra ligning (1) er

$$S = mg$$

Innsatt i ligning (2) gir dette direkte at:

$$\mu_s = \frac{S}{Mg} = \frac{mg}{Mg} = \frac{m}{M} = \frac{1{,}5\ \mathrm{kg}}{12\ \mathrm{kg}} = 0{,}125$$

Oppgave 7



Friksjonskoeffisienten knyttet til friksjonskrafta mellom underlaget og massen M er $\mu_k = 0{,}10$.

Newtons 2.lov for begge legemer gir at:

$$mg - S = ma \qquad (1)$$

$$S - \mu_k Mg = Ma \qquad (2)$$

Setter ligning (2) inn i ligning (1):

Loddenes akselerasjon a blir ut fra dette:

$$mg - M(a + \mu_k g) = ma$$

$$\Downarrow$$

$$a(m + M) = g(m - \mu_k M)$$

$$\Downarrow$$

$$a = \frac{m - \mu_k M}{m + M}\, g$$

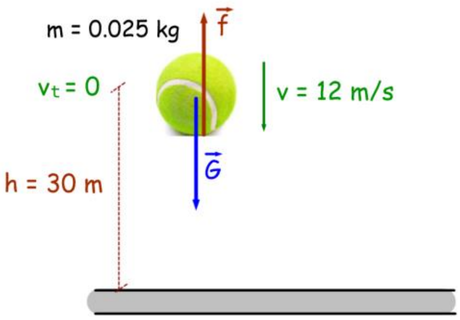
Denne akselerasjonen er konstant så tiden lodd m bruker å nå ned til bakken er:

$$s = \mathrm{v}_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{g(m - \mu_k M)}{2(m + M)} \cdot t^2$$

$$\Downarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{2s(m + M)}{g(m - \mu_k M)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}30\ \mathrm{m} \cdot (1{,}5\ \mathrm{kg} + 12\ \mathrm{kg})}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot (1{,}5\ \mathrm{kg} - 0{,}10 \cdot 12\ \mathrm{kg})}} = 1{,}659\ \mathrm{s} \approx 1{,}7\ \mathrm{s}$$

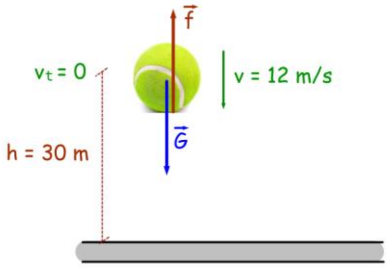
Oppgave 8



Newtons 1.lov gir direkte at:

$$G - f = 0 \;\Rightarrow\; mg = b\mathrm{v} \;\Rightarrow\; b = \frac{mg}{\mathrm{v}} = \frac{0{,}025\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}{12\ \mathrm{m/s}} = 0{,}0204\ \mathrm{kg/s} \approx 20\ \mathrm{g/s}$$

Oppgave 9



Tennisballens holdes i ro på toppen av banen. Den har da en total mekanisk energi lik:

$$U = mgh_t$$

Tennisballens kinetiske energi idet den når terminalhastigheten v er videre gitt ved:

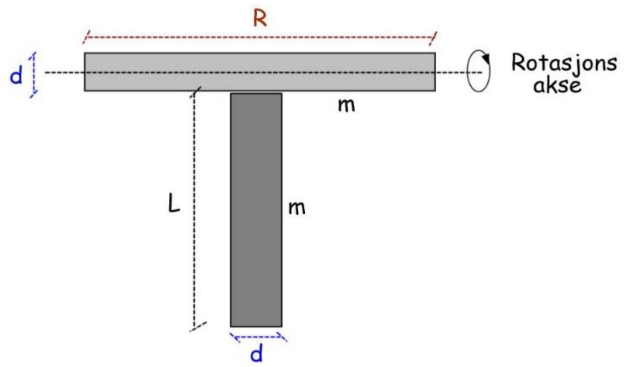
$$U - E_{K,t} \neq 0$$

Mengden energi som går tapt underveis i fallbevegelsen blir dermed:

$$\frac{U - E_{K,t}}{U} = \frac{mgh_t - \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2}{mgh_t} = 1 - \frac{\mathrm{v}^2}{2gh_t} = 1 - \frac{(12\ \mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 30\ \mathrm{m}} = 0{,}755 \approx 0{,}76$$

Det vil si: 76% av den totale mekaniske energien går tapt.

Oppgave 10



Den horisontale sylinderformede staven med akse gjennom massemiddelpunktet har treghets- moment:

$$I_1 = \frac{1}{2}m \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}md^2$$

Den vertikale sylinderformede staven som er festet på undersiden av den horisontale staven har et treghetsmoment (Steiners setning):

$$I_2 = m\left(\frac{L}{2} + \frac{d}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}mL^2$$

Treghetsmoment for hele T-nøkkelen blir dermed av størrelsesorden:

$$I_{tot} = I_1 + I_2 = \frac{1}{8}md^2 + m\left(\frac{L^2}{4} + \frac{Ld}{2} + \frac{d^2}{4}\right) + \frac{1}{16}md^2 + \frac{1}{12}mL^2$$

$$= \frac{1}{8}md^2 + \frac{1}{4}mL^2 + \frac{1}{2}mLd + \frac{1}{4}md^2 + \frac{1}{16}md^2 + \frac{1}{12}mL^2$$

$$= \frac{7}{16}md^2 + \frac{1}{3}mL^2 + \frac{1}{2}mLd$$

Oppgave 11

ω = 200 rpm
d = 0,75 m
t = 60 s

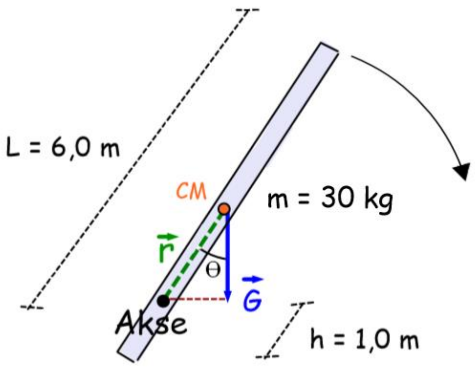
Syklistens lineære hastighet v er:

$$\mathrm{v} = \frac{d}{2} \cdot \omega = \frac{d}{2} \cdot \frac{200 \cdot 2\pi}{60\ \mathrm{s}} = \frac{0{,}75\ \mathrm{m} \cdot 200 \cdot 2\pi}{120\ \mathrm{s}} = 7{,}85\ \mathrm{m/s}$$

Distansen s sykelisten forflytter seg i løpet av ett minutt blir dermed:

$$s = \mathrm{v} \cdot t = 7{,}85\ \mathrm{m/s} \cdot 60\ \mathrm{s} = 471\ \mathrm{m}$$

Oppgave 12



Kraftmomentet τ er gitt ved:

$$\vec{\tau} = \vec{r}\ x\ \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \tau(\theta) = F \cdot (r \cdot \sin\theta)$$

Uttrykket over angir at τ er en variabel størrelse ettersom arma r (brun stiplet linje i figuren) varierer med vinkelen θ . Det infinitesimale mekaniske arbeidet dW utført over en infinitesimal rotasjon $d\theta$ er videre gitt ved:

$$dW = \tau(\theta) d\theta$$

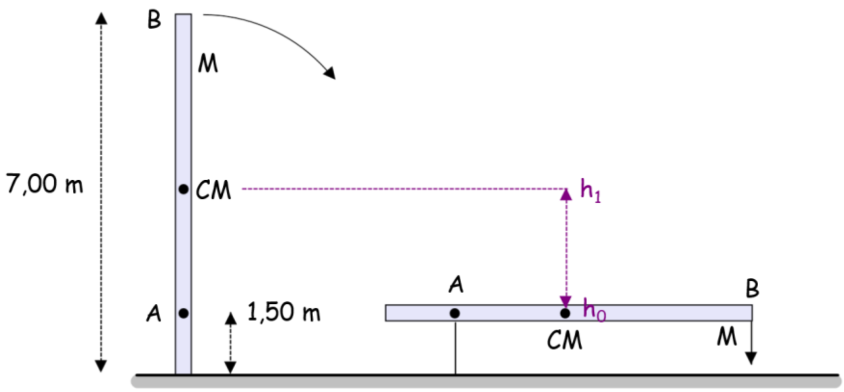
Det totale mekaniske arbeidet W etter en rotasjon på $60°$ blir dermed:

$$W = \int_0^{60°} F \cdot r \cdot \sin\theta \ d\theta = \int_0^{60°} G \cdot \left(\frac{L}{2} - h\right) \sin\theta \, d\theta$$

$$= G\left(\frac{L}{2} - h\right)[-\cos\theta]_0^{60°} = mg\left(\frac{L}{2} - h\right)(-\cos 60° + \cos 0°)$$

$$= 30\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot \left(\frac{6{,}0\ \mathrm{m}}{2} - 1{,}0\ \mathrm{m}\right) \cdot (-\cos 60° + 1) = \ 294\ \mathrm{J}$$

Oppgave 13



Ettersom stanga har jevn massefordeling, befinner stangas massemiddelpunkt seg nøyaktig på midten av stanga. Settes nullhøyden ved bakken er stangas potensielle energi før den faller dermed gitt ved:

$$U_1 = \frac{MgL}{2} = \frac{30\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 7{,}00\ \mathrm{m}}{2} = 1030\ \mathrm{J}$$

Idet den befinner seg i horisontalstillingen, har den en tilsvarende potensiell energi:

$$U_0 = Mgh = 30\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 1{,}50\ \mathrm{m} = \ 441{,}5\ \mathrm{J}$$

Stangas treghetsmoment I om aksepunktet A finner ved bruk av Steiners sats:

$$I = M(h_1 - h_0)^2 + \frac{1}{12}ML^2$$

$$= 30\ \mathrm{kg} \cdot (3{,}50\ \mathrm{m} - 1{,}50\ \mathrm{m})^2 + \frac{1}{12} \cdot 30\ \mathrm{kg} \cdot (7{,}00\ \mathrm{m})^2 = 242{,}5\ \mathrm{kgm^2}$$

Stangas vinkelhastighet ω finner vi ut fra at den totale mekaniske energien er bevart:

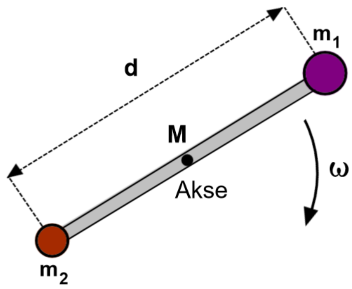
$$K_0 = U_1 - U_0 \ \Rightarrow \quad I\omega^2 = 2(U_1 - U_0)$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2(U_1 - U_0)}{I}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (1030\ \mathrm{J} - 441{,}5\ \mathrm{J})}{242{,}5\ \mathrm{kgm^2}}} = 2{,}20\ 1/\mathrm{s}$$

Den lineære hastigheten som toppen av flaggstanga har idet den ligger horisontalt er dermed:

$$\mathrm{v} = (L - h_0) \cdot \omega = 12{,}1\ \mathrm{m/s}$$

Oppgave 14



Stavens dreieimpuls om aksen er gitt ved:

$$L = I\omega$$

Stavens treghetsmoment I finner vi fra Steiners setning der:

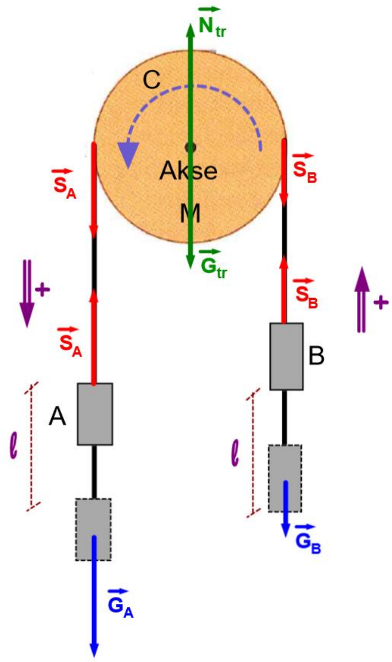
$$I = \frac{1}{12}Md^2 + m_1 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 + m_2 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)$$

Dreieimpulsen L blir dermed:

$$L = \frac{d^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)\omega$$

$$= \frac{(1{,}2\ \mathrm{m})^2}{4} \cdot \left(\frac{10\ \mathrm{kg}}{3} + 1{,}0\ \mathrm{kg} + 2{,}0\ \mathrm{kg}\right) \cdot 12\ 1/\mathrm{s} = \ 27{,}4\ \mathrm{kgm^2/s}$$

Oppgave 15



Det mekaniske arbeidet W som de to loddene til sammen utfører på trinsa er gitt ved:

$$W = \tau \cdot \theta = (S_A - S_B)R \cdot \theta$$

$$= (S_A - S_B)R \cdot \frac{l}{R} = (S_A - S_B) \cdot l$$

Snordragene S_A og S_B finner vi ved å anvende Newtons 2.lov basert på kraftdiagrammet i figuren til venstre der

$$S_B - G_B = m_B a \qquad (2)$$

$$G_A - S_A = m_A a \qquad (3)$$

Fra ligning (2) og (3) finner vi de to snordragene S_A og S_B der:

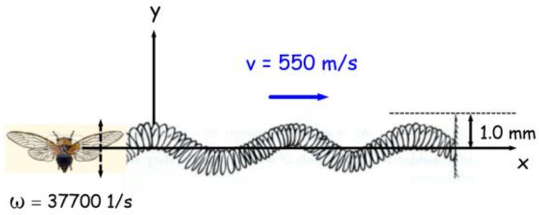
$$S_B = m_B a + m_B g = \frac{m_A(a + g)}{2} \qquad \text{og} \qquad S_A = m_A g - m_A a = m_A(g - a)$$

Ved å sette inn disse uttrykkene for S_A og S_B finner vi at det mekaniske arbeidet W på trinsa er:

$$W = \left(m_A(g - a) - \frac{m_A(a + g)}{2}\right) \cdot l = m_A\left(g - \frac{g}{2} - a - \frac{a}{2}\right) \cdot l = \frac{m_A \cdot l}{2}(g - 3a)$$

Mekaniske bølger!

Oppgave 16



Bølgas vinkelfrekvens ω er gitt ved:

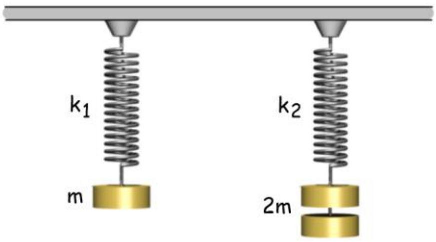
$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{\mathrm{v}}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi \mathrm{v}}{\omega} = \frac{2\pi \cdot 550\ \mathrm{m/s}}{3{,}77 \cdot 10^{4}\ 1/\mathrm{s}} = 0{,}0917\ \mathrm{m} \approx 9{,}2\ \mathrm{cm}$$

Oppgave 17

Den totale energien som sikaden produserer for å gjennomføre 1000 hele svingninger er

$$E_{tot} = 1000 \cdot \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 25\ \mathrm{N/m} \cdot (1{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m})^2 = 1{,}25 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{J}$$

Oppgave 18



Frekvensen til en harmonisk svingning er generelt gitt ved:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Har oppgitt at lodd-fjær systemet til venstre har en frekvens f_1 som er 5 ganger høyere enn den tilsvarende frekvensen f_2 for systemet til høyre. Det vil si:

$$f_1 = 5 f_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 5 \cdot \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$$

$$\Rightarrow \frac{k_1}{m_1} = 25 \cdot \frac{k_2}{m_2} \quad \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = 25 \cdot \frac{m_1}{m_2}$$

Med $m_2 = 2m_1$ blir dermed forholdet mellom fjærstivhetene av størrelsesorden:

$$\frac{k_1}{k_2} = 25 \cdot \frac{m_1}{2m_1} = 12.5$$

Oppgave 19

Når to identiske bølger med motsatt fartsretning møtes, vil det oppstå stående bølger. Resultantbølgen er gitt ved

$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$$

der bølgetallet $k = 2\pi/\lambda$ er identisk med bølgetallet k for de to individuelle bølgene som produserer den stående bølga. Ettersom k ikke endrer seg vil heller ikke bølgelengden λ endre seg. Med andre ord: Det resulterende bølgemønsteret er en stående bølge med bølgelengde lik λ.

Oppgave 20

Grunnfrekvensen til strengen er gitt som:

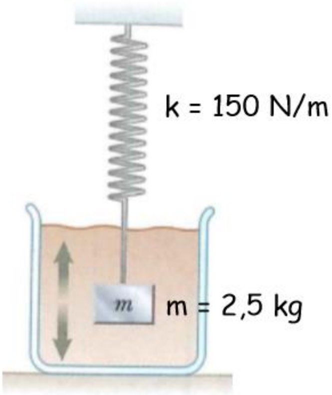
$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

der L er strengens lengde, F er krafta som spenner opp strengen i festepunktene og $\mu = m/L$ er strengens lineære massetetthet. Strenges snorstramming F er ut fra denne sammenhengen

$$(2fL)^2 = \frac{F}{\mu} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{m}{L}\cdot 4L^2f^2 = 4mLf^2$$

$$\Rightarrow \quad F = 4\cdot 4{,}6\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}\cdot 0{,}70\ \mathrm{m}\cdot 92{,}5\ \mathrm{Hz} = 1{,}10\cdot 10^2\ \mathrm{N}$$

Oppgave 21



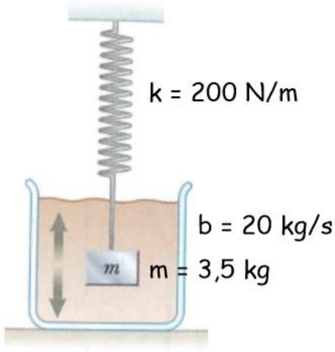
Loddet utfører dempede svingninger så lenge betingelsen:

$$b^2 < 4mk \quad \Rightarrow \quad b < \sqrt{4mk}$$

er oppfylt. Her er b væskas dempningskoeffisient, m er loddets masse og k er fjæras stivhet. Med andre ord: Dempede svingninger oppstår når:

$$b < \sqrt{4\cdot 2{,}5\ \mathrm{kg}\cdot 150\ \mathrm{N/m}} = 38{,}7\ \mathrm{kg/s}$$

Oppgave 22



Svingefunksjonen er oppgitt til å være på formen:

$$y(t) = A(t) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} t + \phi\right) = A(t) \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

der $A(t)$ angir amplituden som funksjon av tiden t. Ut fra dette uttrykket kan vi hente ut svingefrekvensen som er gitt ved

$$\omega = \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

Med de oppgitte verdiene for dempningskoeffisienten b, loddets masse m og fjær-stivheten k blir

$$b^2 - 4mk < 0$$

noe som medfører at ω blir en kompleks størrelse. Svingefrekvensen er av denne grunn gitt som en kvasifrekvens ω_D der:

$$\omega_D = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m} = \frac{\sqrt{4 \cdot 3{,}5\ \mathrm{kg} \cdot 200\ \mathrm{N/m} - (20\ \mathrm{kg/s})^2}}{2 \cdot 3{,}5\ \mathrm{kg}} = 7{,}0\ 1/\mathrm{s}$$