NTNU **Institutt for fysikk**

Faglig kontakt under eksamen:
Dr. Anh Kiet Nguyen (for faglærer Professor Arne Brataas)
Telefon: 73551093

Eksamen i TFY4205 Kvantemekanikk

August, 2006
9:00–13:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C
Godkjent lommekalkulator.
K. Rottman: *Matematische Formelsammlung*
Barnett and Cronin: *Mathematical formulae*

Dette oppgavesettet er på 3 sider.

Oppgave 1. Impuls representasjonen
En partikkel med masse m påvirkes av en kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$ slik at bølgefunksjonen $\phi(\mathbf{p})$ er løsning av Schrödinger-ligningen i impuls-representasjonen

$$\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - a\hbar^2\nabla_p^2\right)\phi(\mathbf{p},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{p},t)\,, \tag{1}$$

der a er en reell konstant, $\hbar = h/(2\pi)$, h er Plancks konstant og

$$\nabla_p^2 = \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_z^2}\,. \tag{2}$$

Finn kraften $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Oppgave 2. Harmonisk oscillator
Hamilton-funksjonen for en harmonisk oscillator kan skrives dimensjonsløst ($m = \hbar = \omega = 1$) som

$$\hat{H} = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\,, \tag{3}$$

der

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x} + i\hat{p}\right)\,, \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x} - i\hat{p}\right)\,, \tag{4}$$

og $\hat{x}$ er posisjons-operatoren og $\hat{p}$ er impuls-operatoren. En ikke-normalisert energi egenfunksjon er

$$\psi_a = \left(2x^3 - 3x\right)\exp -x^2/2\,. \tag{5}$$

a) Finn de to (ikke-normaliserte) nærmeste energi egenfunksjoner til ψ_a.

Hint: I Fock representasjonen av en harmonisk oscillator er $\hat{a}$ og $\hat{a}^\dagger$ destruksjons- og kreasjons-operatorer slik at

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle\,, \tag{6}$$
$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle\,, \tag{7}$$

der

$$\hat{H}|n\rangle = \left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle\,. \tag{8}$$

b) Vi vil nå gjenintrodusere dimensjonene på de fysiske størrelsene og skriver Hamilton-funksjonen ved hjelp av impuls- og posisjons-operatorene:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\,. \tag{9}$$

Finn tidsavhengigheten til forventningsverdiene til 'start posisjons' og 'start impuls' operatorene gitt ved

$$\hat{x}_0 = \hat{x}\cos\omega t - \frac{\hat{p}}{m\omega}\sin\omega t\,, \tag{10}$$
$$\hat{p}_0 = \hat{p}\cos\omega t + m\omega\hat{x}\sin\omega t\,. \tag{11}$$

c) Beregn kommutatoren $[\hat{p}_0, \hat{x}_0]$. Hva er betydningen av dette resultatet for målinger av de fysiske størrelsene i systemet?

Oppgave 3. Partikkel i et periodisk potensial

En partikkel med masse m beveger seg i et en-dimensjonalt periodisk potensial. Potensialet er null de fleste steder, men i små områder med bredde b i avstand a ($b \ll a$) fra hverandre er potensialet V_0, der V_0 er en stor positiv konstant. Vi kan tenke på dette potensialet som en sum av Dirac delta funksjoner:

$$V(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_0 b\delta(x-na)\,. \tag{12}$$

a) Vis at de relevant grensebetingelse for bølgefunksjonen er

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x=na+\epsilon} - \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x=na-\epsilon} = 2\Omega\psi(na)\,, \tag{13}$$

der $\epsilon \to 0$ og $\Omega = mV_0b/\hbar^2$, n er et heltall og

$$\psi(na+\epsilon) - \psi(na-\epsilon) = 0\,. \tag{14}$$

b) Anta at den laveste energi-tilstanden for en partikkel som kan bevege seg i dette potensialet er $E_0 = \hbar^2k_0^2/(2m)$ (som definerer k_0). Skriv ned en ligning (ikke en differensial-ligning) som kan bli løst for å finne k_0 og dermed E_0. (Det er ikke nødvendig å løse denne ligningen).

c) Finn et uttrykk for bølgefunksjonen for en partikkel med energi E_0 som er gyldig i området $0 \leq x \leq a$. (Vi velger en normalisering og fase slik at $\psi(x = 0) = 1$). Hva skjer med bølgefunksjonen mellom $x = a$ og $x = a + b$?

d) Vis at det er energi-intervaller E, større enn E_0, der det ikke finnes en energi egenfunksjon. Finn (eksakt) den energien der det første slike energi-gapet starter.