NTNU

Fakultet for Naturvitenskap og Teknologi

Institutt for Fysikk

# Eksamen TFY 4230 Statistisk Fysikk

Faglærar: Professor Jens O. Andersen

Instititutt for Fysikk, NTNU

Telefon: 73593131

Tirsdag 5 desember 2006

09.00-13.00

Hjelpemiddel:

Godkjend kalkulator

Rottmann: Matematisk Formelsamling

Rottmann: Matematische Formelsammlung

Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

## Oppgave 1

Ein partikkel bevegar seg i ein romleg dimensjon i eit potensial $V(x) = V_0\sqrt{|x|}$, der $V_0$ er ein positiv konstant. Hamiltonfunksjonen er

$$H = \frac{p^2}{2m} + V_0\sqrt{|x|} \; ,$$

der $m$ er massen til partiklen. Partiklen har energi $E$ i det mikrokanoniske ensemblet. Sannsynlegheitsfordelinga $P(p,x)$ er

$$P(p,x) \;\; = \;\; c\,\delta(E-H) \; ,$$

der $c$ er ein normaliseringskonstant.

a) Vis at den normaliserte marginalfordelinga $P(p)$ er gitt ved

$$P(p) \;=\; \frac{3}{4}\frac{1}{E\sqrt{2mE}}\left(E - \frac{p^2}{2m}\right) \;,$$

for $|p| \leq \sqrt{2mE}$ og null ellers. Skisser funksjonen $P(p)$.

b) Rekn ut forventningsverdien $\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle$. Bruk dette resultatet til å finne forventningsverdien $\langle\sqrt{|x|}\rangle$.

Vi skal nå sjå på dette systemet i det kanoniske ensemblet ved temperaturen $T$.

c) Rekn ut partisjonsfunksjonen $Z$. Hint: Bruk substitusjonen $y = \sqrt{x}$.

d) Rekn ut forventningsverdien $\langle\sqrt{|x|}\rangle$. Uttrykk svaret ved $\langle E\rangle$ og $V_0$. Samanlikn resultatet med svaret du fekk i b).

## Oppgave 2

Ein partikkel kan vere i to tilstandar med energi $\epsilon_1 = -\epsilon_0$ og $\epsilon_2 = \epsilon_0$, der $\epsilon_0$ er ein konstant. For eit system med $N$ slike partiklar som er skillbare og som ikkje vekselverkar er den kanoniske partisjonsfunksjonen $Z_N$ er da gitt ved

$$Z_N \;=\; 2^N \cosh^N(\beta\epsilon_0) \;, \qquad N = 1, 2, 3...$$

Definer i tillegg $Z_0 = 1$. I denne av oppgava skal vi studere dette systemet i det storkanoniske ensemblet.

a) Vis at den storkanoniske partisjonsfunksjonen er gitt ved

$$\Theta \;=\; \frac{1}{1 - 2e^{\beta\mu}\cosh(\beta\epsilon_0)} \;.$$

b) Rekn ut det midlere partikkeltalet $\langle N\rangle$.

c) Bruk dette resultatet til å rekne ut det kjemiske potensialet $\mu$ som funksjon av $\langle N\rangle$, $\beta$, og $\epsilon_0$.

d) La $P(N)$ vere sannsynlegheiten for at det er nøyaktig $N$ partiklar i systemet. Uttrykk $P(N)$ ved hjelp av $N$ og $\langle N\rangle$.

# Oppgave 3

I denne oppgava skal vi studere ein ideell Fermigass i to romlege dimensjonar. Massen til fermiona er $m$ og volumet er $V = L^2$. Det er ingen degenerasjon. I den termodynamiske grensa er partikkeltettheiten, energitettheiten og trykket gitt ved uttrykka

$$
\begin{aligned}
\rho &= \frac{1}{\hbar^2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} , \\
\frac{E}{V} &= \frac{1}{\hbar^2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} , \\
P &= \frac{k_B T}{\hbar^2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln\left[1+e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\right] ,
\end{aligned}
$$

der $\mu$ er det kjemiske potensialet og $\epsilon = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$.

a) Ta grensa $T \to 0$ og vis at partikkeltettheiten er gitt ved

$$\rho = \frac{p_F^2}{4\pi\hbar^2} ,$$

der Fermi-impulsen $p_F$ er definert ved $\mu = \sqrt{p_F^2c^2 + m^2c^4}$.

b) Ta grensa $T \to 0$ og vis at energitettheiten og trykket er gitt ved

$$
\begin{aligned}
\frac{E}{V} &= \frac{1}{6\pi\hbar^2c^2}\left[\left(p_F^2c^2+m^2c^4\right)^{3/2} - m^3c^6\right] , \\
P &= \frac{1}{12\pi\hbar^2}\left[3p_F^2\sqrt{p_F^2c^2+m^2c^4} - \frac{2}{c^2}\left(p_F^2c^2+m^2c^4\right)^{3/2} + 2m^3c^4\right] .
\end{aligned}
$$

c) Ta den ultrarelativistiske grensa og finn tilstandslikninga.

d) Finn den ikkjerelativistiske grensa av energitettheiten ved å rekkeutvikle til fjerde orden i $y = p_F/mc \ll 1$. Kva er tolkninga av det første leddet?

# Oppgave 4

Denne oppgava består av fire oppgaver som ein kan svare på uavhengig av kvarandre.

a) Formuler ekvipartisjonsprinsippet i klassisk statistisk mekanikk.

b) Skriv ned Hamiltonfunksjonen for den ein-dimensjonale Isingmodellen med nærmaste-nabo vekselverknad i eit ytre magnetfelt og med periodiske randkrav. Forklar betydninga av dei ulike ledda. Kva er grunntilstandskonfigurasjonen for ein antiferromagnetisk Isingmodell i null ytre felt?

c) Materie i ein kvit dverg er i hydrostatisk likevekt. Gjer kort greie for dei kreftene som motverkar gravitasjonell kollaps.

d) Kva er kriteriet for ikkje-degenerajon og klassisk oppførsel til ein kvantegass?

---