Arbeid og energi [YF 6, 7 ; LL 4]

08.09.14

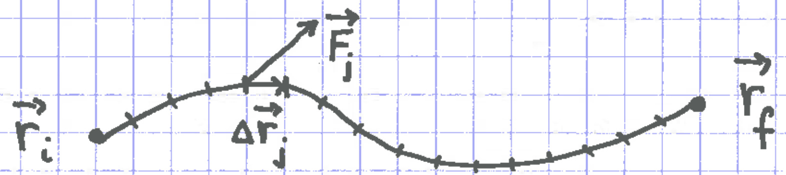
Arbeid [YF 6.1–6.3 ; LL 4.1]

$\Delta\vec{r}$ = legemets forflytning

$\Delta W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F\cdot\Delta r\cdot\cos\theta$ = arbeid utført av ytre kraft $\vec{F}$ på legemet

$[W] = N\cdot m = J$ (joule)

Generelt:



Arbeid utført ved forflytning fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_f$:

$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j\cdot\Delta\vec{r}_j \overset{\Delta r_j \to 0}{=} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

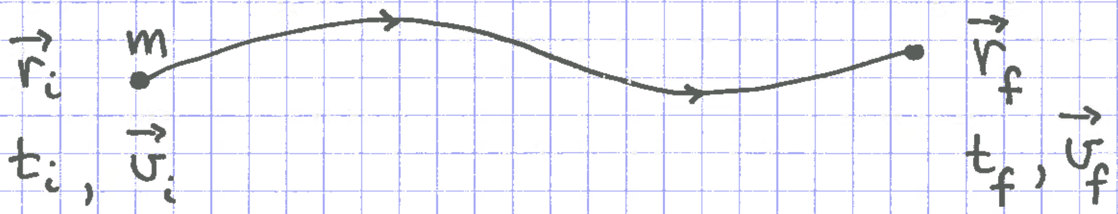
Effekt [YF 6.4 ; LL 4.1]

= arbeid (energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$[P] = J/s = W$ (watt)

Kinetisk energi [YF 6.2 ; LL 4.2]



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} \overset{N2}{=} \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt = m \int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$d(v^2) = d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v} = 2\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_{v_i^2}^{v_f^2} d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Definerer: $K = \frac{1}{2} m v^2$ = kinetisk energi

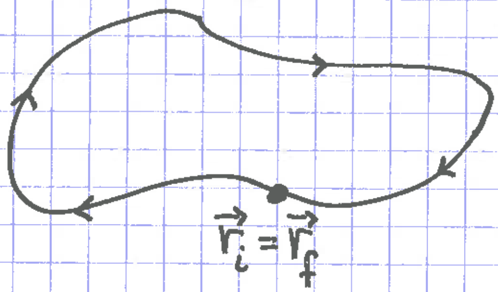
Dermed:

$$\boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$$

Arbeid W utført på legemet tilsvarer endringen ΔK i legemets kin. energi.

Konservativ kraft [YF 7.3 ; LL 4.4]

System uten tap av mekanisk energi til andre energiformer (som varme) er konservativt.



Hvis $\vec{F}$ er konservativ, er $K_f = K_i$ $(|\vec{v}_f| = |\vec{v}_i|)$, dvs $W = \Delta K = 0$

Dermed: $\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}$ ($\oint \dots$: Integral rundt lukket kurve.)

Potensiell energi [YF 7.1–7.4 ; LL 4.3–4.4]

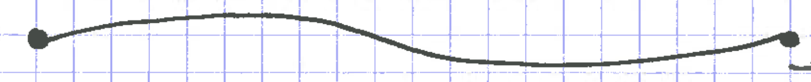
Med kons. kraft $\vec{F}$ er potensiell energi

$$\boxed{U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

Har her valgt $U(\vec{r}_0) = 0$.

Dvs: Kun forskjeller i pot. energi har fysisk betydning.

Mekanisk energibevarelse [YF 7.1–7.3; LL 4.5]



$\vec{r}_1, U_1, K_1$ $\qquad\qquad\qquad$ $\vec{r}_2, U_2, K_2$

$$U_1 - U_2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = W = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow \boxed{K_1 + U_1 = K_2 + U_2}$$

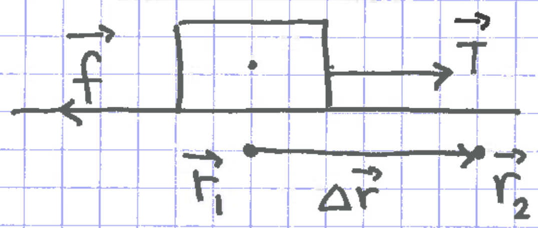
Dvs: Total mekanisk energi,

$$E = K + U,$$

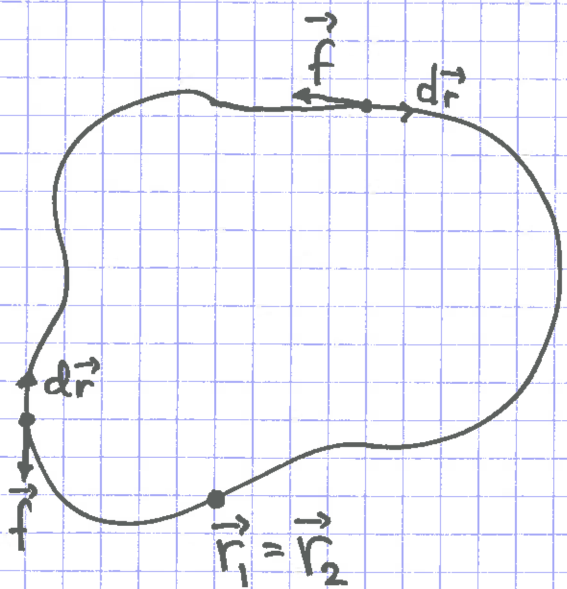
er konstant ("bevart")

for et konservativt system.

Friksjonsarbeid [YF 7.3 ; LL 4.5]



$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ fordi $\vec{f}$ alltid er rettet <u>mot</u> $d\vec{r}$. Friksjonsarbeidet W_f "går tapt": Mek. energi $\longrightarrow$ Varme



$\Rightarrow \oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$

$\Rightarrow$ Friksjonskraften $\vec{f}$ er <u>ikke</u> konservativ.

Eks: Fritt fall

$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\hat{z}$

Anta $U(0)=0$, $v(0)=0$.
Bestem $U(z)$ og $v(z)$ for $z<0$.

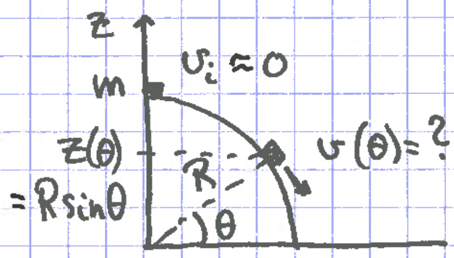
Løsn: $U(z) = -\int_0^z \underbrace{(-mg\hat{z})}_{\vec{F}} \cdot \underbrace{(\hat{z}\,dz)}_{d\vec{r}} = \underline{\underline{mgz}}$

$$E(0) = U(0) + K(0) = 0$$

$$\Rightarrow U(z) + K(z) = mgz + \frac{1}{2}m v(z)^2 = 0$$

$$\Rightarrow v(z) = \underline{\underline{\sqrt{-2gz}}}$$

Eks: Gli på kuleflate

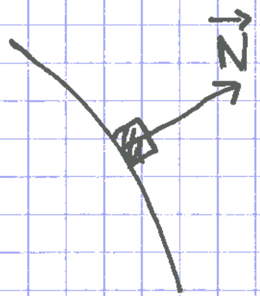


(Velg $U(0)=0$)

Løsn: E er bevart (uten friksjon)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m v(\theta)^2 + mg\,z(\theta) = mgR$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v(\theta) = \sqrt{2gR(1-\sin\theta)}}}$$



- Mister kontakten med underlaget når $N=0$; "skrått kast" derfra. Hvor skjer dette?
- Hva med friksjon?
- Hva hvis legemet kan rulle?
  Evt rulle og gli samtidig, dvs slure?

Impuls [YF 8 ; LL 5]

(= bevegelsesmengde, "(linear) momentum")

$$\text{N2}: \quad \vec{F} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} \underset{m = \text{konst.}}{\overset{\text{hvis}}{=}} \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\text{impuls} = \text{masse} \cdot \text{hastighet}$$

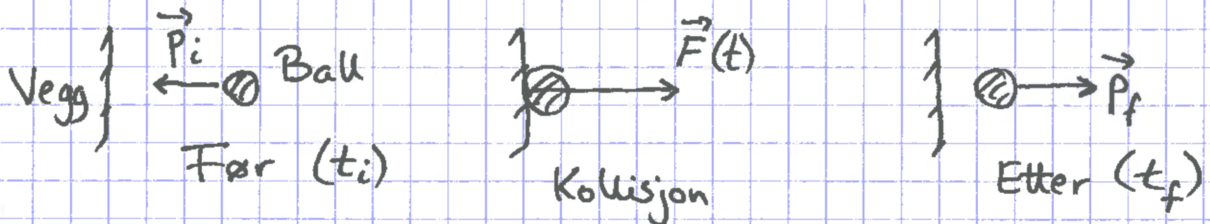
$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \qquad [p] = \text{kg m/s}$$

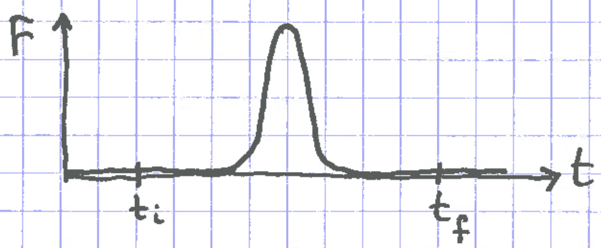
$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \quad \text{N2}$$

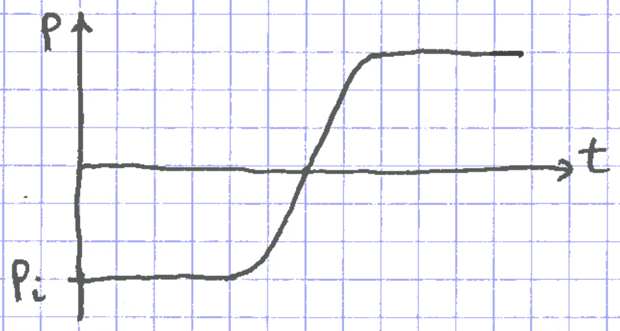
$\Rightarrow$ Lov om impulsbevarelse:

> Hvis sum av ytre krefter på et legeme er null, er legemets impuls bevart: $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konst.}$

Ytre $\vec{F}$ $\Rightarrow$ impulsendring:







$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

$$= \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p}$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt$$

Kollisjoner [YF 8.3, 8.4 ; LL 5.3]

Elastisk støt: $\Delta K = 0$ (energi bevart)

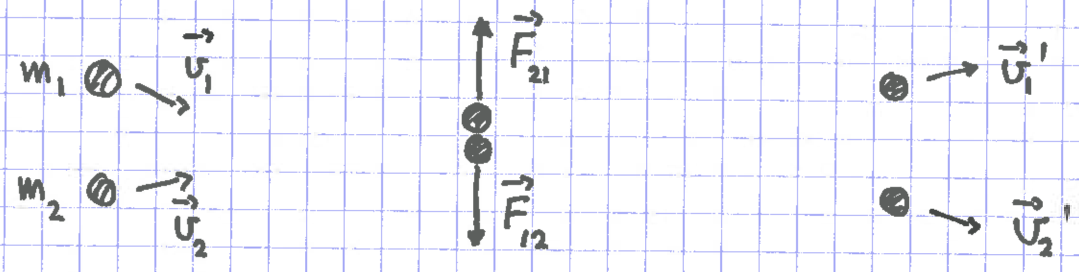
Uelastisk støt: $\Delta K < 0$ (—"— ikke bevart)

Fullstendig uelastisk støt: Legemene henger sammen, felles hastighet etter kollisjonen, max. energitap $|\Delta K|$.

Tapt mek. energi $\Delta K \rightarrow$ deformasjon, lyd, varme...

Hvis $\vec{F}_{ytre} = 0$, er $\Delta \vec{p} = 0$ for alle typer kollisjoner.

Indre krefter $\vec{F}_{ij}$ endrer ikke systemets totale impuls:



Før | Kollisjon (kort varighet Δt) | Etter

$$N3: \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \overset{N2}{\Longrightarrow} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{d}{dt}\vec{p}_{tot} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$$

Eks: Tennis-serve; anslå midlere kraft $\langle F \rangle$ og sammenlign med mg.

Løsn: $m = 57\,g$, $\Delta v = 263.4\ km/h = 73.2\ m/s$, $\Delta t \sim 7\,ms$

$$\Rightarrow \langle F \rangle = \frac{m\,\Delta v}{\Delta t} = \frac{57\cdot 10^{-3}\,kg \cdot 73.2\,m/s}{7\cdot 10^{-3}\,s} \approx \underline{600\,N}$$

$$\langle F \rangle / mg = \frac{\Delta v}{g\,\Delta t} = \frac{\langle a \rangle}{g} \approx \frac{10^4\,m/s^2}{10\,m/s^2} = \underline{1000}$$

$\Rightarrow$ OK å neglisjere den ytre kraften mg i kollisjonen

<u>Sentralt støt</u> [YF 8.2–8.4; LL 5.3]

Før (i): $\overset{m}{\bullet} \rightarrow v \qquad V \leftarrow \bullet\ M$

Etter (f): $v' \leftarrow \bullet\ m \qquad M\ \bullet \rightarrow V'$

Fortegn: $\longrightarrow +$ (dvs $v, V' > 0$ og $v', V < 0$ i fig.)

$$\Delta p = 0 \Rightarrow \underbrace{mv + MV}_{p_i} = \underbrace{mv' + MV'}_{p_f}$$

(a) Fullstendig uelastisk støt (enklest):

$$v' = V' = \frac{mv + MV}{m + M}$$

(b) Delvis uelastisk støt: Har 1 lign. ($\Delta p = 0$) for 2 ukjente (v', V') $\Rightarrow$ Trenger en opplysning til for å fastlegge v' og V'.

(c) Elastisk støt, $\Delta K = 0$:

$$\underbrace{\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2}_{K_i} = \underbrace{\frac{1}{2} m v'^2 + \frac{1}{2} M V'^2}_{K_f}$$

"Triks" (lett omskriving):

$$m(v+v')(v-v') = M(V'+V)(V'-V) \quad (1) \quad (\Delta K=0)$$

$$m(v-v') = M(V'-V) \quad (2) \quad (\Delta p=0)$$

(1) delt på (2) gir:

$$v + v' = V + V'$$

$$\Rightarrow \quad v' - V' = -(v - V) \quad (3)$$

Fra (2) og (3) fås:

$$v' = \frac{M}{m+M}\left(2V + v \cdot \frac{m-M}{M}\right)$$

$$V' = \frac{m}{M+m}\left(2v + V \cdot \frac{M-m}{m}\right)$$

Eks: Ball mot vegg, elastisk koll.

Før: $\overset{m}{\oslash} \longrightarrow v$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} V=0 \\ M \gg m \\ (M \to \infty) \end{array} \right.$ $\qquad$ Etter: $\overset{v'=?}{\longleftarrow} \overset{m}{\oslash}$ $\quad \left\{ V' = ? \right.$

- Bestem v' og V'
- Sjekk at $\Delta p = 0$ og $\Delta K = 0$

Løsn: $v' = \frac{M}{m+M}\left(0 + v\cdot\frac{m-M}{M}\right) \approx \frac{M}{M}\cdot v\cdot\left(-\frac{M}{M}\right) = \underline{-v}$

$V' = \frac{m}{M+m}\left(2v + 0\right) \approx \frac{m}{M}\cdot 2v = \underline{0}$

} Som ventet

Impulsbevarelse:

$p = mv,\ P = MV = 0,\ p' = mv' = -mv,$

$P' = MV' \approx M\cdot\frac{m}{M}\cdot 2v = 2mv$

$\Rightarrow \Delta p = -mv + 2mv - mv - 0 = 0;$ OK.

Energi bevarelse:

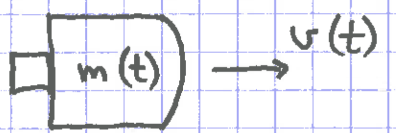
$K_m = \frac{1}{2}mv^2,\ K_M = \frac{1}{2}MV^2 = 0,\ K_m' = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}mv^2,$

$K_M' = \frac{1}{2}MV'^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}\cdot 2v\right)^2 = \frac{2m^2v^2}{M} = 0$

$\Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv^2 = 0;$ OK

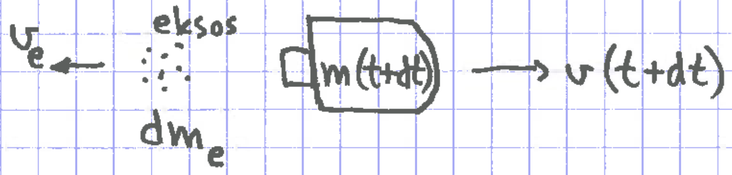
Rakettprinsipp [YF 8.6; LL 5.4]

"Før" (t):



$p(t) = m(t)v(t)$

"Etter" $(t+dt)$:



$$p(t+dt) = \underbrace{m(t+dt)}_{m(t)+dm}\ \underbrace{v(t+dt)}_{v(t)+dv} + \underbrace{dm_e}_{-dm}\cdot\underbrace{v_e(t)}_{v(t)+u}$$

med

u = eksosens hastighet relativt raketten $(u < 0)$

dm = rakettens masseendring fra t til $t+dt$ $(dm < 0)$

$$\Rightarrow p(t+dt) = \underbrace{m(t)v(t)}_{=p(t)} + m(t)dv + \underbrace{dm \cdot v(t) - dm \cdot v(t)}_{=0} - dm \cdot u$$

"Outer space": $F_{ytre} = 0 \overset{N2}{\Longrightarrow} p(t+dt) = p(t)$

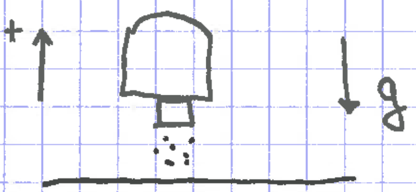
$$\Rightarrow m(t)\,dv = u\,dm$$

$$\Rightarrow m\frac{dv}{dt} = u\frac{dm}{dt} = u\dot{m}$$

$$\Rightarrow m \cdot a = F_{skyv}, \quad \text{med}$$

skyvkraft $F_{skyv} = u\dot{m} > 0$

I tyngdefeltet:



$$F_{ytre} = -mg$$

Total kraft på "rest-raketten":

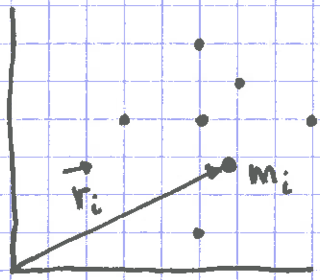
$$F_{skyv} + F_{ytre} = u\dot{m} - mg$$

$$\overset{N2}{\Longrightarrow} \quad u\dot{m} - mg = ma \qquad \text{(Øving)}$$

Til nå: Punktmasser.

Nå: Partikkelsystemer. Stive legemer.

Massesenter. Tyngdepunkt [YF 8.5, oppg 8.115 + 8.116; LL 5.6, 5.8, 6.1]

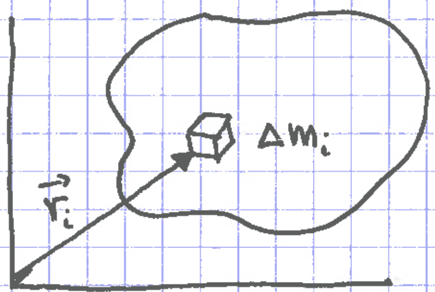


Massesenter (CM, "center of mass") for N punktmasser $m_1, m_2, \cdots, m_N$ i posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

Total masse: $M = \sum_i m_i$

Kontinuerlig massefordeling:



$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} \underset{\Delta m_i \to 0}{=} \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm}$$

$$= \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm$$

(integrerer over der vi har masse!)

Masseelement:

$dm = \rho\, dV$, ρ = masse pr volumenhet, dV = volumelement (3D)

$dm = \sigma\, dA$, σ = —"— flate —"—, dA = flate —"— (2D)

$dm = \lambda\, dl$, λ = —"— lengde —"—, dl = lengde —"— (1D)