**FY1001/TFY4145/TFY4109. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2015.**

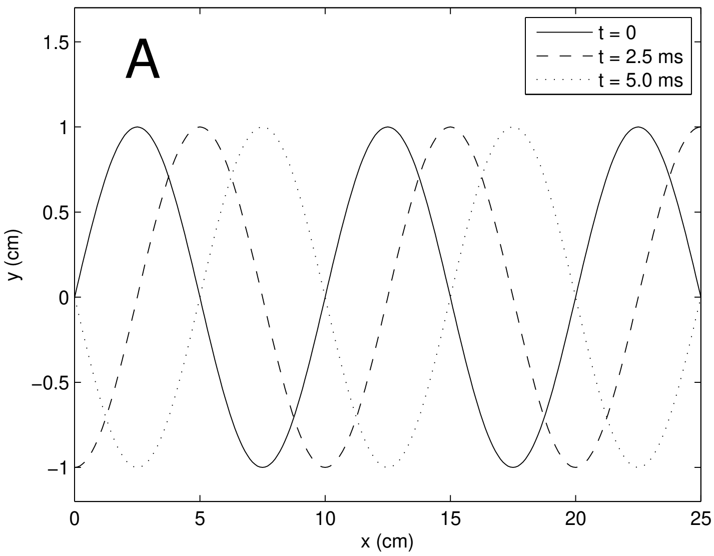
Løsningsforslag til øving 8

## Oppgave 1

*a*)

$$y = A\sin(kx - \omega t) = A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \tag{1}$$

med $A = 1.0$ cm, $T = 2\pi/\omega = 10$ ms og $\lambda = 2\pi/k = 10$ cm.
Figur:




Riktig svar: A

*b*) Siden $y = y(x - vt)$ (med $v = \omega/k$), forplanter bølgen seg i positiv $x$-retning. Riktig svar: A

*c*) Utsvinget vil bli det samme som for $t = 0$ for hver hele periode, dvs for $t = nT = 10n$ ms, der $n = 1, 2, 3, \ldots$. Riktig svar: D

*d*) Vi ser av figuren ovenfor, og har allerede i punkt *a* slått fast at $T = 10$ ms. Riktig svar: D

*e*) Vi ser av figuren ovenfor, og har allerede i punkt *a* slått fast at $\lambda = 10$ cm. Riktig svar: C

*f*) En bølgetopp forplanter seg en bølgelengde $\lambda = 10$ cm på en periode $T = 10$ ms. Altså er fasehastigheten

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.10\,\text{m}}{0.010\,\text{s}} = 10\,\text{m/s}$$

Riktig svar: D

*g*) Hastigheten til strengelementene (i $y$-retning) er gitt ved:

$$v_p = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(A\sin(kx - \omega t)\right) = -\omega A\cos(kx - \omega t). \tag{2}$$

Maksimalverdien av $\cos(kx - \omega t)$ er 1. Altså er maksimalhastighet for et strengelement:

$$v_p^{\max} = \omega A = 200\pi\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 0.010\,\mathrm{m} = 2\pi\,\mathrm{m/s} \approx 6.3\,\mathrm{m/s}$$

Riktig svar: D

*h*)

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A\sin(kx - \omega t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\omega A\cos(kx - \omega t)\right) = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t) \tag{3}$$

som har maksimalverdi

$$a^{\max} = \omega^2 A = \left(200\pi\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2 \cdot 0.010\,\mathrm{m} = 3.9 \cdot 10^3\,\mathrm{m/s}^2.$$

Riktig svar: A

*i*) Vi har

$$\sin u = \cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right).$$

Derfor, dersom vi velger $\phi = -\pi/2$, vil $y = A\cos(kx - \omega t + \phi)$ beskrive samme bølge som $y = A\sin(kx - \omega t)$.
Riktig svar: D

<u>Merknad:</u> Fra (1), (2) og (3) har vi

$$\begin{aligned}
y &= A\sin(kx - \omega t) \\
v_p &= -\omega A\cos(kx - \omega t) = -\omega A \sin\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \omega A \sin\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \omega A \sin\left[kx - \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\
a &= -\omega^2 A\sin(kx - \omega t) = \omega^2 A \sin(kx - \omega t - \pi) = \omega^2 A \sin[kx - (\omega t + \pi)].
\end{aligned}$$

Med andre ord kan vi si at $a$ i tid er faseforskjøvet $\pi/2$ foran $v_p$ som igjen er faseforskjøvet $\pi/2$ foran $y$.

## Oppgave 2

*a*)

$$\begin{aligned}
y_3 &= y_1 + y_2 \\
&= A\cos(kx - \omega t + \phi_1) + A\cos(kx - \omega t + \phi_2) \\
&= 2A\cos\frac{kx - \omega t + \phi_1 + kx - \omega t + \phi_2}{2} \cdot \cos\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \\
&= 2A\cos\left(kx - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)\cos\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \\
&= A_3\cos(kx - \omega t + \phi_3) \qquad (4)
\end{aligned}$$

der vi har satt

$$\begin{aligned}
A_3 &\equiv 2A\cos\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \equiv 2A\cos\frac{\Delta\phi}{2} \qquad (5) \\
\phi_3 &= \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \qquad (6)
\end{aligned}$$

Riktig svar: B

$b$) $|A_3|$ har maksimalverdi når

$$\left|\cos\frac{\Delta\phi}{2}\right| = 1,$$

dvs når $\Delta\phi/2 = n \cdot \pi, n = 0, 1, 2, \ldots$, dvs når $\Delta\phi = n \cdot 2\pi, n = 0, 1, 2, \ldots$.
$|A_3|$ har minimalverdi nr

$$\cos\frac{\Delta\phi}{2} = 0,$$

dvs når $\Delta\phi/2 = (2n+1) \cdot \pi/2, n = 0, 1, 2, \ldots$, dvs når $\Delta\phi = (2n+1) \cdot \pi, n = 0, 1, 2, \ldots$.

Riktig svar: B

$c$) Med de beregnede faseforskjellene fra punkt $b$) finner vi at $|A_3|^{\max} = 2A$ (bølgene adderes i fase) og $|A_3|^{\min} = 0$ (bølgene adderes i motfase). Riktig svar: A

**Oppgave 3**

*a*) Bølgehastigheten for transversale bølger på en streng er utledet i forelesningene. Vi får

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}} = \sqrt{\frac{8.5}{0.028}} \simeq 17 \text{ m/s}$$

Riktig svar: A

*b*)

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

som gir bølgelengden

$$\lambda = \frac{v}{f} \simeq 17 \text{ m}$$

Riktig svar: A

*c*) Vi har ikke dispersjon i dette systemet, så $v$ er den samme for alle bølger, uansett frekvens. Riktig svar: A

*d*) Ettersom $\lambda$ er omvendt proporsjonal med $f$, vil en frekvens på 3.0 Hz resultere i en bølgelengde på ca 5.8 m. Riktig svar: D

*e*) og *f*) Vi har harmoniske bølger som kan beskrives ved

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi)$$

der $k = 2\pi/\lambda$ er bølgetallet og $\phi$ en fasekonstant. Vi velger $x = 0$ ved svingekilden og har

$$y(0,t) = A\cos(-\omega t + \phi) = A\cos\omega t$$

som gir $\phi = 0$ siden $\cos u = cos(-u)$. Dermed er bølgen beskrevet ved

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

For $x = 1.0$ og $x = 5.0$ m får vi

$$y(1.0,t) \simeq A\cos\left(2\pi\frac{1.0}{17} - 2\pi t\right)$$
$$y(5.0,t) \simeq A\cos\left(2\pi\frac{5.0}{17} - 2\pi t\right)$$

med $t$ målt i sekunder. Riktig svar: B (på begge)

*g*) Faseforskjellen mellom utsvinget i disse to posisjonene er

$$\Delta\phi = \frac{8\pi}{17} \simeq 1.4 \simeq 83^\circ$$

Riktig svar: C

**Oppgave 4**

*a*) Små transversale utsving på en slik streng oppfyller bølgeligningen

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{S}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},$$

og det eneste vi krever av funksjonen $\xi(x,t)$ er at den kan skrives på formen $f(x-vt)$ eller $g(x+vt)$, eller en kombinasjon av disse to, der $f$ og $g$ er vilkårlige to ganger deriverbare funksjoner. Den oppgitte gaussformede bølgepulsen er på en slik form ($\xi(x-vt)$) og representerer dermed en mulig bølgepuls langs strengen. Riktig svar: A

*b*) Bølgen propagerer i positiv $x$-retning. Riktig svar: A

*c*) Som utledet i forelesningene, og som vi ser av ligningen ovenfor, har vi

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

(Uttrykket på høyre side har dimensjon

$$\sqrt{\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}^2}{\mathrm{kg/m}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \mathrm{m/s}$$

som er det vi skal ha.) Riktig svar: B

*d*) Bølgepulsens energi endrer seg ikke med tiden. Vi kan derfor beregne $E$ for et hvilket som helst tidspunkt, for eksempel $t=0$. Med energi $\varepsilon(x,0)\,dx$ på intervallet $(x, x+dx)$, må total energi være

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x,0)\,dx.$$

Vi har, med $t=0$,

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \xi_0(-2x/a^2)e^{-x^2/a^2},$$

som gir

$$\varepsilon(x,0) = \frac{2\mu v^2\xi_0^2}{a^2}\frac{2x^2}{a^2}e^{-2x^2/a^2}.$$

Vi substituerer $\beta = \sqrt{2}x/a$ som gir (med $dx = a\,d\beta/\sqrt{2}$)

$$E = \frac{2\mu v^2\xi_0^2}{\sqrt{2}a}\int_{-\infty}^{\infty}\beta^2 e^{-\beta^2} = \frac{2\mu v^2\xi_0^2}{\sqrt{2}a}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}\mu v^2\xi_0^2}{\sqrt{2}a}$$

Så til tross for at det er fristende å insistere på alternativ D: Riktig svar er: C