Institutt for fysikk, NTNU
FY1013 Elektrisitet og magnetisme II
Høst 2005

Løsningsforslag til øving 3

Veiledning mandag 12. og onsdag 14. september

Oppgave om pn-overgang

a) Vi må ha like mye negativ ladning i området $[-x_p, 0]$ som positiv ladning i området $[0, x_n]$. Dermed:

$$x_p N_A = x_n N_D \quad \Rightarrow \quad x_p = x_n \frac{N_D}{N_A}$$

Sperresonens utstrekning blir

$$W = x_n + x_p = x_n \left(1 + \frac{N_D}{N_A}\right)$$

b) Utledning av Poissons ligning:
Gauss' lov for $\boldsymbol{E}$, på differensialform:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Her er ρ fri ladning pr volumenhet, og ε er mediets permittivitet. Sammenhengen mellom felt og potensial:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

som innsatt i Gauss' lov gir

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

For å bestemme $E(x)$ og $V(x)$ integrerer vi Poissons ligning henholdsvis en og to ganger. La oss begynne utenfor sperresonen. Her er $\rho = 0$ slik at

$$E(x) = -\frac{dV}{dx} = E_\pm = 0$$

Det konstante elektriske feltet E_+ (evt E_-) på n-siden (evt p-siden) må være lik null. I motsatt fall ville potensialforskjellen mellom høyre og venstre side bare vokse og vokse jo lenger unna sperresonen vi kommer, hvilket ikke kan stemme. (Legg merke til at vi kan betrakte sperresonen som en slags platekondensator.)
Potensialet finner vi ved å integrere en gang til:

$$V(x) = V_\pm$$

Forskjellen mellom potensialet på n-siden, V_+, og p-siden, V_- er nettopp det vi har kalt det innebygde potensialet:

$$\Delta V = V_+ - V_-$$

Deretter ser vi på forholdene inne i sperresonen. Først området $[-x_p, 0]$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2V}{dx^2} &= \frac{eN_A}{\varepsilon} \\
\Rightarrow E(x) &= -\frac{dV}{dx} = -\frac{eN_A}{\varepsilon}x + E_0 \\
\Rightarrow V(x) &= \frac{eN_A}{2\varepsilon}x^2 - E_0 x + V_0
\end{aligned}$$

Og dernest området $[0, x_n]$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2V}{dx^2} &= -\frac{eN_D}{\varepsilon} \\
\Rightarrow E(x) &= -\frac{dV}{dx} = \frac{eN_D}{\varepsilon}x + E_0 \\
\Rightarrow V(x) &= -\frac{eN_D}{2\varepsilon}x^2 - E_0 x + V_0
\end{aligned}$$

Vi må få den samme integrasjonskonstanten $E_0 = E(x = 0)$ i de to tilfellene ettersom det elektriske feltet skal være kontinuerlig overalt. E_0 kan fastlegges ved å benytte at $E(x_n) = 0$:

$$0 = \frac{eN_D}{\varepsilon}x_n + E_0 \quad \Rightarrow \quad E_0 = -\frac{eN_D}{\varepsilon}x_n$$

(Bruk av $E(-x_p) = 0$ vil gi akkurat det samme.)
Kontinuitet av $V(x)$ ved x_n og $-x_p$ gjør oss i stand til å bestemme henholdsvis V_+ og V_-:

$$\begin{aligned}
V_+ &= V(x_n) = -\frac{eN_D}{2\varepsilon}x_n^2 + \frac{eN_D}{\varepsilon}x_n^2 + V_0 \\
&= \frac{eN_D}{2\varepsilon}x_n^2 + V_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_- &= V(-x_p) = \frac{eN_A}{2\varepsilon}x_p^2 - \frac{eN_D}{\varepsilon}x_n x_p + V_0 \\
&= \frac{eN_A}{2\varepsilon}\left(\frac{N_D}{N_A}\right)^2 x_n^2 - \frac{eN_D}{\varepsilon}\frac{N_D}{N_A}x_n^2 + V_0 \\
&= -\frac{eN_D}{2\varepsilon}x_n^2\frac{N_D}{N_A} + V_0
\end{aligned}$$

Den gjenværende integrasjonskonstanten V_0 gjenspeiler vår frihet til å velge nullpunkt for potensialet etter eget forgodtbefinnende.
Det innebygde potensialet kan nå uttrykkes på formen

$$\Delta V = V_+ - V_- = \frac{eN_D}{2\varepsilon}x_n^2\left(1 + \frac{N_D}{N_A}\right)$$

c) Innsetting av tallverdier $N_D = 10^{23}$ m^{-3}, $N_A = 10^{22}$ m^{-3} og $x_n = 3 \cdot 10^{-8}$ m gir

$$\Delta V = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{23} \cdot 9 \cdot 10^{-16}}{2 \cdot 11.8 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} \cdot (1 + 10) \simeq 0.758$$

dvs 758 mV.
Det elektriske feltet $E(x)$ er lineært avhengig av x gjennom hele sperresonen. Feltet har sin maksimale verdi (dvs absoluttverdi) $E_{\max}$ i $x = 0$, mens $E = 0$ i $x = -x_p$ og i $x = x_n$. Det betyr at det innebygde potensialet ΔV, som tilsvarer arealet under kurven $E(x)$, må kunne skrives som

$$\Delta V = \frac{1}{2} W E_{\max}$$

Dermed er

$$E_{\max} = \frac{2\Delta V}{W} = \frac{2 \cdot 0.758}{3.3 \cdot 10^{-7}} \simeq 4.6 \cdot 10^6 \text{ V/m}$$

(Egentlig med et minustegn; med positiv ladning til høyre og negativ ladning til venstre må jo det elektriske feltet peke mot venstre, dvs i negativ x-retning.)

Skisse av elektrisk felt $E(x)$ og potensial $V(x)$ gjennom sperresonen: