Institutt for fysikk, NTNU
FY1013 Elektrisitet og magnetisme II
Høst 2005

Løsningsforslag til øving 7

Veiledning mandag 10. og onsdag 12. oktober

Oppgave 1

Vi har utledet et generelt uttrykk for *total* effekt overført fra vekselspenningskilden $V_0 \cos \omega t$ til kretsen:

$$\langle P \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T P(t)\, dt = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) I(t)\, dt = \frac{1}{2} V_0 |I_0| \cos \alpha$$

Her er da

$$I(t) = |I_0| \cos(\omega t - \alpha)$$

den totale strømmen som går i kretsen. Vi har sammenhengene

$$\begin{aligned}
|I_0| &= \frac{V_0}{|Z|} \\
Z &= R + iX = |Z| e^{i\alpha} \\
\tan \alpha &= \frac{X}{R} \\
\cos \alpha &= \frac{R}{|Z|} \\
|Z| &= \sqrt{R^2 + X^2}
\end{aligned}$$

så alternative uttrykk for midlere total effekt er

$$\langle P \rangle = \frac{V_0^2 R}{2|Z|^2} = \frac{V_0^2 R}{2\left(R^2 + X^2\right)}$$

Så langt generelt! La oss se hva dette gir for kretsen vår. Impedansen er

$$Z = R_0 + R_1 + i\omega L$$

slik at

$$R = R_0 + R_1$$

og

$$X = \omega L$$

Dermed har vi for totaleffekten:

$$\langle P \rangle = \frac{V_0^2 \left(R_0 + R_1\right)}{2\left[\left(R_0 + R_1\right)^2 + \left(\omega L\right)^2\right]}$$

Innsetting av oppgitte tallverdier ($\omega L = 2\pi f L = 2\pi \cdot 50 \cdot 0.16 = 50.265\ \Omega$, $R_0 + R_1 = 60\ \Omega$, $V_0 = 310$ V) gir

$$\langle P \rangle = 470.57 \text{ W} \simeq 471 \text{ W}$$

Her er det vel temmelig opplagt hvordan totaleffekten fordeler seg på kretsens to motstander ettersom summen av R_0 og R_1 inngår i uttrykket for $\langle P \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle P_0 \rangle &= \frac{V_0^2 R_0}{2\left[(R_0 + R_1)^2 + (\omega L)^2\right]} = \frac{\langle P \rangle}{6} = 78.43 \text{ W} \simeq 78 \text{ W} \\
\langle P_1 \rangle &= \frac{V_0^2 R_1}{2\left[(R_0 + R_1)^2 + (\omega L)^2\right]} = \frac{5\langle P \rangle}{6} = 392.14 \text{ W} \simeq 392 \text{ W}
\end{aligned}$$

Samme strøm passerer gjennom begge motstander, så uttrykket for utviklet effekt i hver av dem må rimeligvis bli på samme form. For å være helt sikker regner vi ut f.eks. $\langle P_0 \rangle$ fra "scratch": Spenningsfallet over R_0 er $R_0 I$ dersom det går en strøm I gjennom den. Instantan effekt i R_0 er dermed $P_0(t) = R_0 I(t) \cdot I(t) = R_0 I(t)^2$, slik at midlere effekt blir

$$\begin{aligned}
\langle P_0 \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T R_0 I^2 dt \\
&= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} R_0 |I_0|^2 \cos^2(\omega t - \alpha)\, dt
\end{aligned}$$

Integralet av $\cos^2 x$ over en hel periode av argumentet x er lik 1/2 slik at

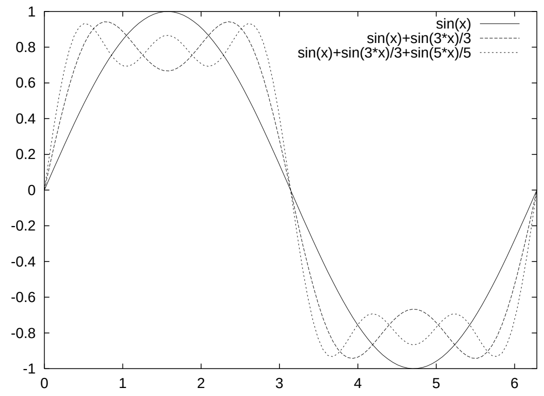
$$\langle P_0 \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \cdot R_0 |I_0|^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{2} R_0 |I_0|^2 = \frac{R_0 V_0^2}{2|Z|^2}$$

Samme framgangsmåte gir selvsagt et tilsvarende uttrykk for $\langle P_1 \rangle$.

Det kan jo bemerkes at spenningskilden her nettopp tilsvarer det du har i stikk-kontakten hjemme, nemlig vekselspenning med effektivverdi $310/\sqrt{2} \simeq 220$ V og frekvens $f = 50$ Hz.

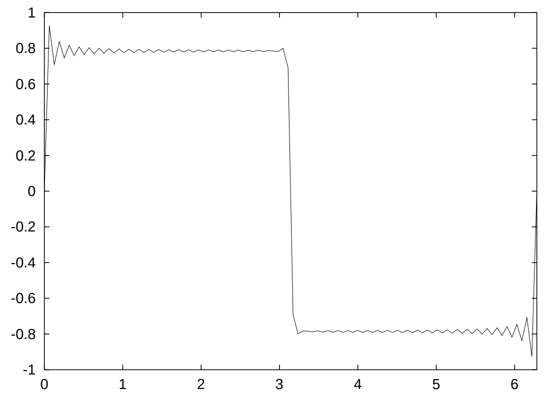
Oppgave 2

a)



(Her har jeg brukt $\omega = 1$, slik at perioden er $T = 2\pi$.)

Vi ser at v_5 tilsvarer de tre første leddene i $g(t)$. Skulle det være noen tvil om hvor dette bærer hen, er det jo bare å ta med noen flere ledd og tegne opp på ny. Men allerede med tre ledd får en vel en mistanke om at $g(t)$ må bli et "firkantsignal". I figuren nedenfor har jeg tatt med ledd til og med $n = 49$:



b) Kirchhoffs spenningsregel gir

$$R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = V_{\text{inn}}(t)$$

Innsetting av

$$V_{\text{inn}}(t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{V_0}{n} e^{in\omega t}$$

og

$$Q(t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} Q_n e^{in\omega t}$$

gir

$$\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left(in\omega R+\frac{1}{C}\right)Q_n e^{in\omega t}=\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{V_0}{n}e^{in\omega t}$$

Hvis denne ligningen skal være oppfylt ved alle tidspunkt t, må vi ha likhet mellom høyre og venstre side for alle verdier av n:

$$\begin{aligned} Q_n\left(in\omega R+\frac{1}{C}\right) &= \frac{V_0}{n} \\ \Rightarrow Q_n &= \frac{V_0 C}{n+in^2\omega RC} \end{aligned}$$

Dermed blir spenningsfallet over kondensatoren (på kompleks form)

$$V_{\mathrm{ut}}(t)=\frac{Q(t)}{C}=\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{V_0}{n(1+in\omega RC)}e^{in\omega t}$$

som vi skulle vise.

c) Dersom $\omega \gg 1/RC$, kan vi neglisjere 1 i forhold til $in\omega RC$ i nevneren i uttrykket for $V_{\mathrm{ut}}(t)$. Det gir

$$V_{\mathrm{ut}}(t)\simeq\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{V_0}{in^2\omega RC}e^{in\omega t}$$

Her erstatter vi $1/i$ med $\exp(-i\pi/2)$, som gir

$$V_{\mathrm{ut}}(t)=\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{V_0}{n^2\omega RC}e^{i(n\omega t-\pi/2)}$$

Dermed blir det fysiske spenningsfallet over kondensatoren, gitt ved imaginærdelen:

$$V_{\mathrm{ut}}(t)=\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{V_0}{n^2\omega RC}\sin\left(n\omega t-\pi/2\right)$$

Vi kan skrive

$$\sin(n\omega t-\pi/2)=-\cos n\omega t$$

slik at

$$V_{\mathrm{ut}}(t)=-\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{V_0}{n^2\omega RC}\cos n\omega t$$

Og det var det vi skulle vise.

Vi ser at dersom vi deriverer $V_{\mathrm{ut}}(t)$ med hensyn på t, får vi tilbake $V_{\mathrm{inn}}(t)/RC$. Altså representerer $V_{\mathrm{ut}}(t)$ *integralet* av $V_{\mathrm{inn}}(t)$ (dividert med konstanten RC).