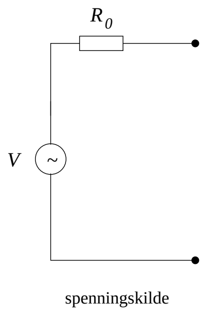
Institutt for fysikk, NTNU
FY1013 Elektrisitet og magnetisme II
Høst 2005

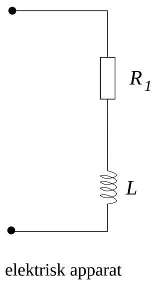
Øving 7

Veiledning: Mandag 10. og onsdag 12. oktober
Innleveringsfrist: Fredag 14. oktober

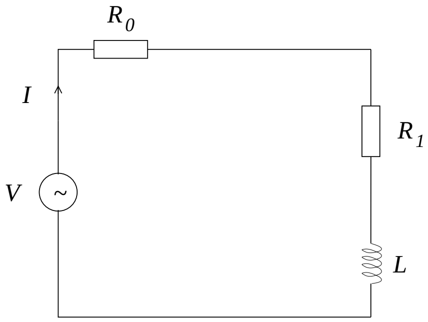
Oppgave 1

En vekselspenningskilde har alltid en viss indre motstand R_0. En slik *reell* spenningskilde kan vi representere som en *ideell* spenningskilde $V = V_0 \cos \omega t$ i serie med R_0, som vist i figuren til venstre:





Vi tenker oss nå at denne spenningskilden skal brukes til å drive et eller annet elektrisk apparat (f.eks. en motor) som kan beskrives ved en "lastmotstand" R_1 i serie med en induktans L, se figuren over til høyre. Med apparatet koblet til spenningskilden har vi dermed følgende krets:



Finn et uttrykk for (den gjennomsnittlige) effekten $\langle P_1 \rangle$ som overføres fra spenningskilden til det elektriske apparatet. Finn også effekten $\langle P_0 \rangle$ som "tapes" i spenningskilden (dvs i motstanden R_0). Bestem tallverdier for $\langle P_0 \rangle$ og $\langle P_1 \rangle$ når spenningskilden har en amplitude på 310 V, frekvens $f = 50$ Hz og indre motstand 10 Ω, mens apparatets motstand er 50 Ω og dets induktans 0.16 H.

Tallsvar: 392 W, 78 W

Oppgave 2 (litt signalanalyse, eller såkalt Fourieranalyse)

a) Tegn opp funksjonene

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \sin \omega t \\ v_3(t) &= v_1(t) + \frac{1}{3}\sin 3\omega t \\ v_5(t) &= v_3(t) + \frac{1}{5}\sin 5\omega t \end{aligned}$$

i intervallet $0 \leq t \leq 2\pi/\omega$, dvs over en periode av u_1. (Plottetips på side 3.)
Med utgangspunkt i det du har tegnet opp, hvordan tror du funksjonen

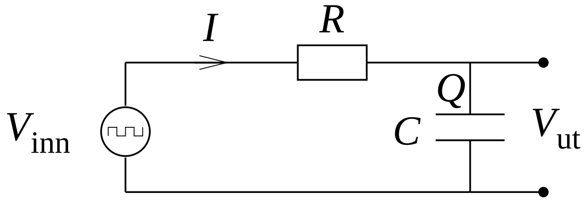
$$g(t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega t$$

blir seende ut?

b) En spenningskilde

$$V_{\text{inn}}(t) = V_0 \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\sin n\omega t}{n}$$

er koblet til en RC-krets, som vist i figuren:



Hvis vi her velger å benytte en kompleks notasjon,

$$V_{\text{inn}}(t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{V_0}{n} e^{in\omega t},$$

og tilsvarende for f.eks. ladningen Q på kondensatoren,

$$Q(t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} Q_n e^{in\omega t},$$

må vi huske på at *fysiske* spenninger, ladninger etc i dette tilfellet er representert ved *imaginærdelen*, ettersom

$$\sin \omega t = \text{Im } e^{i\omega t}$$

Vis at dersom vi legger "utgangssignalet" $V_{\text{ut}}(t)$ over kondensatoren, får vi (på kompleks form)

$$V_{\text{ut}}(t) = \frac{Q(t)}{C} = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{V_0}{n(1 + in\omega RC)} e^{in\omega t}$$

c) La oss nå anta at vinkelfrekvensen ω er svært stor i forhold til $1/RC$. Vis at spenningen over kondensatoren $V_{\rm ut}(t)$ da med god tilnærmelse kan skrives på formen

$$V_{\rm ut}(t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} V_n^{\rm ut} \cos n\omega t$$

med amplituder ("Fourier-koeffisienter")

$$V_n^{\rm ut} = -\frac{V_0}{n^2 \omega RC}$$

Hva slags matematisk "operasjon" på inngangssignalet representerer dermed utgangssignalet for slike høye frekvenser?

Oppgitt:

$$\arctan x \simeq \frac{\pi}{2}$$

dersom $x \gg 1$.

Et par tips for den som ikke allerede har sitt "favorittopplegg" for kurvetegning:

Med gnuplot (hvis du bruker linux e.l.):

```
hostname:~$ gnuplot
gnuplot> set style data lines
gnuplot> set xrange [0:6.283]
gnuplot> f(x) = sin(x) + sin(3*x)/3 + sin(5*x)/5
gnuplot> plot f(x)
```

Med matlab:

```
hostname:~$ matlab
```

...eller hvordan du nå måtte starte opp matlab. Deretter i "Command window":

```
>> x = 0:pi/100:2*pi;
>> f = sin(x)+sin(3*x)/3+sin(5*x)/5;
>> plot (x,f)
```

Begge disse variantene skulle gi et plott av funksjonen v_5. Fortsett gjerne med v_7 osv. så ser du tydelig hvor dette bærer hen.