Institutt for fysikk, NTNU
FY1303 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2004

Løsningsforslag til øving 7

Veiledning tirsdag 24. februar

Oppgave 1

Her finner vi igjen den påtrykte spenningen $V_0 \cos \omega t$ som et spenningsfall, både over kapasitansen C og over seriekoblingen av R og L. Total strøm "levert" av spenningskilden fordeler seg på de to parallellkoblede grenene:

$$I = I_C + I_R$$

der

$$I_C = \frac{V_0}{Z_C} = i\omega C V_0$$

og

$$I_R = \frac{V_0}{Z_R + Z_L} = \frac{V_0}{R + i\omega L}$$

Det er kun i motstanden at vi får dissipert effekt (dvs "taper" energi i form av varme). Det betyr at maksimal dissipert effekt må inntreffe når strømmen gjennom grenen med motstanden er størst mulig. Vi ser at det skjer når $\omega_P = 0$, dvs i grensen at spenningskilden leverer likestrøm. Da blir

$$I_R = \frac{V_0}{R}$$

og

$$I_C = 0$$

Null faseforskjell mellom V og I inntreffer dersom (den komplekse) amplituden til strømmen I er rent reell, dvs

$$I_0 = |I_0| e^{-i\alpha} = |I_0| \cos \alpha - i|I_0| \sin \alpha = \mathrm{Re} I_0 + i \mathrm{Im} I_0$$

med

$$\mathrm{Im} I_0 = 0$$

Vi finner:

$$I = I_C + I_R = i\omega C V_0 + \frac{V_0}{R + i\omega L} = V_0 \left[\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + i \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right) \right]$$

Null imaginærdel betyr

$$\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = 0$$

eller

$$\omega = \sqrt{\frac{L - CR^2}{L^2 C}}$$

Oppgave 2

For svært lave vinkelfrekvenser, dvs $\omega \ll 1/RC$, blir kondensatorens impedans $|Z_C| = 1/\omega C$ mye større enn motstandens impedans $|Z_R| = R$. Det betyr at strømmen fortrinnsvis vil passere motstanden R på sin vei gjennom parallellkoblingen av C og R. (Tenk på grensen $\omega \to 0$, dvs likespenning: Da tilsvarer kondensatoren en åpen krets, og gjennom en åpen krets går det ingen likestrøm.) Det betyr at kretsen essensielt består av to seriekoblede motstander, og Ohms lov gir direkte $I = V_0/(R+R) = 800/(4 \cdot 10^5) = 2 \cdot 10^{-3} = 2$ mA.
For å bestemme I ved en vilkårlig vinkelfrekvens ω, regner vi først ut kretsens totale impedans. Ettersom vi her har en parallellkobling av C og R i serie med R, får vi:

$$\begin{aligned}
Z &= R + (i\omega C + 1/R)^{-1} \\
&= R + \frac{R}{1+i\omega RC} \\
&= R \cdot \frac{1 + i\omega RC + 1}{1+i\omega RC} \\
&= R \cdot \frac{2 + i\omega RC}{1+i\omega RC} \\
&= R \cdot \frac{(2+i\omega RC)(1-i\omega RC)}{1+(\omega RC)^2} \\
&= R \cdot \frac{2 + (\omega RC)^2 - i\omega RC}{1+(\omega RC)^2} \\
&\equiv |Z|e^{i\alpha}
\end{aligned}$$

Dermed:

$$\begin{aligned}
|Z| &= \frac{R}{1+(\omega RC)^2}\sqrt{(2+(\omega RC)^2)^2 + (\omega RC)^2} \\
&= \frac{2R}{1+(\omega RC)^2}\sqrt{1 + \frac{5}{4}(\omega RC)^2 + \frac{1}{4}(\omega RC)^4} \\
\alpha &= \arctan\left(\frac{-\omega RC}{2+(\omega RC)^2}\right) = -\arctan\frac{\omega RC}{2+(\omega RC)^2}
\end{aligned}$$

Faktoren ωRC (som er dimensjonsløs) er med de oppgitte verdier $1000 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 4.7 \cdot 10^{-9} = 0.94$, slik at $|Z| = 1.61R = 0.32$ MΩ og $\alpha = -18°$. Strømamplituden blir $I_0 = V_0/|Z| \simeq 2.5$ mA.
Størst faseforskyvning mellom V og I har vi når argumentet til arctan-funksjonen har sin maksimale verdi. Den finner vi ved å sette den deriverte lik null ($x \equiv \omega RC$):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2+x^2}\right) &= \frac{1}{2+x^2} - \frac{2x^2}{(2+x^2)^2} \\
&= \frac{2-x^2}{(2+x^2)^2} \\
&= 0 \quad \text{for} \quad x = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Altså: Maksimal faseforskyvning når $\omega = \sqrt{2}/RC \simeq 1504$ s^{-1}.