Institutt for fysikk, NTNU
FY1303 Elektrisitet og magnetisme
Vår 2004

Løsningsforslag til øving 4

Veiledning tirsdag 3. februar

a) Med motstand R og kapasitans C i serie:

$$V_0 \cos \omega t = RI + \frac{Q}{C}$$

(Kirchhoffs spenningsregel) La oss først benytte anledningen til å reklamere for å bruke kompleks notasjon, ved å løse oppgaven *uten* kompleks notasjon!
En partikulærløsning av differensialligningen

$$R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = V_0 \cos \omega t$$

vil generelt være på formen

$$Q(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

eller, ekvivalent, på formen

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \beta)$$

Med den siste formen innsatt i ligningen fås

$$-\omega R Q_0 \sin(\omega t + \beta) + \frac{Q_0}{C} \cos(\omega t + \beta) = V_0 \cos \omega t$$

For å bestemme Q_0 og β bruker vi

$$\cos(\omega t + \beta) = \cos \omega t \cos \beta - \sin \omega t \sin \beta$$

og

$$\sin(\omega t + \beta) = \sin \omega t \cos \beta + \cos \omega t \sin \beta$$

Sammenligning av koeffisienter foran $\cos \omega t$ og $\sin \omega t$ gir da

$$\begin{aligned} -\omega R Q_0 \sin \beta + \frac{Q_0}{C} \cos \beta &= V_0 \\ -\omega R Q_0 \cos \beta - \frac{Q_0}{C} \sin \beta &= 0 \end{aligned}$$

Den siste av disse to fastlegger fasevinkelen β:

$$\tan \beta = -\omega R C$$

Da følger det at

$$\frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} = (\omega R C)^2$$

dvs

$$\frac{1-\cos^2\beta}{\cos^2\beta} = (\omega RC)^2$$

eller

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

Da kan vi bestemme Q_0 fra den første av de to ligningene ovenfor:

$$\begin{aligned}
-\omega R Q_0 \sin\beta + \frac{Q_0}{C}\cos\beta &= V_0 \\
\Rightarrow \quad \frac{Q_0}{C}\left(1-\omega RC\tan\beta\right) &= \frac{V_0}{\cos\beta} \\
\Rightarrow \quad Q_0 &= \frac{V_0 C}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}
\end{aligned}$$

Med andre ord:

$$Q(t) = \frac{V_0 C}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos\left(\omega t - \arctan\omega RC\right)$$

Strømmen $I(t)$ blir den tidsderiverte av Q:

$$I(t) = -\frac{\omega V_0 C}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\sin\left(\omega t - \arctan\omega RC\right)$$

Vi har generelt at

$$-\sin x = \cos(x+\pi/2)$$

og

$$\cos x = \cos(-x)$$

så vi kan skrive $I(t)$ på formen

$$I(t) = I_0\cos\left(\omega t - \alpha\right)$$

med

$$I_0 = \frac{\omega V_0 C}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

og

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan\omega RC$$

Litt kronglete, men overkommelig for en så enkel krets. Likefullt kan en vel se for seg at dette kan bli bortimot uhåndterbart for litt mer kompliserte kretser.
La oss bruke kompleks notasjon og overbevise oss om at vi får samme svar, bare på en enklere måte. Vi setter

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t}$$

og tilsvarende for Q og I. Kirchhoffs spenningsregel gir da

$$RQ_0 i\omega e^{i\omega t} + \frac{Q_0}{C}e^{i\omega t} = V_0 e^{i\omega t}$$

dvs

$$Q_0 = \frac{V_0 C}{1 + i\omega RC}$$

med absoluttverdi

$$|Q_0| = \frac{V_0 C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

og fasevinkel

$$\beta = -\arctan \omega RC$$

Strømmen blir

$$I(t) = \dot{Q} = i\omega Q_0 e^{i\omega t} = \frac{i\omega V_0 C}{1 + i\omega RC} e^{i\omega t}$$

dvs

$$I_0 = \frac{i\omega V_0 C}{1 + i\omega RC} = \frac{\omega V_0 C}{\omega RC - i}$$

med absoluttverdi

$$|I_0| = \frac{\omega V_0 C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

og fasevinkel (idet vi setter $I_0 = |I_0| \exp(-i\alpha)$)

$$\alpha = \arctan \frac{1}{\omega RC}$$

Altså samme svar, men mye mindre arbeid... (Du kan jo sjekke selv at fasevinkelen virkelig ble den samme, dvs du må sjekke at $\pi/2 - \arctan x = \arctan 1/x$.)

Til slutt: Er resultatet rimelig? La oss sjekke grensene "små" og "store" frekvenser:

$$\omega \to 0 : \quad |I_0| \to 0 \quad \text{og} \quad \alpha \to -\arctan \infty = -\frac{\pi}{2}$$

Dette virker fornuftig: Null likestrøm gjennom en kondensator. Dermed hele spenningsfallet over kondensatoren, og (-) 90 graders faseforskjell mellom spenning og strøm (dvs: den bittelille strømmen som går der dersom ω er bittelitt forskjellig fra null), alternativt $\beta \to 0$, dvs null faseforskjell mellom påtrykt spenning og ladning på kondensatoren.

$$\omega \to \infty : \quad |I_0| \to \frac{\omega V_0 C}{\omega RC} = \frac{V_0}{R} \quad \text{og} \quad \alpha \to -\arctan 0 = 0$$

Dette virker også fornuftig: Hele den påtrykte spenningen gjenfinnes som spenningsfall over motstanden. Det svinger for fort til at vi rekker å få ladet opp kondensatoren, $|Q_0| \to 0$.

Når vi nå har bestemt I med absoluttverdi og fasevinkel, har vi jo også bestemt kretsens impedans Z:

$$Z = \frac{V_0}{I_0} = \frac{1 + i\omega RC}{i\omega C} = R + \frac{1}{i\omega C}$$

Vi ser at seriekoblingens impedans rett og slett er lik summen av hvert enkelt seriekoblet element sin impedans, henholdsvis R for motstanden og $1/i\omega C$ for kapasitansen. En slik kompleks impedans kan vi skrive i "kartesiske koordinater",

$$Z = \mathrm{Re}Z + i\mathrm{Im}Z$$

eller i "polarkoordinater",

$$Z = |Z|e^{i\alpha}$$

For denne kretsen er

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}Z &= R \\
\mathrm{Im}Z &= -\frac{1}{\omega C} \\
|Z| &= \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} \\
\alpha &= \arctan\frac{\mathrm{Im}Z}{\mathrm{Re}Z} = -\arctan\frac{1}{\omega RC}
\end{aligned}$$

b) Med motstand R og kapasitans C i parallell:

$$V_0\cos\omega t = RI_R = \frac{Q}{C}$$

(dvs Kirchhoffs spenningsregel anvendt på begge sløyfene). Videre

$$I = I_R + I_C = I_R + \dot{Q}$$

(dvs Kirchhoffs strømregel).
Her er det faktisk omtrent like enkelt å regne med reell eller kompleks formalisme. Jeg velger den komplekse:

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t}$$

Dermed:

$$I_R = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R}e^{i\omega t}$$

og

$$Q = VC = V_0 C e^{i\omega t}$$

Altså, for total strøm:

$$I = I_R + \dot{Q} = \left(\frac{V_0}{R} + i\omega V_0 C\right)e^{i\omega t} = \frac{V_0}{R}\left(1 + i\omega RC\right)e^{i\omega t}$$

Fysisk (total) strøm på formen

$$I(t) = |I_0|\cos(\omega t - \alpha)$$

gir amplitude

$$|I_0| = \frac{V_0}{R}\sqrt{1 + (\omega RC)^2}$$

og fasevinkel

$$\alpha = -\arctan \omega RC$$

"Grensesjekk":

$$\omega \to 0: \quad |I_0| \to \frac{V_0}{R} \quad \text{og} \quad \alpha \to -\arctan 0 = 0$$

Dette virker fornuftig: Null likestrøm gjennom kondensatoren, all strøm gjennom motstanden.

$$\omega \to \infty: \quad |I_0| \to \omega V_0 C (\to \infty) \quad \text{og} \quad \alpha \to -\arctan \infty = -\pi/2$$

Dette virker også fornuftig: Maksimal ladning på kondensatoren, $Q_0 = V_0 C$, oppnås veldig raskt, så strømmen inn på kondensatoren, $I_C = \omega V_0 C$, blir stor. Strømmen gjennom motstanden, $I_R = V_0/R$, er gitt ved Ohms lov og svinger i fase med den påtrykte spenningen, uavhengig av om ω er stor eller liten. Total strøm domineres imidlertid av I_C, så fasevinkelen blir den samme som i en VC-krets.
Impedansen blir

$$Z = \frac{V_0}{I_0} = \frac{R}{1 + i\omega RC} = \frac{R - i\omega R^2 C}{1 + (\omega RC)^2}$$

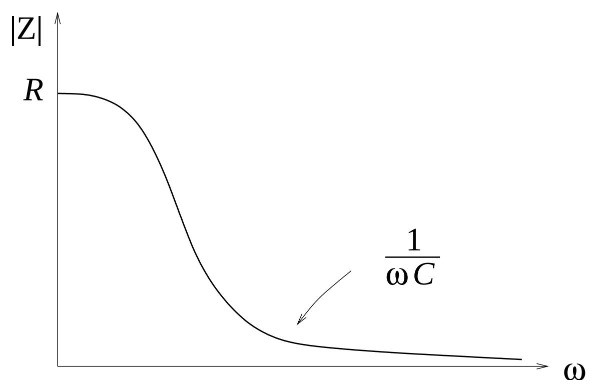
Med andre ord,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}Z &= \frac{R}{1 + (\omega RC)^2} \\
\mathrm{Im}Z &= -\frac{\omega R^2 C}{1 + (\omega RC)^2} \\
|Z| &= \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \\
\alpha &= -\arctan \omega RC
\end{aligned}$$

For små ω er $Z \simeq R$ og for store ω er $Z \simeq 1/i\omega C$.
Med dette har vi omtrent nok informasjon til å tegne en brukbar skisse av $|Z(\omega)|$. Er vi litt nøye, kan vi jo sørge for å få riktig *helning* på kurven ved $\omega = 0$:

$$\frac{d}{d\omega}|Z(\omega)|_{\omega=0} = \left[-\frac{1}{2} \cdot R \left(1 + (\omega RC)^2\right)^{-3/2} \cdot 2\omega RC \cdot RC\right]_{\omega=0} = 0$$

Med andre ord, kurven går *flatt* ut fra $|Z(0)| = R$:



Altså: Høy motstand for lave frekvenser, lav motstand for høye frekvenser; et såkalt "høypassfilter", som diskutert i forelesningene.

c) Med induktans L og kapasitans C i serie:

$$V - L\dot{I} = \frac{Q}{C}$$

dvs

$$L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} = V_0 \cos \omega t$$

Med kompleks notasjon, $V = V_0 \exp(i\omega t)$, $I = I_0 \exp(i\omega t)$ og $Q = Q_0 \exp(i\omega t)$, får vi

$$L(i\omega)^2 Q_0 + \frac{Q_0}{C} = V_0$$

eller

$$Q_0 = \frac{V_0 C}{1 - \omega^2 LC}$$

og dermed

$$I_0 = i\omega Q_0 = \frac{i\omega V_0 C}{1 - \omega^2 LC}$$

med absoluttverdi

$$|I_0| = \frac{\omega V_0 C}{|1 - \omega^2 LC|}$$

og fasevinkel (igjen, med I_0 på formen $|I_0| \exp(-i\alpha)$)

$$\alpha = \pm \arctan \frac{i}{0} = \pm \arctan \infty = \pm \frac{\pi}{2}$$

Dersom $\omega < 1/\sqrt{LC}$, blir $\alpha = -\pi/2$, dersom $\omega > 1/\sqrt{LC}$, blir $\alpha = +\pi/2$.
Impedansen for denne kretsen blir

$$Z = \frac{V_0}{I_0} = \frac{1 - \omega^2 LC}{i\omega C} = i\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}$$

altså rent imaginær. På *resonansfrekvensen*

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

har induktansen og kapasitansen like stor impedans (i abioluttverdi), men motsatt fortegn, slik at total impedans da blir lik null. Vi ser at strømamplituden da blir (uendelig) stor. I praksis vil en slik krets aldri ha null resistans. (Både tilførselsledninger og spolen har en viss resistans, muligens liten, men aldri helt lik null.) Da vil strømmens amplitude være begrenset oppad til V_0/R, der R er total resistans i kretsen.