

Magnetisme som relativistisk fenomen

Øystein Marøy

Lars Kyllingstad

23. april 2004

Sammendrag

I denne oppgaven har vi sett på magnetisme som et resultat av elektrostatikk og relativitetsteori. Vi har regnet oss fram til magnetfeltet fra forskjellige elektriske legemer ved hjelp av elektrostatikkens lover samt Einsteins spesielle relativitetsteori og vist at feltene blir det samme som det vi får ved å anvende Biot-Savarts og Ampères lover. Vi har også utledet transformasjoner for elektriske og magnetiske felt mellom ulike inertialsystemer og brukt disse transformasjonene til å regne ut de samme elektriske og magnetiske feltene som vi fant tidligere. Vi fant at alle metodene for å finne elektriske og magnetiske felt ga samme resultat og er like allmenngyldige.

Innhold

1	Innledning	2
2	Bakgrunnsteori	3
2.1	Spesiell relativitetsteori	3
2.2	Elektrostatikk	4
2.3	Elektrodynamikk	5
2.4	Magnetisk felt	6
2.4.1	Rett strømførende leder	7
2.4.2	Strømførende plan	7
2.4.3	Spole	7
3	Elektriske felt i forskjellige referansesystemer	8
3.1	Rett strømførende leder	8
3.2	Strømførende plan	10
3.3	Punktladning i uniform bevegelse	11
4	Transformasjoner av elektriske og magnetiske felt	14
4.1	Transformasjoner	14
4.2	Rett strømførende leder	16
4.3	Punktladning i uniform bevegelse	17
5	Konklusjon	18
	Bibliografi	19

Kapittel 1

Innledning

Selv om både elektrisitet og magnetisme lenge hadde vært kjente fenomener, var det først på 1800-tallet at vitenskapen begynte å se en sammenheng mellom dem. I 1820 gjorde H.C. Ørsted et eksperiment der han lot det gå strøm gjennom en leder som lå parallelt med en kompassnål. Det viste seg at når strømmen ble skrudd på vrid nålen seg 90° , og hvis strømmen ble reversert svingte nålen i motsatt retning. Denne påvisningen av sammenheng mellom elektrisitet og magnetisme satte i gang en prosess som førte til sammenslåing av elektrisk og magnetisk teori til en samlet elektromagnetisk teori.

Ampère postulerte noen år senere at alle magnetiske fenomen skyldes elektriske ladninger i bevegelse, og Faraday viste i 1831 at en magnet som beveger seg induserer en elektrisk strøm.

Arbeidet ble sluttført av Maxwell på 1880-tallet og oppsummert i de 4 ligningene som bærer hans navn.

Da Einstein i 1905 utgav det som er blitt kjent som hans spesielle relativitetsteori, var tittelen på arbeidet: *On the Electrodynamics of Moving Bodies*. Dette kan sees i sammenheng med at elektrodynamikken, i motsetning til Newtons mekanikk, allerede var konsistent med relativitetsteori. Man kunne anvende Maxwells ligninger på et objekt i et hvilket som helst inertialsystem og få det samme resultatet. Den eneste forskjellen var at de krefter som i et inertialsystem skyldes magnetisme kunne i et annet inertialsystem skyldes elektrisitet.

Ut fra relativitetsteorien og Lorentz-transformasjonene som følger av denne, kunne det vises at elektrisitet og magnetisme ikke bare henger sammen, men at magnetiske fenomener er et nødvendig resultat av elektrostatikk og relativitetsteori. Det er dette vi skal vise noen eksempler på i denne oppgaven.

Stoffet vi presenterer her bygger i stor grad på bøkene *Electricity and Magnetism* av Edward M. Purcell [1] og *Introduction to Electrodynamics* av David J. Griffiths [2].

Kapittel 2

Bakgrunnsteori

Vi antar her at grunnleggende elektrisk og magnetisk teori samt spesiell relativitetsteori er kjent, og gjennomgår mange av de uttrykkene og sammenhengene vi har bruk for uten videre utledning eller forklaring.

2.1 Spesiell relativitetsteori

Anta at vi har to referansesystemer, S_0 og S , og at de beveger seg med en fart v i forhold til hverandre. Lengdeintervaller i det ene referansesystemet vil da være kortere i det andre. La f.eks. en målestav av lengde L_0 ligge i ro i S_0 . Lengden av staven målt fra S vil da være:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \quad (2.1)$$

Dette fenomenet kalles lengdekontraksjon. Her er det viktig å huske at L_0 alltid skal være lengden av staven i det systemet der staven ligger i ro. γ er *Lorenzfaktoren*,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.2)$$

Størrelsen β vil vi også få mye bruk for:

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (2.3)$$

Det finnes et sett med generelle transformasjoner for å “oversette” koordinater fra et referansesystem til et annet, kalt *Lorentztransformasjonene*. Vi antar her at S beveger seg mot høyre langs x -aksen (dvs. positiv x -retning) i forhold til S_0 , samt at origo i de to systemene sammenfaller ved tida $t = 0$.

$$x = \gamma x_0 - \beta \gamma c t_0 \quad (2.4)$$

$$y = y_0 \quad (2.5)$$

$$z = z_0 \quad (2.6)$$

$$t = \gamma t_0 - \beta \gamma \frac{x_0}{c} \quad (2.7)$$

De motsatte transformasjonene, dvs. fra S til S_0 , finner vi ved å snu fortegnet på v og bytte indekser:

$$x_0 = \gamma x + \beta \gamma c t \quad (2.8)$$

$$y_0 = y \quad (2.9)$$

$$z_0 = z \quad (2.10)$$

$$t_0 = \gamma t + \beta \gamma \frac{x}{c} \quad (2.11)$$

Med relativitetsteorien ble c innført som den universelle “fartsgrensen”. Da måtte man også finne en måte å summere forskjellige hastigheter på som gjorde at summen aldri oversteg c . Dette

ble løst med *Einsteins fartsaddisjonsregel*. La oss si at vi i tillegg til referansesystemene S_0 og S har et referansesystem $\bar{S}$ som beveger seg med en fart $\bar{v}$ mot høyre i forhold til S . Farten til $\bar{S}$ i forhold til S_0 blir da:

$$\bar{v}_0 = \frac{v + \bar{v}}{1 + v\bar{v}/c^2} \quad (2.12)$$

Uttrykt ved β blir dette:

$$\bar{\beta}_0 = \frac{\beta + \bar{\beta}}{1 + \beta\bar{\beta}} \quad (2.13)$$

Vi vil da ha følgende sammenheng mellom Lorentzfaktorene:

$$\bar{\gamma}_0 = \gamma\bar{\gamma}(1 + \beta\bar{\beta}) \quad (2.14)$$

Kreftene som virker på et legeme kan ha forskjellig størrelse alt etter hvilket referansesystem man er i. Anta at vi har et legeme som ligger i ro i S_0 . Anta videre at vi i dette systemet observerer en kraft på legemet med komponenter $F_0^\perp$ og $F_0^\parallel$ henholdsvis normalt på og parallelt med fartsretningen. I S vil vi da observere kraftkomponentene:

$$F^\perp = \frac{F_0^\perp}{\gamma} \quad (2.15)$$

$$F^\parallel = F_0^\parallel \quad (2.16)$$

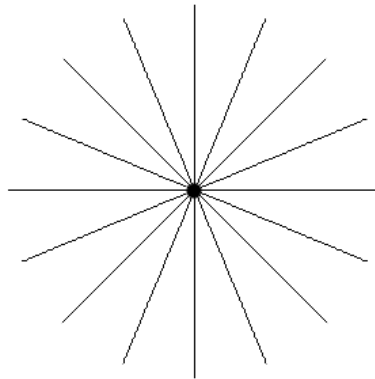
Det vil si at normalkomponenten blir *mindre* med en faktor γ , mens parallellkomponenten forblir uforandret.

2.2 Elektrostatikk

Det elektriske feltet i avstand r fra en punktladning Q i ro er gitt ved *Coulombs lov*:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.17)$$

Feltlinjene for dette feltet er vist i figur 2.1.



Figur 2.1: Elektriske feltlinjer for en punktladning i ro.

Det elektriske feltet i avstand r fra en uendelig lang linjeladning med linjeladningstetthet λ er:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (2.18)$$

Det elektriske feltet fra en uendelig stor ladet flate er uavhengig av avstanden til flaten, og har retning normalt på flaten i hele rommet. Dersom flaten har flateladningstetthet σ , så er feltstyrken gitt ved:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (2.19)$$

Den elektriske kraften på en ladning q som befinner seg i et elektrisk felt $\mathbf{E}$ er:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (2.20)$$

Størrelsen av denne kraften blir da:

$$F = |\mathbf{F}| = qE \quad (2.21)$$

2.3 Elektrodynamikk

Når ladete partikler er i bevegelse, må vi ta hensyn til relativistiske effekter når vi skal finne det elektriske feltet. Vi tar først for oss noen enkle transformasjoner.

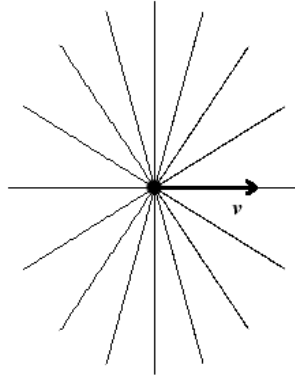
Anta igjen at vi har to referansesystemer S_0 og S som beveger seg med en fart v i forhold til hverandre. Anta videre at vi i et punkt i S_0 observerer et elektrisk felt E_0 , med komponenter $E_0^\perp$ og $E_0^\parallel$ henholdsvis normalt på og parallelt med fartsretningen. I det samme punktet vil vi da i S observere et felt med følgende komponenter:

$$E^\perp = \gamma E_0^\perp \quad (2.22)$$

$$E^\parallel = E_0^\parallel \quad (2.23)$$

Det vil si at normalkomponenten blir sterkere med en faktor γ , mens parallellkomponenten forblir uforandret. I avsnitt 4.1 ser vi nærmere på generelle transformasjoner av elektriske og magnetiske felt.

Vi skal nå se hvordan det elektriske feltet til en punktladning ser ut når vi observerer det fra et referansesystem som har konstant fart v i forhold til partikkelen. Etter hvert som $v \rightarrow c$ vil nemlig feltet bli svakere i nærheten av bevegelsesaksen til partikkelen enn det er i nærheten av planet som går igjennom partikkelen normalt på fartsretningen. Figur 2.2 demonstrerer dette.



Figur 2.2: Elektriske feltlinjer for en punktladning med hastighet $v = 0.75c$.

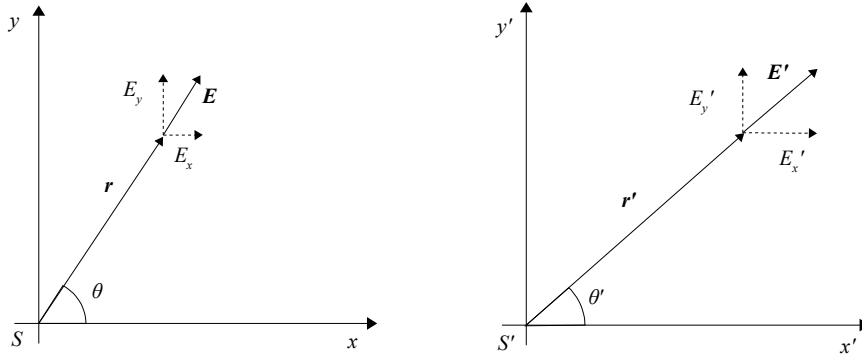
For enkelhets skyld ser vi her på feltet i kun to dimensjoner (xy -planet), og vi skal siden se at resultatet enkelt kan utvides til tre dimensjoner. Anta først at vi befinner oss i ladningens hvilesystem, som vi her kaller S' . Det elektriske feltet fra ladningen er der gitt ved:

$$E(r') = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \quad (2.24)$$

Vi ser da at vi får x - og y -komponenter lik henholdsvis:

$$E'_x = E' \cos \theta' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \cdot \frac{x'}{r'} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x'}{r'^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad (2.25)$$

$$E'_y = E' \sin \theta' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \cdot \frac{y'}{r'} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{y'}{r'^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad (2.26)$$



Figur 2.3: Vektorer observert fra S (t.v.) og S' .

For enkelhets skyld antar vi nå at vi ser på systemet ved tida $t = 0$. Da blir Lorentztransformasjonene (2.8) og (2.9) henholdsvis $x' = \gamma x$ og $y' = y$. (Sistnevnte forblir uforandret.) Vi kombinerer nå disse med ligningene (2.25) og (2.26) for å finne x - og y -komponentene av det elektriske feltet som vi observerer i S :

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\gamma x}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{3/2}} \quad (2.27)$$

$$E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\gamma y}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{3/2}} \quad (2.28)$$

Legg merke til at vi får en faktor γ over brøkstreken også i (2.28). Dette er fordi y -komponenten står normalt på fartsretningen, og da transformeres feltet i henhold til ligning (2.22). For x -komponenten gjelder ligning (2.23).

Kvadratet av det elektriske feltet som observeres i S blir da:

$$E^2 = E_x^2 + E_y^2 = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{(\gamma x)^2}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{(\gamma y)^2}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{3/2}} \right)$$

som etter litt algebra gir:

$$E^2 = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{\gamma^4 r^4 [1 - \beta^2 \sin^2 \theta]^{3/2}}$$

Vi tar så kvadratroten av dette uttrykket for å finne E :

$$E(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{1 - \beta^2}{[1 - \beta^2 \sin^2 \theta]^{3/2}} \quad (2.29)$$

2.4 Magnetisk felt

Bidraget $d\mathbf{B}$ til magnetfeltet i punktet som ligger i en avstand fra lederbiten $d\mathbf{l}$ gitt ved vektoren $\mathbf{r}$, når lederen fører en stasjonær elektrisk strøm I er gitt ved *Biot-Savarts lov*:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (2.30)$$

Ampères lov sier at

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{in}} \quad (2.31)$$

for en vilkårlig lukket integrasjonskurve som omslutter en stasjonær strøm I_{in} .

Den magnetiske kraften på en ladning q som har fart $\mathbf{v}$ og befinner seg i et magnetfelt $\mathbf{B}$ er:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.32)$$

Dersom feltet står normalt på fartsretningen, vil denne kraften ha absoluttverdi:

$$F = |\mathbf{F}| = qvB \quad (2.33)$$

Vi skal nå vise hvordan Biot-Savarts lov og Ampères lov kan brukes til å utlede uttrykkene for magnetiske felt i forskjellige tilfeller.

2.4.1 Rett strømførende leder

Anta at vi har en tynn og uendelig lang leder som ligger langs x -aksen og fører en strøm I . Vi velger så en sirkel i yz -planet med radius r og sentrum på x -aksen som *ampèrekurve*. Ved symmetribetraktning og bruk av Biot-Savarts lov, ser vi at magnetfeltet overalt må ligge parallelt med kurven, samt at det er konstant langs hele kurven. Ampères lov gir oss da:

$$\mu_0 I = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B dl = B \oint dl = B \cdot 2\pi r$$

Med litt omskrivning blir dette:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (2.34)$$

2.4.2 Strømførende plan

Anta at vi har en uendelig stor ledende flate som ligger i xy -planet og fører en strøm I i positiv x -retning. Vi velger nå en rektangulær og positivt orientert ampèrekurve som ligger i yz -planet og har lengde L i y -retning. Ved symmetribetraktning og bruk av Biot-Savarts lov ser vi nå at magnetfeltet peker i negativ y -retning på oversiden av flaten, og i positiv y -retning på undersiden. Ampères lov gir da:

$$\mu_0 I = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = BL + BL = 2BL$$

Dette gir, etter litt omskriving:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2L} = \frac{\mu_0 i}{2}, \quad (2.35)$$

der $i = I/L$.

2.4.3 Spole

Magnetfeltet inni en spole med høy viklingstetthet n som fører en strøm I er:

$$B = \mu_0 n I \quad (2.36)$$

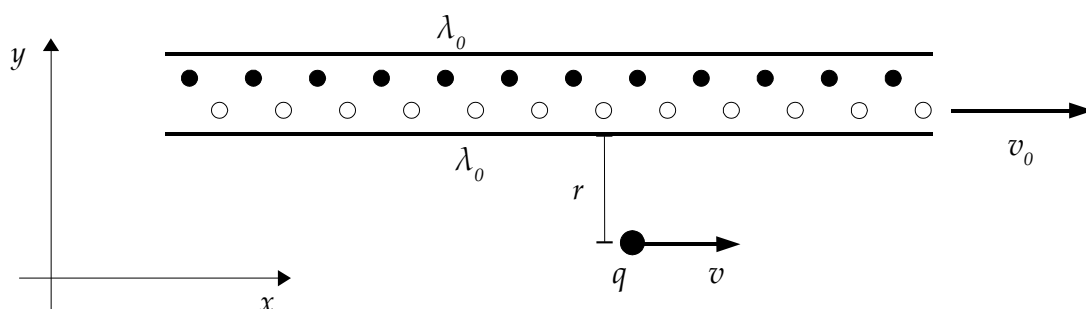
Utenfor spolen er feltet null. Vi viser ingen av delene her, men vi kan nevne at den enkleste måten å regne det ut på er ved hjelp av Ampères lov.

Kapittel 3

Elektriske felt i forskjellige referansesystemer

I dette kapitlet skal vi vise at man ved hjelp av Einsteins spesielle relativitetsteori og det vi nå har gjennomgått av elektrisk teori kan utlede de samme uttrykkene for magnetiske felt som dem vi fant i forrige kapittel.

3.1 Rett strømførende leder



Figur 3.1: Rett strømførende leder, sett fra labsystemet. De hvite prikkene representerer elektronene i lederen.

Vi skal først se på en uendelig lang rett strømførende leder. Som figur 3.1 viser, antar vi at denne lederen sett fra labsystemet består av en rekke positive ladninger (ioner) i ro, samt en tilsvarende rekke av negative ladninger (elektroner) i bevegelse med en fart v_0 mot høyre langs x -aksen. I labsystemet kaller vi ladningstettheten—dvs. ladning pr. lengdeenhet—til de positive ionene for λ_0 . Siden lederen i dette systemet har null netto ladning, blir ladningstettheten for elektronene $-\lambda_0$.

Siden elektronene er i bevegelse, vil avstanden mellom dem være sammentrukket i henhold til ligning (2.1). I elektronenes hvilesystem vil ladningstettheten derfor være redusert med en faktor γ_0 . Ladningstettheten til elektronene vil i dette systemet da være $-\lambda_0/\gamma_0$.

Vi ser nå på en testladning q som beveger seg med en fart v mot høyre, i en avstand r fra og parallelt med lederen. I testladningens hvilesystem vil de positive ladningene da ha en fart v mot venstre. Ifølge fartsaddisjonsformelen (2.12) vil elektronene i dette systemet ha farten:

$$v'_0 = \frac{v_0 - v}{1 - vv_0/c^2} \quad (3.1)$$

La $\beta = v/c$, $\beta_0 = v_0/c$ og $\beta'_0 = v'_0/c$. Da er, jfr. (2.13),

$$\beta'_0 = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta\beta_0} \quad (3.2)$$

Ligning (2.14) gir oss da den tilhørende Lorentzfaktoren:

$$\gamma'_0 = \gamma\gamma_0(1 - \beta\beta_0) \quad (3.3)$$

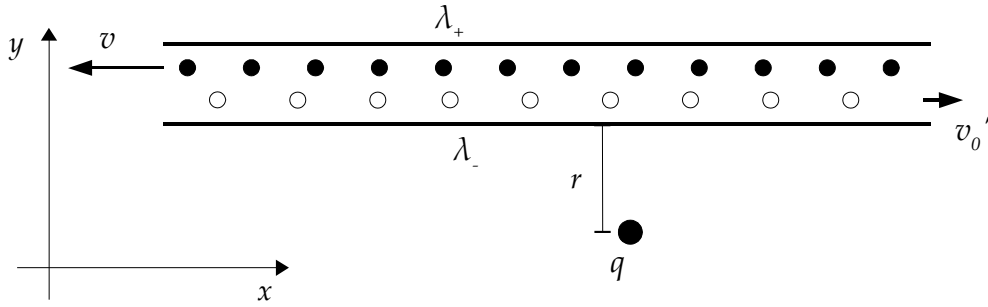
Ladningstettheten for henholdsvis ioner og elektroner i testladningens hvilesystem vil da være:

$$\lambda_+ = \gamma\lambda_0 \quad (3.4)$$

$$\lambda_- = \gamma'_0 \left(\frac{-\lambda_0}{\gamma_0} \right) = -\gamma(1 - \beta\beta_0)\lambda_0 \quad (3.5)$$

Dette gir en netto ladningstetthet for lederen:

$$\lambda' = \lambda_+ + \lambda_- = \gamma\lambda_0 - \gamma(1 - \beta\beta_0)\lambda_0 = \gamma\beta\beta_0\lambda_0 \quad (3.6)$$



Figur 3.2: Rett strømførende leder, sett fra testladningens hvilesystem. Det er i denne figuren antatt at $v_0 > v$.

Sett fra testladningens hvilesystem vil altså lederen ha netto positiv ladning, og følgelig et elektrisk felt gitt ved (2.18):

$$E' = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\gamma\beta\beta_0\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\gamma v v_0 \lambda_0}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} = v \frac{\gamma\mu_0 I}{2\pi r} \quad (3.7)$$

Vi har her brukt at strømmen i lederen er $I = \lambda_0 v_0$, samt at $\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2)$. Dette vil gi en kraft på testladningen:

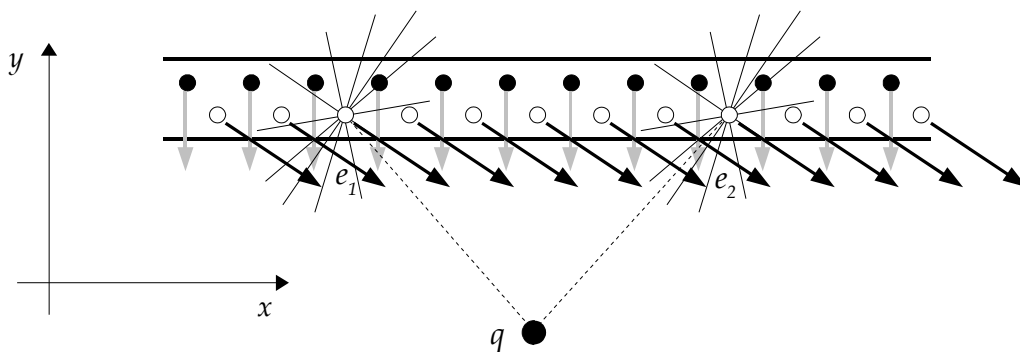
$$F' = qE' = qv \frac{\gamma\mu_0 I}{2\pi r} \quad (3.8)$$

Denne kraften vil i labsystemet stå normalt på partikkelens fartsretning, og vil derfor transformeres i henhold til (2.15). Kraften som observeres her vil da være:

$$F = \frac{F'}{\gamma} = qv \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = qvB, \quad (3.9)$$

der $B = \mu_0 I/(2\pi r)$, akkurat det samme som vi fant i (2.34)!

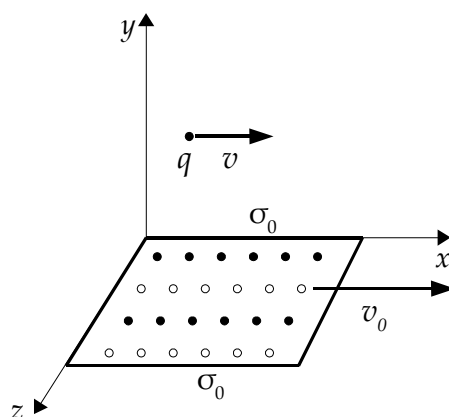
Vi ser nå kort på situasjonen der testladningen q beveger seg rett mot lederen. Eksperimenter viser at kraften på ladningen da virker horisontalt, dvs. langs lederen. Denne kraften kan ikke skyldes de positive ionene. De vil i testladningens hvilesystem—la oss kalle dette S' —bevege seg rett nedover, og x -komponenten fra ett ion vil alltid kanselleres av x -komponenten til et annet ion som er symmetrisk plassert i forhold til q . Altså er det elektronene som må skape denne effekten.



Figur 3.3: Ladning som beveger seg rett mot rett strømførende leder, sett fra ladningens hvilesystem.

I S' vil elektronene bevege seg diagonalt nedover mot høyre, og deres elektriske felt vil “klemmes sammen” som vist i avsnitt 2.3. Se nå på to elektroner e_1 og e_2 , der e_1 ligger til venstre for q og e_2 ligger symmetrisk plassert til høyre for q . Denne situasjonen er vist i figur 3.3. Siden linja fra e_1 ligger nærmere fartsretningen til elektronene (dvs. at θ er mindre) enn linja fra e_2 så vil feltet fra e_2 være *sterkere* enn det fra e_1 . Summerer vi over alle elektronene er vi derfor nødt til å få et resulterende felt i x -retning. At y -komponenten av feltet er null vet vi fordi den netto ladningen i en bit av lederen fremdeles er null. Siden testladningen beveger seg rett mot lederen har vi jo ingen lengdekontraksjon i x -retning, slik vi hadde ovenfor.

3.2 Strømførende plan



Figur 3.4: Strømførende plan, sett fra labsystemet. Også her representeres elektronene ved de hvite prikkene.

Anta at vi, som figur 3.4 viser, har en uendelig stor strømførende flate som ligger i xz -planet. Også her sier vi at de positive ionene ligger i ro i labsystemet, mens elektronene har en fart v_0 i positiv x -retning. La σ_0 være flateladningstettheten for ionene. Da er tettheten av elektroner lik $-\sigma_0$. Vi har som før en testladning q som beveger seg med en fart v i samme retning som elektronene.

Denne situasjonen er helt analog med den vi hadde for en rett leder, og siden vi bare får lengdekontraksjon i fartsretningen vil flateladningstetthetene transformeres på samme måte som

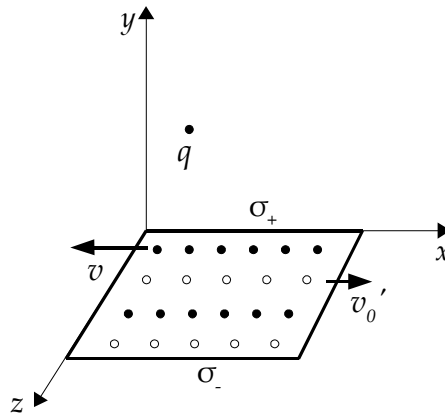
linjeladningstetthetene i forrige avsnitt. Altså, helt analogt med (3.4) og (3.5), får vi at tetthetene for henholdsvis ioner og elektroner i testladningens hvilesystem er:

$$\sigma_+ = \gamma\sigma_0 \quad (3.10)$$

$$\sigma_- = \gamma'_0 \left(\frac{-\sigma_0}{\gamma_0} \right) = -\gamma(1 - \beta\beta_0)\sigma_0 \quad (3.11)$$

Dette gir en netto ladningstetthet for flaten:

$$\sigma' = \sigma_+ + \sigma_- = \gamma\sigma_0 - \gamma(1 - \beta\beta_0)\sigma_0 = \gamma\beta\beta_0\sigma_0 \quad (3.12)$$



Figur 3.5: Strømførende plan, sett fra testladningens hvilesystem.

Dette betyr at sett fra testladningens hvilesystem vil flaten ha netto positiv ladning, og dermed et elektrisk felt gitt ved (2.19):

$$E' = \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} = \frac{\gamma\beta\beta_0\sigma_0}{2\varepsilon_0} = \frac{\gamma v v_0 \sigma_0}{2\varepsilon_0 c^2} = v \frac{\gamma \mu_0 i}{2} \quad (3.13)$$

Her har vi brukt at $\mu_0 = 1/(\varepsilon_0 c^2)$, samt at $i = \sigma_0 v_0$. i er da strøm per lengdeenhet i z -retning. Kraften på testladningen blir:

$$F' = qE' = qv \frac{\gamma \mu_0 i}{2} \quad (3.14)$$

I labsystemet vil denne kraften, transformert i henhold til (2.15), bli:

$$F = \frac{F'}{\gamma} = qv \cdot \frac{\mu_0 i}{2} = qvB \quad (3.15)$$

der

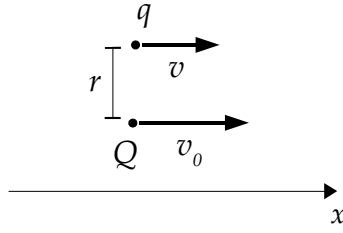
$$B = \frac{\mu_0 i}{2}, \quad (3.16)$$

det samme som vi fant i (2.35).

3.3 Punktladning i uniform bevegelse

En punktladning i bevegelse vil i prinsippet utgjøre en elektrisk strøm, og vil dermed også gi opphav til et magnetfelt. Vi skal nå se litt på hvordan dette magnetfeltet oppstår.

Anta at vi har en punktladning Q som beveger seg med en konstant fart v_0 i x -retning. Det er denne ladningen vi skal finne magnetfeltet fra. Anta videre at vi har en testladning q som vi for enkelhets skyld sier at ligger rett ovenfor og i en avstand r fra Q (dvs. at begge ladningene



Figur 3.6: Ladningene q og Q , sett fra labsystemet.

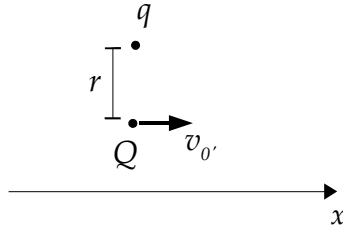
har samme x -koordinat ved tidspunktet vi her ser på), og som beveger seg med en fart v i samme retning som Q .

I labsystemet er det elektriske feltet fra Q gitt ved ligning (2.29). I vårt tilfelle har vi at $\theta = \pi/2$, så denne ligningen blir:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{1 - \beta_0^2}{(1 - \beta_0^2)^{3/2}} = \gamma_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.17)$$

Den resulterende kraften på testladningen blir da:

$$F_e(r) = qE = \gamma_0 \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.18)$$



Figur 3.7: Ladningene q og Q , sett fra testladningens hvilesystem.

For å finne farten til Q i q 's hvilesystem må vi igjen bruke fartsaddisjonsformelen. Uttrykt ved β får vi, som før,

$$\beta'_0 = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta\beta_0} \quad (3.19)$$

Nok en gang får vi følgende Lorentzfaktor:

$$\gamma'_0 = \gamma\gamma_0(1 - \beta\beta_0) \quad (3.20)$$

Kraften fra Q på q blir da, på samme måte som ovenfor,

$$F'(r) = \gamma'_0 \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.21)$$

Vi ser nå hvorfor det var lurt å gjøre antakelsen om at q ligger rett ovenfor Q . Avstanden r står da normalt på fartsretningen og er derfor den samme i begge systemer.

Transformert tilbake til labsystemet i henhold til (2.15) blir denne kraften:

$$F(r) = \frac{F'(r)}{\gamma} = \frac{\gamma'_0}{\gamma} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \gamma_0(1 - \beta\beta_0) \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.22)$$

Forskjellen mellom F og F_e i labsystemet må da være den magnetiske kraften på q :

$$F_m = F - F_e = [\gamma_0(1 - \beta\beta_0) - \gamma_0] \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\gamma_0\beta\beta_0 \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\gamma_0 \frac{vv_0}{c^2} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.23)$$

Dersom vi nå bruker at $\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2)$, så får vi:

$$F_m = -qv \left(\gamma_0 \frac{\mu_0 Q v_0}{4\pi r^2} \right) = -qvB \quad (3.24)$$

Minustegnet angir retningen på kraften. Vi er her kun interessert i *størrelsen* på B , så har vi valgt å sette minustegnet utenfor. Magnetfeltet B blir da:

$$B(r) = \gamma_0 \frac{\mu_0 Q v_0}{4\pi r^2} \quad (3.25)$$

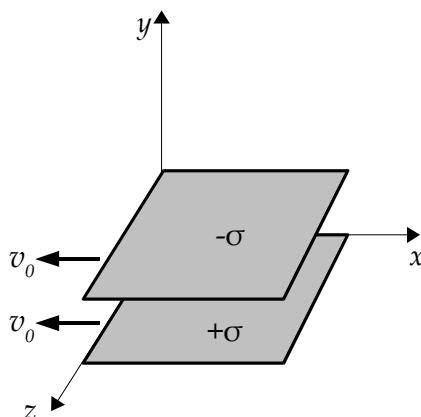
I avsnitt 4.3 bruker vi transformasjoner for å utlede uttrykket for dette feltet mer generelt, og da tar vi også for oss retningen på $\mathbf{B}$.

Kapittel 4

Transformasjoner av elektriske og magnetiske felt

4.1 Transformasjoner

Vi skal nå finne generelle regler for transformasjoner av elektriske felt fra ett referansesystem til et annet.



Figur 4.1: Uendelig stor platekondensator parallell med xz -planet.

Vi starter i et referansesystem S . Der har vi en uendelig stor platekondensator i xz -planet med hastighet v_0 i negativ x -retning. Fra ligning 2.19 finner vi det elektriske feltet mellom platene:

$$E_y = 2 \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (4.1)$$

I avsnitt 3.2 fant vi at det også var et magnetfelt fra en strømførende plate gitt ved ligning (3.16). Mellom de to platene får vi da:

$$B_z = 2 \cdot \left(-\frac{\mu_0 \sigma v_0}{2} \right) = -\mu_0 \sigma v_0 \quad (4.2)$$

Vi har også platekondensatorens eget referansesystem S_0 . Der er ladningstettheten:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{\gamma_0} \quad (4.3)$$

Vi innfører så et referansesystem S' som beveger seg i positiv x -retning med hastighet v' i forhold til S og v'_0 i forhold til S_0 , der

$$v'_0 = \frac{v_0 + v'}{1 + v_0 v' / c^2} \quad (4.4)$$

Ladningstettheten i S' blir:

$$\sigma' = \gamma'_0 \sigma_0 = \frac{\gamma'_0}{\gamma_0} \sigma = \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{\sqrt{1 - (v'_0)^2/c^2}} \sigma = \frac{1 + v'v_0/c^2}{\sqrt{1 - (v')^2/c^2}} \sigma = \gamma' \left(1 + \frac{v'v_0}{c^2} \right) \sigma \quad (4.5)$$

Feltene i S' blir da:

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \gamma' \left(1 + \frac{v'v_0}{c^2} \right) \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \gamma' \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} + v' \mu_0 \sigma v_0 \right) = \gamma' (E_y - v' B_z) \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} B'_z &= -\mu_0 \sigma' v'_0 = -\mu_0 \cdot \gamma' \left(1 + \frac{v'v_0}{c^2} \right) \sigma \cdot \frac{v_0 + v'}{1 + v_0 v' / c^2} \\ &= -\gamma' \sigma \mu_0 (v' + v_0) = \gamma' (B_z - \mu_0 \varepsilon_0 v' E_y) = \gamma' \left(B_z - \frac{v'}{c^2} E_y \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dette er generelle transformasjoner som gjelder for alle E_y og B_z . For å finne transformasjoner for E_z og B_y kan vi bare orientere parallellplatekondensatoren i xy -planet i stedet for i xz -planet. Feltene i S blir da akkurat de samme som de var, vi bare bytter z med y og y med z . Vi får også forandret fortegnet for B (høyrehåndsregelen):

$$E_y = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (4.8)$$

$$B_z = \mu_0 \sigma v_0 \quad (4.9)$$

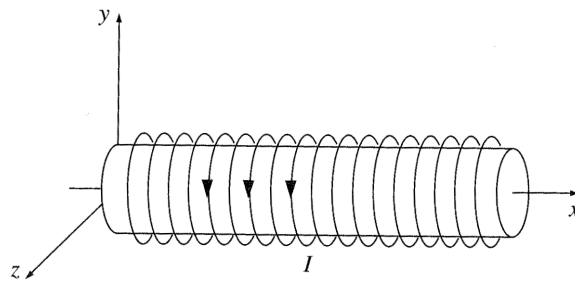
Vi får da transformasjonene:

$$E'_z = \gamma' (E_z + v' B_y) \quad (4.10)$$

$$B'_y = \gamma' \left(B_y + \frac{v'}{c^2} E_z \right) \quad (4.11)$$

For å finne E_x orienterer vi parallellplatekondensatoren i yz -planet. Vi får da en Lorentz-kontraksjon i x -retning, men denne gir ingen forandring i ladningstettheten. Avstanden mellom platene blir kortere i S' , men da feltet er uavhengig av avstanden får vi:

$$E'_x = E_x \quad (4.12)$$



Figur 4.2: Uendelig lang spole langs x -aksen.

For å finne transformasjonen fra B_x til B'_x ser vi på en uendelig lang spole (figur 4.2). Spolen ligger i ro langs x -aksen i et referansesystem S . Vi har også et referansesystem S' som beveger seg med fart v' i forhold til S . Feltet inne i spolen blir i S :

$$B_x = \mu_0 n I \quad (4.13)$$

I S' får vi en lengdekonsentrasjon i x -retning, så vindingstettheten øker.

$$n' = \gamma' n \quad (4.14)$$

Vi får også en tidsdilatasjon, så strømmen, som er ladning per tidsenhet, er mindre i S' enn i S :

$$I' = \frac{I}{\gamma'} \quad (4.15)$$

Det magnetiske feltet blir dermed:

$$B'_x = \mu_0 \cdot \gamma' n \cdot \frac{I}{\gamma'} = \mu_0 n I = B_x \quad (4.16)$$

Vi oppsummerer:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma'(E_y - v'B_z), & E'_z &= \gamma'(E_z + v'B_y) \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma'\left(B_y + \frac{v'}{c^2}E_z\right), & B'_z &= \gamma'\left(B_z - \frac{v'}{c^2}E_y\right) \end{aligned}$$

For å få transformasjonene fra S' til S , bytter man bare fortegnet foran v' :

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E_y &= \gamma'(E'_y + v'B'_z), & E_z &= \gamma'(E'_z - v'B'_y) \\ B_x &= B'_x, & B_y &= \gamma'\left(B'_y - \frac{v'}{c^2}E'_z\right), & B_z &= \gamma'\left(B'_z + \frac{v'}{c^2}E'_y\right) \end{aligned}$$

Selve essensen i en feltteori er at feltene i et gitt punkt forteller oss *alt vi trenger å vite*, elektromagnetisk sett, om det punktet. Vi trenger altså ikke å tenke på kilden til feltene. Derfor er de transformasjonene vi her har utledet helt generelle.

4.2 Rett strømførende leder

Vi ser igjen på den uendelig lange lederen fra avsnitt 3.1. Vi kaller fortsatt referansesystemet hvor lederen er i ro S , og det andre referansesystemet, med fart v i forhold til S , for S' . Hvis $E = 0$, har vi:

$$E'_y = -\gamma v B_z = -v B'_z \quad (4.17)$$

$$E'_z = \gamma v B_y = v B'_y \quad (4.18)$$

Dermed får vi, siden $E'_x = E_x = 0$ og $B'_x = 0$, følgende forhold mellom E' og B' :

$$E' = \sqrt{(E'_y)^2 + (E'_z)^2} = v \sqrt{(B'_z)^2 + (B'_y)^2} = v B' \quad (4.19)$$

I avsnitt 3.1 fant vi E' (ligning (3.7)):

$$E' = v \frac{\gamma \mu_0 I}{2\pi r} \quad (4.20)$$

Så B' blir:

$$B' = \frac{\gamma \mu_0 I}{2\pi r} \quad (4.21)$$

Dette bruker vi til å finne B :

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{B_y^2 + B_z^2} \\ &= \gamma \sqrt{\left[B'_y + \frac{v}{c^2}E'_z\right]^2 + \left[B'_z - \frac{v}{c^2}E'_y\right]^2} \\ &= \gamma \sqrt{\left[(B'_y)^2 \left(1 - \frac{v}{c^2}\right)\right]^2 + \left[(B'_z)^2 \left(1 - \frac{v}{c^2}\right)\right]^2} \\ &= \frac{B'}{\gamma} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Svaret er, som forventet, akkurat det samme som ligning (2.34).

Hvis vi sammenligner B og B' ser vi at magnetfeltet alltid er minst i det referansesystemet hvor lederen er nøytral.

4.3 Punktladning i uniform bevegelse

Vi skal nå bruke disse transformasjonene for å finne magnetfeltet til en punktladning q i uniform bevegelse. Vi bruker da et referansesystem S der ladningen er i ro, og et referansesystem S' der ladningen beveger seg med fart v . I S har vi:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (4.23)$$

På komponentform:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{x}{r}, \quad E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{y}{r}, \quad E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{z}{r} \quad (4.24)$$

For magnetfeltet har vi som kjent at $B = 0$. Dette gir i S' :

$$B'_x = B_x = 0 \quad (4.25)$$

$$B'_y = \gamma \frac{v}{c^2} E_z = \gamma \frac{\mu_0 q v}{4\pi r^2} \cdot \frac{z}{r} \quad (4.26)$$

$$B'_z = -\gamma \frac{v}{c^2} E_y = -\gamma \frac{\mu_0 q v}{4\pi r^2} \cdot \frac{y}{r} \quad (4.27)$$

Bruker at:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = r \cos \theta, \quad \sqrt{y^2 + z^2} = r \sin \theta \quad (4.28)$$

der θ er vinkelen fra x -aksen. Lengden som er målt til x i S har ifølge en observatør i S' blitt sammentrukket i S -systemet, så $x = \gamma x'$. Vi får da:

$$\begin{aligned} B' &= \sqrt{(B'_y)^2 + (B'_z)^2} \\ &= \frac{\mu_0 q v}{4\pi} \cdot \frac{\gamma r \sin \theta}{[\gamma^2 r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 q v}{4\pi} \cdot \frac{\gamma \sin \theta}{r^2 [\gamma^2 (1 - \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 q v}{4\pi r^2} \cdot \frac{\gamma \sin \theta}{[\gamma^2 + \sin^2 \theta (1 - \gamma^2)]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 q v}{4\pi r^2} \cdot \frac{\gamma \sin \theta}{\gamma^3 [1 + \sin^2 \theta (1 - v^2/c^2 - 1)]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 q v}{4\pi r^2} \cdot \frac{(1 - v^2/c^2) \sin \theta}{[1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 q v}{4\pi r^2} \cdot \frac{(1 - \beta^2) \sin \theta}{[1 - \beta^2 \sin^2 \theta]^{3/2}} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Da størrelsen på feltet i y -retning er proporsjonal med z og vice versa vil feltet ligge tangentielt i forhold en sylinder rundt fartsretningen, altså i retning $\hat{\phi}$ (ϕ er rotasjonsvinkelen om x -aksen). Dette er samme retning som vi får ved regne ut kryssproduktet $\mathbf{v} \times \mathbf{r}$.

For eksempelet vi så på i avsnitt 3.3 så var $\theta = 90^\circ$, dvs. at $\sin \theta = 1$, og da ser vi at ligning (4.29) reduseres til det samme uttrykket som vi fant der (ligning (3.25)).

Kapittel 5

Konklusjon

Ved å regne ut magnetiske felt ved hjelp av spesiell relativitetsteori og elektrisk teori har vi kommet fram til eksakt samme resultater som vi får ved å bruke Biot-Savarts og Ampères lov. Disse lovene har lenge vært verifisert eksperimentelt. Selv om vi bare har sett på enkle felt ser vi ingen grunn til at overensstemmelsen mellom relativitetsteori/elektrisk teori og Biot-Savarts og Ampères lover ikke skal holde for mer avanserte felter.

Vi konkluderer derfor med at magnetisme kun er en relativistisk effekt av elektriske ladninger i bevegelse.

Bibliografi

- [1] Edward M. Purcell: *Electricity and Magnetism*, second edition (1985)
- [2] David J. Griffiths: *Introduction to Electrodynamics*, third edition (1999)
- [3] Serway, Moses, Moyer: *Modern Physics*, second edition (1997)
- [4] Serway, Jewett: *Principles of Physics*, third edition (2002)
- [5] Jon Andreas Støvneng: *Forelesningsnotater til FY1303 Elektrisitet og Magnetisme* (2003)
- [6] Knut Arne Strand: *Forelesningsnotater til FY1002 Generell Fysikk II* (2003)
- [7] Daniel V. Schroeder: *Magnetism, Radiation and Relativity* (Talk presented at the 1999 Winter Meeting of the American Association of Physics Teachers),
<http://departments.weber.edu/physics/schroeder/mrr/MRRtalk.html>
- [8] California Institute of Technology: *The Field of a Moving Point Charge* (Java applet),
<http://www.cco.caltech.edu/~phys1/java/phys1/MovingCharge/MovingCharge.html>