Institutt for fysikk, NTNU
FY1303 Elektrisitet og magnetisme
Høst 2004

Løsningsforslag til øving 3

Veiledning onsdag 8. september

Oppgave 1

Vi ser først på B_n, dvs komponenten av $\boldsymbol{B}$ som står normalt på det strømførende planet. Som gaussflate velger vi en fyrstikkeske, "symmetrisk omsluttende" et areal L^2 av det strømførende planet og med "høyde" h. Dvs, de to flatene som ligger parallelt med planet ligger på hver sin side i avstand $h/2$ fra planet. Når vi lar denne høyden h gå mot null, får vi ingen magnetisk fluks gjennom de fire sideflatene av gaussesken som står normalt på planet. Magnetfeltet like på oversiden er $\boldsymbol{B}$, så magnetisk fluks gjennom "topplokket" av esken blir $B_n \cdot L^2$. Vi lar altså L også være liten, men dog endelig. Dermed er magnetfeltet konstant over hele topplokket. På undersiden av flaten er magnetfeltet $\boldsymbol{B} + \Delta\boldsymbol{B}$. Dersom fluksen gjennom topplokket er positiv (dvs ut av gaussesken), må $\boldsymbol{B}$ på undersiden gi et like stort negativt bidrag, $-B_n \cdot L^2$. I tillegg får vi et positivt eller negativt bidrag $\Delta B_n \cdot L^2$ fra normalkomponenten ΔB_n til $\Delta\boldsymbol{B}$. Ifølge Gauss' lov skal netto fluks gjennom den lukkede flaten forsvinne. Dermed:

$$B_n \cdot L^2 - B_n \cdot L^2 + \Delta B_n \cdot L^2 = 0$$

Med andre ord: Normalkomponenten til $\Delta\boldsymbol{B}$ må være lik null. Dvs, normalkomponenten til $\boldsymbol{B}$ er kontinuerlig.

Deretter bruker vi Amperes lov på den nederste av de to amperekurvene i figuren i oppgaveteksten, nemlig den som omslutter et rektangel med flatenormal tangentielt til planet, men normalt til strømretningen. Vi lar lengden normalt til planet være h, som vi lar gå mot null, mens lengden L parallelt med planet lar vi være liten men endelig. Da får vi null bidrag til kurveintegralet i Amperes lov fra de to sidekantene med lengde h. Fra biten med lengde L på oversiden av flaten får vi bidraget $B_{t||} \cdot L$, der $B_{t||}$ er komponenten av $\boldsymbol{B}$ som er parallell til både planet og til strømretningen. (Som over antar vi L så liten at $\boldsymbol{B}$ er konstant over hele lengden L.) Fra biten med lengde L på undersiden av flaten får vi bidraget $-B_{t||} \cdot L$ fra $\boldsymbol{B}$ (motsatt fortegn av bidraget på oversiden fordi vi går motsatt vei) og dessuten bidraget $\Delta B_{t||} \cdot L$ fra $\Delta\boldsymbol{B}$. Tilsammen skal kurveintegralet rundt den lukkede kurven, dvs rektangelet, være lik μ_0 ganget med strømmen som kurven omslutter. Her er omsluttet strøm lik null, så vi får

$$B_{t||} \cdot L - B_{t||} \cdot L + \Delta B_{t||} \cdot L = 0$$

Med andre ord: Komponenten av $\Delta\boldsymbol{B}$ som er parallell til både planet og til strømretningen må være lik null. Dvs, $B_{t||}$ er kontinuerlig.

Endelig bruker vi Amperes lov på den øverste av de to amperekurvene i figuren i oppgaveteksten, nemlig den som omslutter et rektangel med flatenormal tangentielt til planet *og* tangentielt til strømretningen. Nok en gang lar vi høyden h gå mot null slik at vi ikke får noe bidrag til kurveintegralet fra de to bitene normalt til planet. Bidraget fra lengden L over planet blir nå

$B_{t\perp} \cdot L$, der $B_{t\perp}$ er komponenten av $\boldsymbol{B}$ tangentielt til planet og normalt til strømretningen. Hvis bidraget er positivt når vi integrerer som vist i figuren, dvs mot klokka, betyr det at $B_{t\perp}$ er positiv mot venstre i figuren. Bidraget fra lengden L under planet blir dermed $-B_{t\perp} \cdot L$ fra $\boldsymbol{B}$ (for her går vi motsatt vei) og $\Delta B_{t\perp} \cdot L$ fra $\Delta\boldsymbol{B}$. Her må vi passe på fortegnet: Vi integrerer fra venstre mot høyre, så hvis dette siste bidraget er positivt, betyr det at $\Delta\boldsymbol{B}$ peker mot høyre. Omsluttet strøm i dette tilfellet er ikke lik null. Pr lengdeenhet har vi en strøm i i det strømførende planet. På en lengde L har vi derfor en strøm iL. Amperes lov gir da:

$$B_{t\perp} \cdot L - B_{t\perp} \cdot L + \Delta B_{t\perp} \cdot L = \mu_0 i L$$

dvs

$$\Delta B_{t\perp} = \mu_0 i$$

Og dette er altså hele diskontinuiteten i magnetfeltet når vi krysser det strømførende planet. Vi har valgt omløpsretning for kurveintegralet i Amperes lov konsistent med positiv strøm ut av planet. Med andre ord, diskontinuiteten $\Delta\boldsymbol{B}$ blir en vektor mot høyre, som vist i figuren, med absoluttverdi $\mu_0 i$. Vi ser at med flatenormalen $\hat{n}$ pekende nedover og strømmen $\boldsymbol{i}$ ut av planet, får vi riktig retning på $\Delta\boldsymbol{B}$ ved å skrive

$$\Delta\boldsymbol{B} = \mu_0\, \boldsymbol{i} \times \hat{n}$$

som oppgitt i oppgaveteksten.

Kommentar: Legg merke til at *hele* diskontinuiteten $\Delta\boldsymbol{B}$ dannes av den strømmen som går i planet *akkurat der* vi krysser planet, eller om du vil, der vi krysser planet og et lite område omkring. Resten av verden, inklusive hele det strømførende planet, *unntatt* den lille biten omkring krysningspunktet, skaper et magnetfelt som er kontinuerlig gjennom krysningspunktet. Dette er fullstendig analogt i elektrostatikken: Med utgangspunkt i Maxwells to ligninger for det elektrostatiske feltet kan en på tilsvarende måte som her vise at normalkomponenten til det elektriske feltet er diskontinuerlig når vi krysser en flate med netto ladning σ pr flateenhet (diskontinuitet $\Delta E_n = \sigma/\varepsilon_0$), mens tangentialkomponenten til det elektriske feltet er kontinuerlig. Også da kan vi tenke oss at vi ser på en liten bit (skive) av flaten omkring krysningspunktet og lar det totale feltet være feltet fra denne biten pluss feltet fra resten av verden, inklusive resten av den ladete flaten. (Igjen: Superposisjonsprinsippet!) Diskontinuiteten i det elektriske feltet skyldes da nettopp den lille ladete skiva omkring krysningspunktet, mens feltet fra resten av verden er kontinuerlig idet vi krysser flaten. Husk imidlertid den lille men viktige forskjellen, nemlig at det er *normalkomponenten* til det elektriske feltet som er diskontinuerlig, mens det er *tangentialkomponenten* (og mer presist, den som står vinkelrett på strømretningen) til det magnetiske feltet som er diskontinuerlig.

Oppgave 2

a) Her kjenner vi påtrykt (fri) strøm i spoletråden og bruker derfor Amperes lov for $\boldsymbol{H}$:

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I_{\text{fri}}$$

Både $\boldsymbol{H}$ og $\boldsymbol{B}$ (og dermed også $\boldsymbol{M}$) ligger tangentielt ("azimutalt") til toroiden inne i toroiden, så vi får rett og slett

$$(2\pi R - x)\, H_j + x H_g = NI$$

der $H_j = |\boldsymbol{H}|$ inne i jernet og H_g tilsvarende i luftgapet Omsluttet fri strøm må bli strømmen I i spoletråden ganget med antall viklinger N.
b) Sammenhengen mellom $\boldsymbol{B}$ og $\boldsymbol{H}$ gir oss

$$\begin{aligned} B_j &= \mu_0 H_j + \mu_0 M_j = \mu_0 \mu_r H_j \\ B_g &= \mu_0 H_g + \mu_0 M_g = \mu_0 H_g \end{aligned}$$

for B-feltet i hhv jernet og luftspalten (da $M_g = 0$, null magnetisering i luftgapet).
Vi bruker nå at normalkomponenten av $\boldsymbol{B}$ er kontinuerlig når vi krysser en grenseflate. (Det fulgte av Gauss' lov for B-feltet, oppgave 1.) Her står $\boldsymbol{B}$ normalt på grenseflaten mellom jern og luft i den smale spalten, så vi må ha

$$B_j = B_g$$

Følgelig er

$$H_g = \mu_r H_j$$

c) Vi setter inn $H_j = H_g/\mu_r$ i ligningen bestemt i punkt a og bruker at $H_j = B_j/\mu = B_j/\mu_0\mu_r$ og at $B_j = B_g$. Dette gir:

$$\begin{aligned} & \frac{B_g}{\mu_o \mu_r} L + \frac{B_g}{\mu_0} x = NI \\ \Rightarrow\ & B_g\,(L + \mu_r x) = \mu_0 \mu_r NI \\ \Rightarrow\ & B_g = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{L + \mu_r x} \end{aligned}$$

Uten jernkjerne tilstede, dvs en fullstendig luftfylt toroide, ville Amperes lov for B-feltet,

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{\text{tot}}$$

gitt et felt B_0 inne i toroiden:

$$\begin{aligned} B_0 \cdot 2\pi R &= \mu_0 NI \\ B_0 &= \frac{\mu_0 NI}{L + x} \end{aligned}$$

slik at vi kan skrive

$$B_g = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{L + \mu_r x} = \frac{\mu_r\,(L + x)}{L + \mu_r x} B_0$$

d) Med oppgitte tallverdier har vi

$$B_0 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^3}{2\pi \cdot 0.1} = 0.002 \text{ T}$$

Med jernkjerne og ikke noe luftspalte (dvs $x = 0$) blir magnetfeltet i jernet

$$B_j = \mu_r B_0 = 10^3 \cdot 0.002 = 2 \text{ T}$$

Forholdet mellom B_g og B_0 blir følgende funksjon av x:

$$\frac{B_g}{B_0} = \frac{200\pi}{0.2\pi + 999x}$$

Utregningene i denne oppgaven forutsetter at vi har konstante feltstørrelser både inne i jernet og i luftspalten. For at dette skal være en bra tilnærmelse, må bredden på luftspalten være liten. Dessuten antas det at vi har såkalt bløtt jern i kjernen, slik at det gir mening å innføre en relativ permeabilitet og dermed en lineær sammenheng mellom M og H i jernet.

Figur: