Institutt for fysikk, NTNU
FY1303 Elektrisitet og magnetisme
Høst 2004

Øving 3

Veiledning: Onsdag 8. september
Innleveringsfrist: Mandag 13. september

I endel problemer har man gitte (frie, målbare) strømmer I i kombinasjon med magnetiske materialer, hvoretter oppgaven består i å bestemme det resulterende magnetfeltet $\boldsymbol{B}$ i systemets ulike områder. Da er det ofte nyttig å kjenne til såkalte *grenseflatebetingelser* for magnetfeltet, dvs hvordan $\boldsymbol{B}$ endrer seg idet vi krysser en grenseflate mellom to materialer med forskjellig permeabilitet μ (f.eks. luft og jern). I oppgave 1 skal vi se hvordan grenseflatebetingelsene for $\boldsymbol{B}$ følger av Maxwells ligninger. I oppgave 2 ser vi så på et eksempel der vi kombinerer de utledete grenseflatebetingelsene med Amperes lov for å beregne magnetfeltet i en smal luftspalte i en smultringformet spole med jernkjerne.

Oppgave 1

Bruk de to Maxwell-ligningene

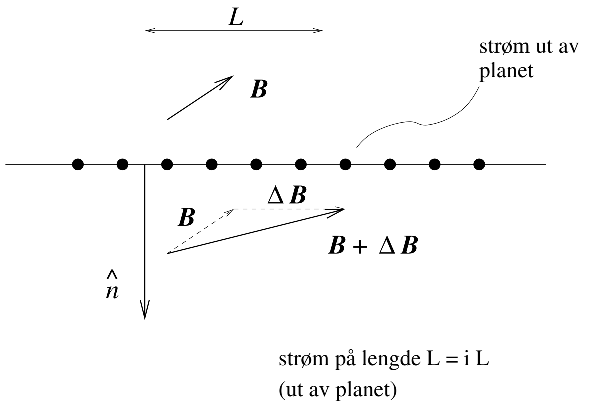
$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{\text{in}}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

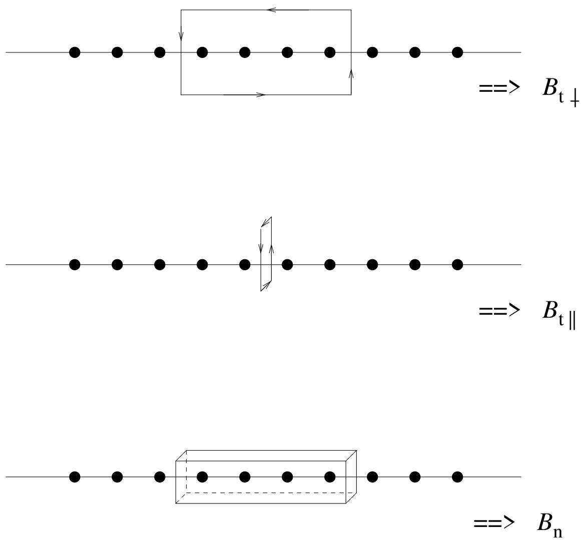
(hhv Amperes lov og Gauss' lov) til å vise at diskontinuiteten ("spranget") i magnetfeltet $\boldsymbol{B}$ når vi krysser et strømførende plan med strøm pr lengdeenhet $\boldsymbol{i}$ er

$$\Delta \boldsymbol{B} = \mu_0 \, \boldsymbol{i} \times \hat{n}$$

Her er $\hat{n}$ en enhetsvektor normalt til planet, med retning slik at $\Delta \boldsymbol{B}$ i figuren nedenfor blir en vektor mot høyre:



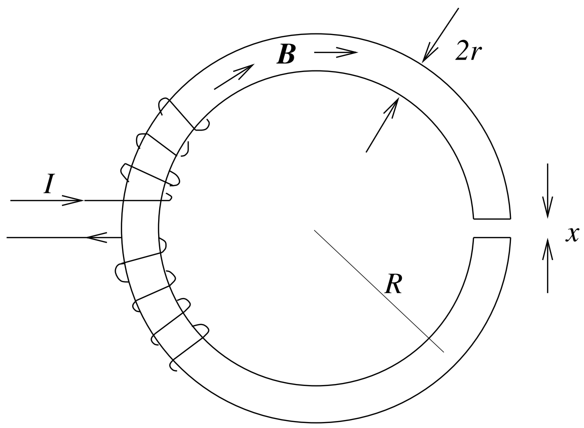
Tips: Bruk Gauss' lov for $\boldsymbol{B}$ til å vise at B_n, dvs komponenten av $\boldsymbol{B}$ normalt til planet, er kontinuerlig når vi krysser det strømførende planet. En fornuftig gaussflate er en fyrstikkeske med to av sideflatene parallelt med planet, beliggende på hver sin side av planet.
Bruk deretter Amperes lov til å vise at $B_{t||}$ også er kontinuerlig ved kryssing av planet, mens $B_{t\perp}$ er diskontinuerlig med et sprang $\mu_0 i$. Her betrakter vi komponenten B_t av $\boldsymbol{B}$ tangentielt til planet. Denne kan igjen dekomponeres i en komponent parallelt med strømretningen, $B_{t||}$, og en komponent normalt til strømretningen, $B_{t\perp}$. Fornuftige amperekurver for denne delen av oppgaven er rektangler beliggende symmetrisk i forhold til det strømførende planet (jfr oppgave 2 i øving 13 i vår), med ulik orientering i forhold til strømretningen, avhengig av om vi skal ende opp med en grenseflatebetingelse for $B_{t||}$ eller $B_{t\perp}$. Følgende figur kan muligens være til hjelp:



Kontroller til slutt at de tre grenseflatebetingelsene du har endt opp med, for hhv B_n, $B_{t||}$ og $B_{t\perp}$, kan sammenfattes i den oppgitte ligningen for $\Delta\boldsymbol{B}$.

Oppgave 2

En smultringformet ring (toroide) av jern har relativ permeabilitet μ_r. Midlere radius i toroiden er R. Tverrsnittradien r til toroiden er mye mindre enn R slik at vi kan anta at radius R gjelder for hele ringen. Rundt jernkjernen er det viklet opp en ledning som fører en strøm I og har N viklinger (se figur). Anta at viklingene er jevnt og tett fordelt rundt hele toroiden. Det er skåret bort en liten bit av toroidekjernen med bredde x. Den resulterende spalten er luftfylt. Så lenge x er liten, kan vi med brukbar tilnærmelse anta at magnetfeltet $\boldsymbol{B}$, og dermed også $\boldsymbol{H}$, er tangentielt rettet, både inne i jernringen og i det luftfylte gapet.



a) Bruk Amperes lov for $\boldsymbol{H}$ til å vise at

$$LH_j + xH_g = NI$$

Her er $L = 2\pi R - x$, og indeks j og g angir hhv jern og gap.

b) Vis at, ettersom normalkomponenten av $\boldsymbol{B}$ er kontinuerlig (jfr oppgave 1), er $H_g = \mu_r H_j$.

c) Bruk resultatene i a og b til å vise at

$$B_g = \frac{\mu_r(L+x)}{L+\mu_r x} B_0$$

der B_0 er magnetfeltet vi ville hatt uten jernkjernen til stede.

d) Anta at $R = 10$ cm, $NI = 1000$ A og $\mu_r = 1000$. Hva blir da B_0, dvs feltet i en luftfylt toroide? Hva blir B i toroiden *med* jernkjerne men *uten* luftgap? Regn ut og skisser forholdet B_g/B_0 som funksjon av luftgapets bredde x mellom 1 og 10 mm.

Amperes lov for $\boldsymbol{H}$:

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I_{\text{fri}}$$