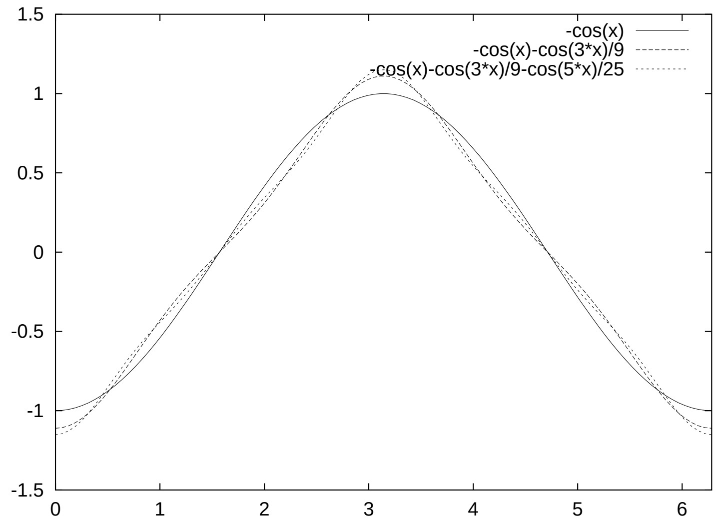
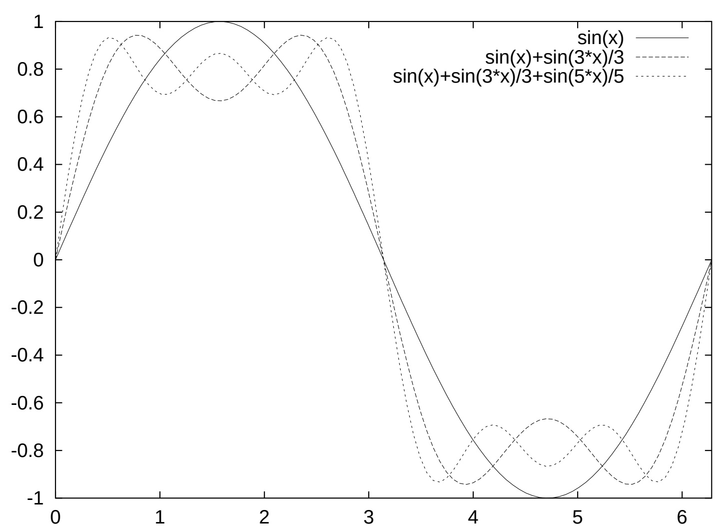
Institutt for fysikk, NTNU
FY1303 Elektrisitet og magnetisme
Høst 2004

Løsningsforslag til øving 6

Veiledning onsdag 29. september

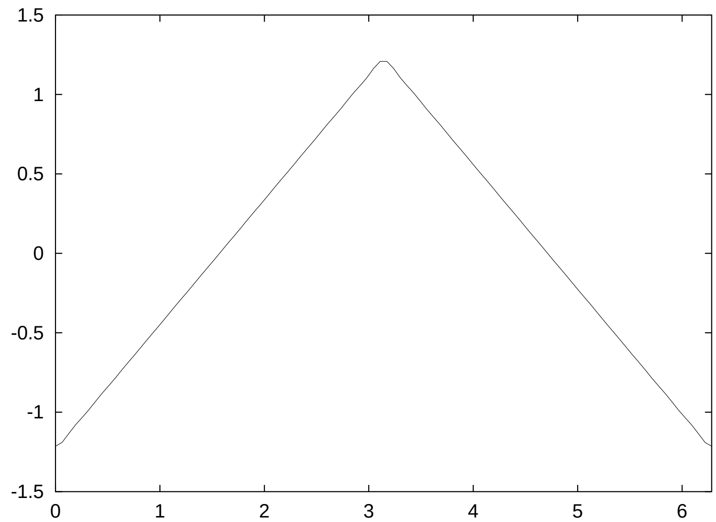
$a)$

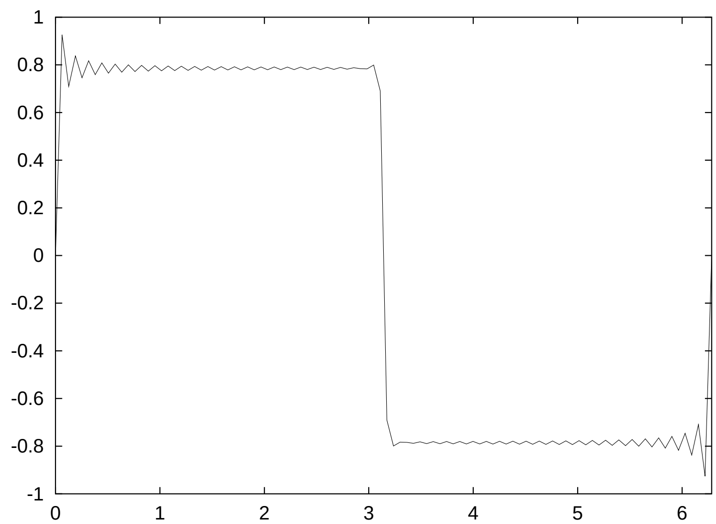




(Her har jeg brukt $\omega = 1$, slik at perioden er $T = 2\pi$.)

b) Vi ser at u_5 og v_5 tilsvarer de tre første leddene i henholdsvis $f(t)$ og $g(t)$. Skulle det være noen tvil om hvor dette bærer hen, er det jo bare å ta med noen flere ledd og tegne opp på ny. Men allerede med tre ledd får en vel en mistanke om at $f(t)$ må bli et "trekantsignal" (evt "sagtannsignal") mens $g(t)$ blir et "firkantsignal". I figuren nedenfor har jeg tatt med ledd til og med $n = 25$ i $f(t)$ og ledd til og med $n = 49$ i $g(t)$:





Vi ser at 13 ledd er nok til å gi en god tilnærming til et trekantsignal, mens 25 ledd ikke gir en like god tilnærming til et firkantsignal. Dette kan forklares på flere måter: Summen som representerer trekantsignalet har koeffisienter som avtar som $1/n^2$, mens tilsvarende koeffisienter bare avtar som $1/n$ i summen som representerer firkantsignalet. Da er det vel rimelig at feilen vi gjør ved å kutte av summen etter et visst antall ledd blir større i $g(t)$ enn i $f(t)$.
En annen måte å resonnere på er som følger: Firkantsignalet har *sprang* i funksjonsverdien for hver halve periode, mens trekantsignalet er *kontinuerlig*. Vi trenger mer "hjelp" fra høyfrekvente Fourier-komponenter for å beskrive slike sprang (diskontinuiteter) enn for

å beskrive bare en "knekk" i kurven (dvs en diskontinuitet i funksjonens deriverte).

c) Kirchhoffs spenningsregel gir

$$R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = V_{\mathrm{inn}}(t)$$

Innsetting av

$$V_{\mathrm{inn}}(t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{V_0}{n} e^{in\omega t}$$

og

$$Q(t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} Q_n e^{in\omega t}$$

gir

$$\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left(in\omega R + \frac{1}{C}\right) Q_n e^{in\omega t} = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{V_0}{n} e^{in\omega t}$$

Hvis denne ligningen skal være oppfylt ved alle tidspunkt t, må vi ha likhet mellom høyre og venstre side for alle verdier av n:

$$\begin{aligned} Q_n \left(in\omega R + \frac{1}{C}\right) &= \frac{V_0}{n} \\ \Rightarrow Q_n &= \frac{V_0 C}{n + in^2\omega RC} \end{aligned}$$

Dermed blir spenningsfallet over kondensatoren (på kompleks form)

$$V_{\mathrm{ut}}(t) = \frac{Q(t)}{C} = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{V_0}{n(1 + in\omega RC)} e^{in\omega t}$$

d) For å få $V_{\mathrm{ut}}(t)$ på ønsket form, skriver vi om den komplekse biten av koeffisientene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + in\omega RC} &= \frac{1 - in\omega RC}{(1 + in\omega RC)(1 - in\omega RC)} \\ &= \frac{\sqrt{1 + (n\omega RC)^2}}{1 + (n\omega RC)^2} \exp\left(i \arctan\left(-\frac{n\omega RC}{1}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + (n\omega RC)^2}} \exp\left(-i \arctan n\omega RC\right) \end{aligned}$$

Dermed blir det fysiske spenningsfallet over kondensatoren

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} V_{\mathrm{ut}}(t) &= \mathrm{Im} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{V_0}{n\sqrt{1 + (n\omega RC)^2}} \exp\left(in\omega t - i \arctan n\omega RC\right) \\ &= \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{V_0}{n\sqrt{1 + (n\omega RC)^2}} \sin\left(n\omega t - \arctan n\omega RC\right) \end{aligned}$$

Dette er på den oppgitte formen, med

$$\begin{aligned} V_n^{\text{ut}} &= \frac{V_0}{n\sqrt{1+(n\omega RC)^2}} \\ \phi_n &= -\arctan n\omega RC \end{aligned}$$

e) Dersom $\omega \gg 1/RC$, vil argumentet til arctan-funksjonen bli mye større enn 1 for alle n. Videre kan vi neglisjere 1 i forhold til $(n\omega RC)^2$ i kvadratrotuttrykket. Det gir

$$\begin{aligned} V_n^{\text{ut}} &\simeq \frac{V_0}{n^2\omega RC} \\ \phi_n &\simeq -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Vi kan dessuten skrive

$$\sin(n\omega t - \pi/2) = -\cos n\omega t$$

slik at

$$V_{\text{ut}}(t) = -\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{V_0}{n^2\omega RC}\cos n\omega t$$

Vi ser at spenningsfallet over kondensatoren er på nøyaktig samme form som funksjonen $f(t)$ i punkt *b*), dvs et trekantsignal. Vi ser også at dersom vi deriverer $V_{\text{ut}}(t)$ med hensyn på t, får vi tilbake $V_{\text{inn}}(t)/RC$. Altså representerer $V_{\text{ut}}(t)$ *integralet* av $V_{\text{inn}}(t)$ (dividert med konstanten RC).

Kommentarer:
Oppi alt styret med summer av trigonometriske funksjoner er det kanskje en ide å ta et skritt tilbake og tenke gjennom hva vi "egentlig" har her: En RC-krets der spenningskilden veksler mellom to konstante verdier, V_0 og $-V_0$.
Allerede i vår regnet vi på dette oppsettet ("Opplading av kondensator i RC-krets"), hvor vi fant at ladningen på kondensatoren hadde tidsavhengigheten

$$Q(t) = Q(\infty)\left(1 - \exp(-t/RC)\right)$$

Vi ser at dersom den påtrykte spenningen ikke forandres, vil ladningen gå mot den asymptotiske verdien $Q(\infty)$. I eksempelet over har vi imidlertid antatt at spenningskilden veksler mellom V_0 og $-V_0$ med en frekvens som er mye større enn kretsens "inverse tidskonstant" $1/RC$. Da rekker aldri kondensatoren å bli fullt ladet opp før spenningskilden trekker ladningen motsatt vei. For tidsavhengigheten til Q mellom hver gang spenningskilden skifter fortegn kan vi da gjøre tilnærmelsen

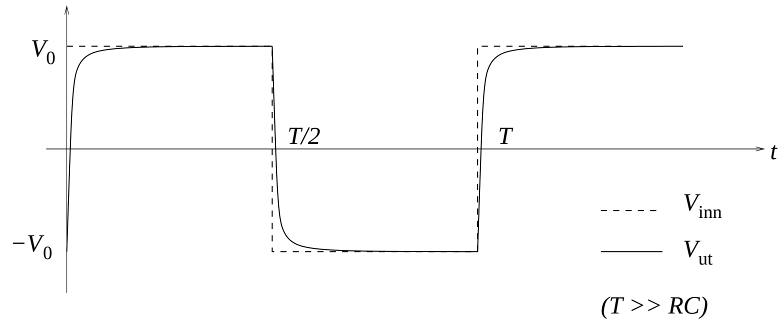
$$1 - \exp(-t/RC) \simeq 1 - (1 - t/RC\dots) = t/RC$$

Med andre ord, ladningen på kondensatoren vokser lineært med tiden,

$$Q(t) \sim t/RC$$

Når spenningskilden skifter fortegn, må vi få en tilsvarende lineær endring i Q "motsatt vei", og alt i alt blir dette nettopp en slik trekantspenning som vi fant over.

Hva hvis vi er i den motsatte grensen, nemlig $\omega \ll 1/RC$? Jo, da vil spenningskilden veksle så langsomt mellom V_0 og $-V_0$ at ladningen Q oppnår sin maksimale verdi $(\pm)V_0C$ i god tid før spenningskilden skifter fortegn. Vi må følgelig få omtrent en slik form på $V_{\text{ut}} = Q/C$:



Med andre ord, utgangsspenningen blir omtrent lik inngangsspenningen. Ligger dette resultatet også "innbakt" i Fourier-analysen? Vel, la oss se: Hvis $\omega \ll 1/RC$, kan vi, i hvert fall for endel av de laveste verdiene av n, neglisjere faktoren $(n\omega RC)^2$ i forhold til 1. Det betyr at for lave verdier av n er

$$V_n^{\text{ut}} \simeq \frac{V_0}{n}$$

For slike n blir fasevinkelen

$$\phi_n \simeq 0$$

slik at de første leddene i V_{ut} blir på formen

$$\frac{V_0}{n} \sin n\omega t$$

dvs nøyaktig som tilsvarende ledd i V_{inn}! Avviket fra det perfekte firkantsignalet skyldes de leddene i summen som er slik at $n\omega RC$ ikke lenger er liten i forhold til 1. Da blir ikke lenger fasevinkelen lik null, og vi får alt i alt en V_{ut} bestående av både sinus- og cosinus-funksjoner.