

Løsningsforslag til øving 7

Veiledning onsdag 6. oktober

Vi har utledet et generelt uttrykk for *total* effekt overført fra vekselspenningskilden  $V_0 \cos \omega t$  til kretsen:

$$\langle P \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) I(t) dt = \frac{1}{2} V_0 |I_0| \cos \alpha$$

Her er da

$$I(t) = |I_0| \cos(\omega t - \alpha)$$

den totale strømmen som går i kretsen. Vi har sammenhengene

$$\begin{aligned} |I_0| &= \frac{V_0}{|Z|} \\ Z &= R + iX = |Z| e^{i\alpha} \\ \tan \alpha &= \frac{X}{R} \\ \cos \alpha &= \frac{R}{|Z|} \\ |Z| &= \sqrt{R^2 + X^2} \end{aligned}$$

så alternative uttrykk for midlere total effekt er

$$\langle P \rangle = \frac{V_0^2 R}{2|Z|^2} = \frac{V_0^2 R}{2(R^2 + X^2)}$$

Så langt generelt! La oss se hva dette gir for kretsen vår. Impedansen er

$$Z = R_0 + R_1 + i\omega L$$

slik at

$$R = R_0 + R_1$$

og

$$X = \omega L$$

Dermed har vi for totaleffekten:

$$\langle P \rangle = \frac{V_0^2 (R_0 + R_1)}{2[(R_0 + R_1)^2 + (\omega L)^2]}$$

Innsetting av oppgitte tallverdier ( $\omega L = 2\pi f L = 2\pi \cdot 50 \cdot 0.16 = 50.265 \Omega$ ,  $R_0 + R_1 = 60 \Omega$ ,  $V_0 = 310 \text{ V}$ ) gir

$$\langle P \rangle = 470.57 \text{ W} \simeq 471 \text{ W}$$

Her er det vel temmelig opplagt hvordan totaleffekten fordeler seg på kretsens to motstander ettersom summen av  $R_0$  og  $R_1$  inngår i uttrykket for  $\langle P \rangle$ :

$$\begin{aligned}\langle P_0 \rangle &= \frac{V_0^2 R_0}{2[(R_0 + R_1)^2 + (\omega L)^2]} = \frac{\langle P \rangle}{6} = 78.43 \text{ W} \simeq 78 \text{ W} \\ \langle P_1 \rangle &= \frac{V_0^2 R_1}{2[(R_0 + R_1)^2 + (\omega L)^2]} = \frac{5\langle P \rangle}{6} = 392.14 \text{ W} \simeq 392 \text{ W}\end{aligned}$$

Samme strøm passerer gjennom begge motstander, så uttrykket for utviklet effekt i hver av dem må rimeligvis bli på samme form. For å være helt sikker regner vi ut f.eks.  $\langle P_0 \rangle$  fra "scratch": Spenningsfallet over  $R_0$  er  $R_0 I$  dersom det går en strøm  $I$  gjennom den. Instantan effekt i  $R_0$  er dermed  $P_0(t) = R_0 I(t) \cdot I(t) = R_0 I(t)^2$ , slik at midlere effekt blir

$$\begin{aligned}\langle P_0 \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T R_0 I^2 dt \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} R_0 |I_0|^2 \cos^2(\omega t - \alpha) dt\end{aligned}$$

Integralet av  $\cos^2 x$  over en hel periode av argumentet  $x$  er lik  $1/2$  slik at

$$\langle P_0 \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \cdot R_0 |I_0|^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{2} R_0 |I_0|^2 = \frac{R_0 V_0^2}{2|Z|^2}$$

Samme framgangsmåte gir selvsagt et tilsvarende uttrykk for  $\langle P_1 \rangle$ .

Ved første øyekast kan det kanskje se ut som om utnyttelsesgraden  $\langle P_1 \rangle / (\langle P_0 \rangle + \langle P_1 \rangle)$  ikke kan bli større enn det tilsvarende forholdet mellom lastmotstand og totalmotstand,  $R_1 / (R_0 + R_1)$ . La oss imidlertid se hva som skjer dersom vi kobler inn en "passende" kapasitans  $C$  i parallell med  $R_1$  og  $L$ . Vi starter med å regne ut kretsens totale impedans:

$$\begin{aligned}Z &= R_0 + \left[ i\omega C + \frac{1}{R_1 + i\omega L} \right]^{-1} \\ &= R_0 + \left[ i\omega C + \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2} - i\omega \frac{L}{R_1^2 + (\omega L)^2} \right]^{-1}\end{aligned}$$

Dette kan vi skrive ned på direkten, ettersom vi vet hva impedansen til hver enkelt komponent er, og dessuten kjenner reglene for å regne ut total impedans til serie- og parallellkoblede impedanser. Vi ser nå at ved å velge en kapasitans  $C = L / (R_1^2 + (\omega L)^2)$ , forsvinner imaginærdelen (den såkalte *reaktansen*  $X$ ) til impedansen, og vi står igjen med

$$Z = R_0 + \frac{R_1^2 + (\omega L)^2}{R_1} = R_0 + R_1 + \frac{(\omega L)^2}{R_1}$$

Siden  $Z$  nå er en reell størrelse, har vi selvsagt  $Z = R = |Z|$  og  $\alpha = 0$ , dvs  $V$  og total strøm  $I$  svinger i fase. Amplituden til  $I$  blir

$$|I_0| = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{V_0}{R_0 + R_1 + (\omega L)^2 / R_1}$$

og vi kan regne ut både totaleffekten,

$$\langle P \rangle = \frac{V_0^2}{2R} = \frac{V_0^2}{2(R_0 + R_1 + (\omega L)^2 / R_1)}$$

og effekten tapt i spenningskildens indre motstand,

$$\langle P_0 \rangle = \frac{1}{2} R_0 |I_0|^2 = \frac{R_0 V_0^2}{2R^2} = \frac{R_0 V_0^2}{2(R_0 + R_1 + (\omega L)^2 / R_1)^2}$$

Innsetting av aktuelle tallverdier gir  $\langle P \rangle = 434.71 \text{ W} \simeq 435 \text{ W}$  og  $\langle P_0 \rangle = 39.33 \text{ W} \simeq 39 \text{ W}$ . Differansen mellom disse må da tilsvare overført effekt til  $R_1$ ,

$$\langle P_1 \rangle = \langle P \rangle - \langle P_0 \rangle = 395.38 \text{ W} \simeq 395 \text{ W}$$

som utgjør ca 91 % av den totale effekten.

Så hva er det egentlig som foregår? Vi ser at  $\langle P_1 \rangle$ , og dermed (amplituden til)  $I_1$ , er omtrent like stor i de to kretsene, mens  $\langle P_0 \rangle$ , og dermed (amplituden til)  $I$ , har blitt betydelig redusert. Dette oppnås ved at kondensatorstrømmen  $I_C$  svinger med "riktig" fasevinkel i forhold til  $I$  og  $I_1$ , slik at spenningskilden kan levere en redusert strømstyrke  $I$  uten at "laststrømmen"  $I_1$  påvirkes i særlig grad.

La oss regne ut hva de ulike strømbidragene blir, både med amplituder og fasevinkler. Vi har allerede slått fast at  $I$  svinger i fase med  $V$ , så

$$I(t) = |I_0| \cos \omega t$$

med amplitude

$$|I_0| = \frac{V_0}{Z} = \frac{310}{10 + 50 + 50.265^2/50} = 2.80 \text{ A}$$

Kirchhoffs spenningslov gir oss for ladningen  $Q$  på kondensatoren:

$$\frac{Q}{C} = V - R_0 I$$

Med  $I$  i fase med  $V$  må da også  $Q$  svinge i fase med  $V$ . På kompleks form:

$$Q = C(V_0 - R_0 |I_0|) e^{i\omega t}$$

slik at kondensatorstrømmen blir

$$I_C = \frac{dQ}{dt} = i\omega C(V_0 - R_0 |I_0|) e^{i\omega t} = \omega C(V_0 - R_0 |I_0|) e^{i(\omega t + \pi/2)}$$

dvs for fysisk strøm:

$$I_C(t) = \omega C(V_0 - R_0 |I_0|) \cos(\omega t + \pi/2) = 2.83 \text{ A} \cos(\omega t + \pi/2)$$

Kirchhoffs spenningslov gir oss også laststrømmen  $I_1$ :

$$R_1 I_1 + L \frac{dI_1}{dt} = V - R_0 I$$

Innsetting av  $V$ ,  $I$  og  $I_1$  på kompleks form gir

$$(R_1 I_{10} + i\omega L I_{10}) e^{i\omega t} = (V_0 - R_0 |I_0|) e^{i\omega t}$$

og dermed

$$I_{10} = \frac{V_0 - R_0 |I_0|}{R_1 + i\omega L} = \frac{V_0 - R_0 |I_0|}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}} e^{-i \arctan(\omega L/R_1)}$$

Med andre ord,

$$I_1(t) = |I_{10}| \cos(\omega t - \alpha_1)$$

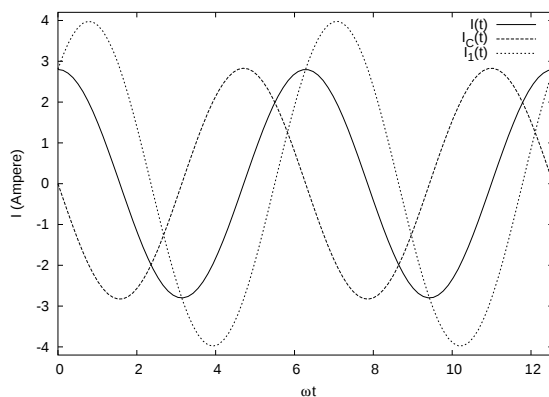
med amplitude

$$|I_{10}| = \frac{V_0 - R_0 |I_0|}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}} = 3.98 \text{ A}$$

og fasevinkel

$$\alpha_1 = \arctan(\omega L/R_1) = 45.2^\circ$$

Skisse av strømbidragene:



Med de valgte positive retninger på de ulike strømmene i figuren i oppgaveteksten, er det klart, med bruk av Kirchhoffs strømregel, at  $I = I_C + I_1$ . Vi ser at dette stemmer med grafen over. Legg forøvrig merke til at spenningskilden her nettopp tilsvarende det du har i stikk-kontakten hjemme, nemlig vekselspanning med effektivverdi  $310/\sqrt{2} \simeq 220 \text{ V}$  og frekvens  $f = 50 \text{ Hz}$ .