

FY6013 Mekanikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til Test 7.

Oppgave 1

Tyngdekraften har komponent $mg \sin \alpha$ nedover parallelt med skråplanet. Normalkraften fra underlaget er lik tyngdekraftens normalkomponent $mg \cos \alpha$, siden det ikke er noen akselerasjon normalt på skråplanet. Når klossen glir, er det kinetisk friksjon, med friksjonskraft $f = \mu N = \mu mg \cos \alpha$. Med konstant hastighet er $f = mg \sin \alpha$, dvs $\mu = \tan \alpha$. Riktig svar: D.

Oppgave 2

Klossen starter med mekanisk energi

$$E = mgh + mv_0^2/2 = mgL \sin \alpha + mv_0^2/2.$$

Den har mistet all denne mekaniske energien, dvs E tilsvarer friksjonsarbeidet

$$W_f = fL = \mu mgL \cos \alpha.$$

Dermed er

$$\mu = E/mgL \cos \alpha = \tan \alpha + v_0^2/2gL \cos \alpha.$$

Riktig svar: E.

Oppgave 3

Total impuls er bevart i kollisjonen: $mv_0 = 2mv$, dvs $v = v_0/2$. Riktig svar: A.

Oppgave 4

$|\Delta K| = mv_0^2/2 - 2mv^2/2 = mv_0^2/2 - mv_0^2/4 = mv_0^2/4$. Riktig svar: C.

Oppgave 5

De to massene snur i høyden $h = L(1 - \cos \beta)$. Der er potensiell energi lik $2mgh$ og kinetisk energi null. Energibevarelse etter at kollisjonen er over gir da

$$mv_0^2/4 = mgh = mgL(1 - \cos \beta) \Rightarrow \beta = \arccos(1 - v_0^2/8gL).$$

Riktig svar: B.

Oppgave 6

Matematisk pendel med lengde L og små utsving: $\omega_0 = \sqrt{g/L}$, dvs $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$. Riktig svar: A.

Oppgave 7

De fire punktmassene er alle i avstand d fra akse, med $d^2 = (a/2)^2 + (a/2)^2 = a^2/2$. Dermed er $I_0 = 4ma^2/2 = 2ma^2$. Riktig svar: B.

Oppgave 8

Steiners sats, med en parallellforskyvning av akse en lengde $a/2$, gir $I_1 = I_0 + 4m(a/2)^2 = 2ma^2 + ma^2 = 3ma^2$. Riktig svar: C.

Oppgave 9

Steiners sats, med en parallellforskyvning av akse en lengde $a/\sqrt{2}$, gir $I_2 = I_0 + 4m(a/\sqrt{2})^2 = 2ma^2 + 2ma^2 = 4ma^2$. Riktig svar: D.

Oppgave 10

Energibevarelse gir

$$mgh = mv^2/2 + MV^2/2 = mv_x^2/2 + mv_y^2/2 + MV^2/2,$$

og impulsbevarelse horisontalt gir

$$mv_x = MV.$$

I ligningene over er v_x og v_y klossens hastighetskomponenter målt i labsystemet. Klossens hastighet relativt skråplanet blir ikke den samme som den vi måler i labsystemet, dvs y -komponentene blir like store, $v'_y = v_y$, siden skråplanet bare beveger seg horisontalt, men x -komponentene blir forskjellige, $v'_x = v_x + V$. Klossen befinner seg hele tiden på skråplanet, og med 45 graders helningsvinkel er det klart at $v'_y = v'_x$. Med andre ord, $v_y = v_x + V$. Nå har vi 3 ligninger for 3 ukjente, v_x , v_y og V . Vi kan eliminere v_y i energibevarelsesligningen med $v_y = v_x + V = (M/m + 1)V$, og deretter eliminere v_x med $v_x = MV/m$. Den resulterende ligningen for V er

$$mgh = M^2V^2/2m + m(M/m + 1)^2V^2/2 + MV^2/2 = \frac{1}{2}mV^2(1 + 3M/m + 2M^2/m^2)$$

med løsning

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{1 + 3M/m + 2M^2/m^2}}.$$

Riktig svar: C.

Oppgave 11

Løsningen her følger i stor grad samme spor som i oppgave 10, men nå har m (ringen) kinetisk energi

$$K_m = mv^2/2 + I_0\omega^2/2 = mv^2/2 + (mr^2)(v'/r)^2/2 = mv^2/2 + m(v')^2/2.$$

Her har vi brukt rullebetingelsen i skråplanets referansesystem, $\omega = v'/r$. Sammenhengen mellom ringens hastighet v i labsystemet og v' i skråplansystemet blir som for klossen i oppgave 10, så vi har:

$$\begin{aligned}v'_x &= v_x + V, \\v'_y &= v_y = v'_x = v_x + V.\end{aligned}$$

Kombinert med (pga impulsbevarelse horisontalt) $v_x = MV/m$ gir dette

$$\begin{aligned}v'_x &= v'_y = v_y = (M/m + 1)V, \\v^2 &= v_x^2 + v_y^2 = (MV/m)^2 + (M/m + 1)^2V^2, \\(v')^2 &= (v'_x)^2 + (v'_y)^2 = 2(M/m + 1)^2V^2.\end{aligned}$$

Energibevarelse gir da

$$mgh = mv^2/2 + m(v')^2/2 + MV^2/2 = \dots = \frac{1}{2}mV^2(3 + 7M/m + 4M^2/m^2)$$

med løsning

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{3 + 7M/m + 4M^2/m^2}}.$$

Riktig svar: D.

Oppgave 12

Kortvarig støtkraft F tilsier at friksjonskraften f fra underlaget kan neglisjeres gjennom støtet med varighet Δt . Newtons 2. lov gir $F\Delta t = \Delta p = p = MV_0$. Newtons 2. lov for rotasjon, om akse gjennom CM, gir $\tau\Delta t = \Delta L = I_0\Delta\omega = I_0\omega_0$. Støtkraften F angriper kuleskallet i høyde $H - R$ over sentrallinjen og virker dermed på kuleskallet med et dreiemoment $\tau = F(H - R)$ mhp aksen gjennom CM. Videre er $I_0\omega_0 = (2MR^2/3)(V_0/R) = 2MRV_0/3$ ved ren rulling. Dermed:

$$\frac{MV_0}{\Delta t} \cdot (H - R)\Delta t = 2MRV_0/3 \Rightarrow H - R = 2R/3,$$

dvs $H = 5R/3$. Riktig svar: E.

Oppgave 13

Indre dreieimpuls (spinn):

$$L_s = I_0\omega_0 = \frac{2}{3}MR^2 \cdot \frac{V_0}{R} = \frac{2}{3}MRV_0.$$

Banedreieimpuls:

$$L_b = |\mathbf{R}_{CM} \times M\mathbf{V}_0| = MRV_0.$$

Som vektorer peker disse to i samme retning, slik at total dreieimpuls blir $L = 5MRV_0/3$. Riktig svar: A.

Oppgave 14

$$L_b = MRV = 4.87 \cdot 10^{24} \cdot 108 \cdot 10^9 \cdot 35.2 \cdot 10^3 = 1.85 \cdot 10^{40} \text{ kgm}^2/\text{s}.$$

Riktig svar: D.

Oppgave 15

$$L_s \simeq \frac{2}{5}MR_0^2\omega_0,$$

som med $M = 4.87 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R_0 = 6052 \cdot 10^3 \text{ m}$ og $\omega_0 = 2\pi/T_s = 2\pi/(243 \cdot 24 \cdot 3600)$ pr sekund gir $L_s = 2.14 \cdot 10^{31} \text{ kgm}^2/\text{s}$. Riktig svar: B.