

Dekadisk forstavelse
($\mu = \text{mikro} = 10^{-6}$)

Notasjon : $[t] = s$
 "SI-enhet for tid er sekund"

Lengde	$[x] = m$	}	mekanikk
Masse	$[m] = kg$		
Tid	$[t] = s$		
Strømstyrke	$[I] = A$	}	elmag
Temperatur	$[T] = K$		
Stoffmengde	$[n] = mol$	}	termisk fysikk
Lysstyrke	$[I] = cd$		

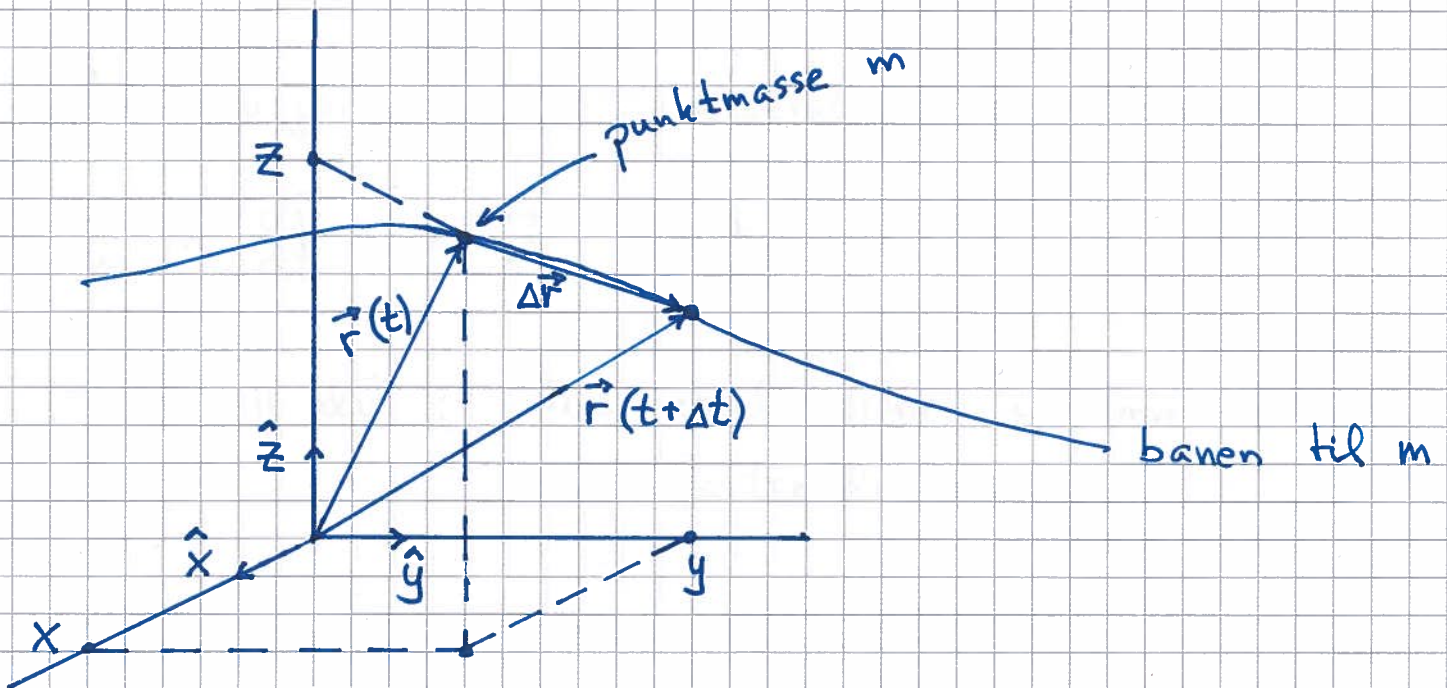
(Fra 20.05.2019 er alle disse definert med utgangspunkt i eksakte tallverdier for ulike naturkonstanter, se SI-base-unit på wikipedia.)

(2)

Sammensatte enheter :

Hastighet $[v] = \text{m/s}$ Akselerasjon $[a] = \text{m/s}^2$ osu,

Abledete enheter :

Kraft $[F] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$ Energi $[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$ osu,MEKANIKK [OS1 1-12, 15; YF 1-11, 14; LL 1-6, 9⁽⁷⁾]Kinematikk [OS1 3, 4; YF 2, 3; LL 1]

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} + z(t) \hat{z}$$

= posisjonen til m ved tid t

(3)

Enhetsvektorer : $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad (\text{dvs dimensjonsløse})$$

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 ; \quad \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

Forflytning i løpet av Δt :

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Hastighet $\stackrel{\text{def}}{=}$ forflytning pr tidsenhet

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

 $\Rightarrow \vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$; dvs $\vec{v}$ er tangent til banenAkselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=}$ hastighetsendring pr tidsenhet

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

 $\Rightarrow \vec{a} \parallel d\vec{v}$; dvs akselerasjonen i samme retning som fartsendringen

Vektorrelasjoner gjelder komponentvis:

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} ; \quad v_x = dx/dt = \dot{x} \quad \text{osv.}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} ; \quad a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \quad \text{osv.}$$

Integrasjon av $\vec{v}$ gir $\vec{r}$:

(4)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

Integrasjon av $\vec{a}$ gir $\vec{v}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} dt$$

$\Rightarrow$ som ovenfor ...

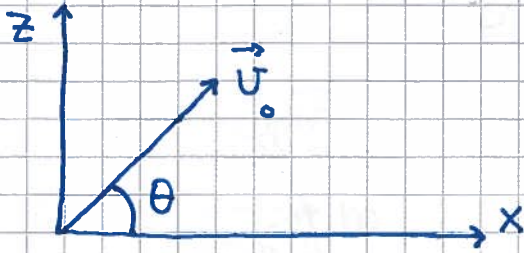
$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t) dt$$

Hvis $\vec{a}$ er konstant :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} t \quad ; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

der $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$, ~~der~~ $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$

(5)

Eks: Skrått kast; $a = g = \text{tyngdens akselerasjon}$ 

$$\vec{a} = -g \hat{z}$$

$$\vec{r}(0) = 0, \quad \vec{v}(0) = \vec{u}_0$$

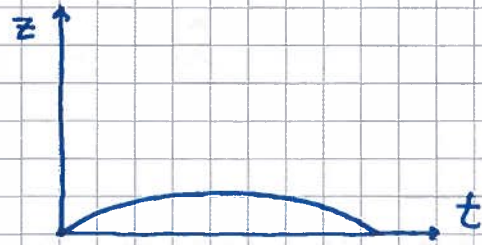
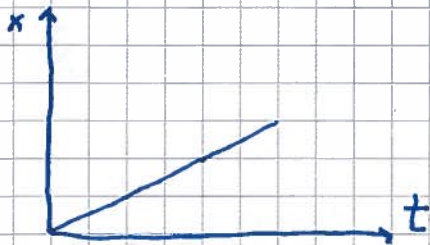
Finn $\vec{r}(t)$ og banen $z(x)$

Løsning:

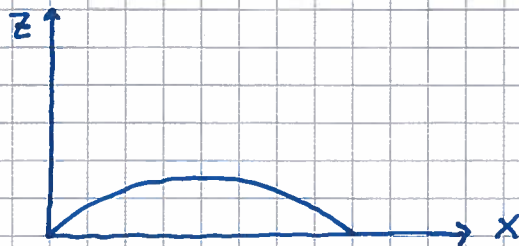
$$\vec{v}(t) = \vec{u}_0 + \vec{a}t = \vec{u}_0 - gt \hat{z}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{u}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 = \vec{u}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{z}$$

$$\Rightarrow x(t) = u_0 t \cos \theta, \quad z(t) = u_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2$$



$$\text{Banen: } t = \frac{x}{u_0 \cos \theta} \Rightarrow z(x) = x \tan \theta - \frac{g x^2}{2 u_0^2 \cos^2 \theta}$$

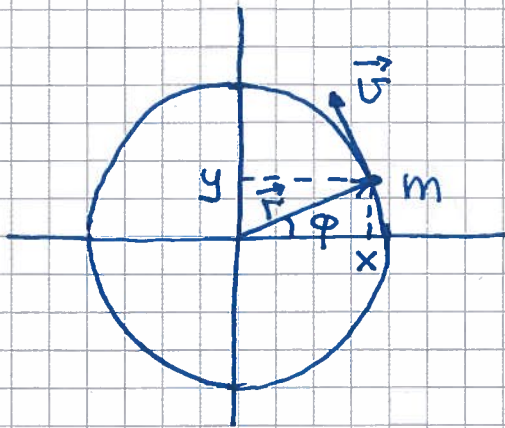


Parabel

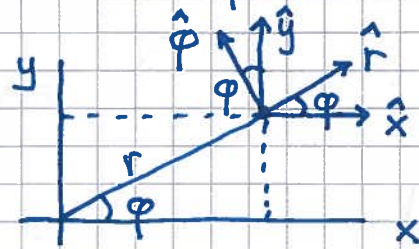
Sirkelbevegelse

[OS1 4.4; YF 3.4; LL 1.7, 1.8]

⑥



$\Rightarrow$ Lurt med polarkoordinater:



r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom $\hat{x}$ og $\hat{r}$
(positiv mot klokke)

Ser fra figuren:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y = \hat{x}r \cos \varphi + \hat{y}r \sin \varphi = r \hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi, \quad \hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$$

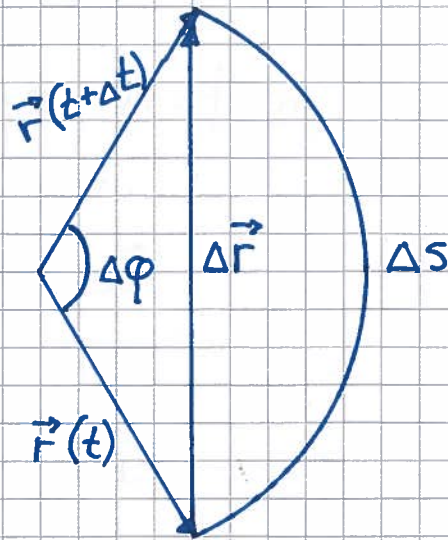
Vinkelhastighet $\stackrel{\text{def}}{=}$ omløpt vinkel pr tidsenhet

$$\omega = d\varphi/dt = \dot{\varphi} \quad ; \quad [\omega] = 1/s$$

Vinkel $\stackrel{\text{def}}{=}$ buelengde / radius

$$\Delta\varphi = \Delta s/r \quad ; \quad [\varphi] = 1 \quad (\text{evt. rad})$$

(7)



Når $\Delta t \rightarrow 0$, blir $\Delta\varphi$ liten og $\Delta r \approx \Delta s = r \Delta\varphi$

$$\Rightarrow v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta\varphi}{\Delta t} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega$$

Retning: Ser at $\Delta \vec{r} \perp \vec{r}$ når $\Delta\varphi \rightarrow 0$

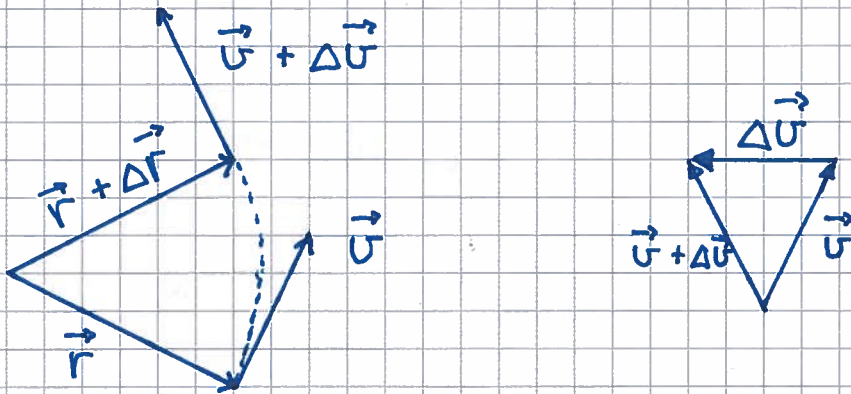
Vet fra før at $\vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$

Dermed: $\vec{v} \perp \vec{r}$, dvs $\vec{v} \parallel \hat{\varphi}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = v \hat{\varphi} = r\omega \hat{\varphi}}$$

Akselerasjon:

Vi antar først uniform sirkelbevegelse, dvs konstant ω .



Vi ser at $\Delta \vec{v}$, og dermed $\vec{a}$, har retning inn mot sirkelens sentrum.

Antar $\varphi(0) = 0$ og regner ut $\vec{a}_\perp$:

$$\omega = d\varphi/dt \Rightarrow \int_0^\varphi d\varphi = \omega \int_0^t dt \Rightarrow \varphi(t) = \omega t$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \hat{x} r \cos \omega t + \hat{y} r \sin \omega t$$

$$\vec{v}(t) = -\hat{x} \omega r \sin \omega t + \hat{y} \omega r \cos \omega t \quad (= \omega r \hat{\phi})$$

$$\vec{a}_\perp(t) = -\hat{x} \omega^2 r \cos \omega t - \hat{y} \omega^2 r \sin \omega t$$

$$= -\omega^2 \vec{r}(t)$$

$$= -\omega^2 r \hat{r}(t)$$

$$= \underline{\text{sentrifetalakselerasjonen}}$$

⑨

Hvis v og ω endres, har vi

baneakselerasjon,

$$a_{\parallel} = \dot{v} = r \dot{\omega}$$

og inkelakselerasjon,

$$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\phi} \quad ; \quad [\alpha] = 1/s^2$$

Total akselerasjon ved sirkelbevegelse:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\perp} + \vec{a}_{\parallel} = -\omega^2 r \hat{r} + \dot{\omega} r \hat{\phi}$$

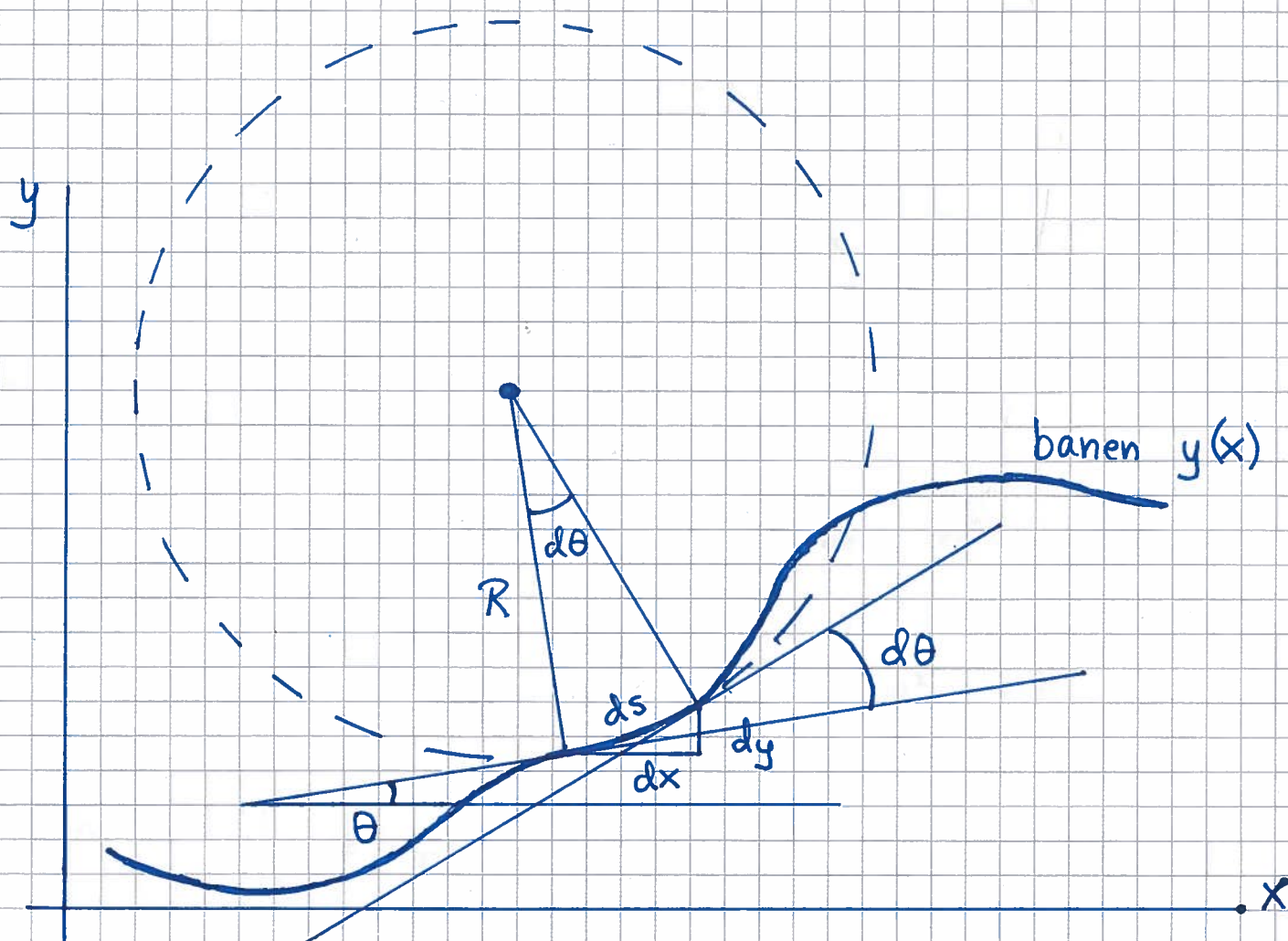
$$\text{evt. } \vec{a}_{\perp} = -\frac{v^2}{r} \hat{r} \quad (\text{siden } \omega = v/r)$$

Periode = tid pr omløp:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad ; \quad [T] = s$$

Frekvens = antall omløp pr tidsenhet:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad ; \quad [f] = \frac{1}{s} = \text{Hz} \quad (\text{hertz})$$



Langs banen er $a_{\perp} = v^2/R$, der krumningsradius R er radius i sirkelen som best tangerer banen. Vi skal vise at

$$\frac{1}{R} = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

der $y' = dy/dx$ og $y'' = d^2y/dx^2$

Def. av vinkel: $d\theta = \frac{ds}{R} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds}$ (11)

Pythagoras: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$
 $\Rightarrow ds = dx \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$

Kjerneregel: $\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}$

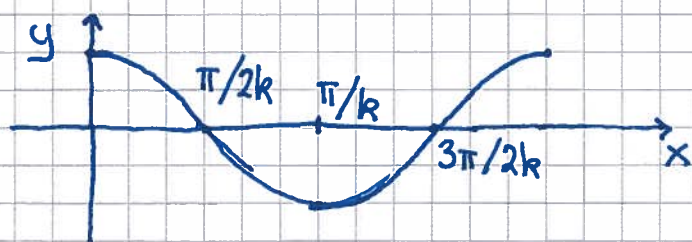
Fra figur: $\tan \theta = \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right) = \text{banens hellingvinkel}$

$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{1 + (y')^2} \cdot y''$

Dermed: $\frac{1}{R} = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$ (der vi velger R som positiv)

Eks: $y(x) = A \cdot \cos kx$



$y' = -kA \sin kx$

$y'' = -k^2A \cos kx$

$\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{|k^2A \cos kx|}{[1 + k^2A^2 \sin^2 kx]^{3/2}}$

Topp- og bunnpunkter: $\cos kx = \pm 1$, $\sin kx = 0 \Rightarrow \frac{1}{R} = k^2A$

Vendepunkter: $\cos kx = 0 \Rightarrow \frac{1}{R} = 0$ ($R \rightarrow \infty$) $\Rightarrow a_{\perp} = 0$

Newtons lover [OS1 5,6 ; YF 4,5 ; LL 2,3] (12)

m , $\vec{v}$ og $\vec{a}$ er hhv legemets masse, hastighet og akselerasjon

$\vec{F}$ = netto ytre kraft på legemet

N1 : $\boxed{\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{konstant}}$

N2 : $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$

N3 : $\boxed{\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}}$

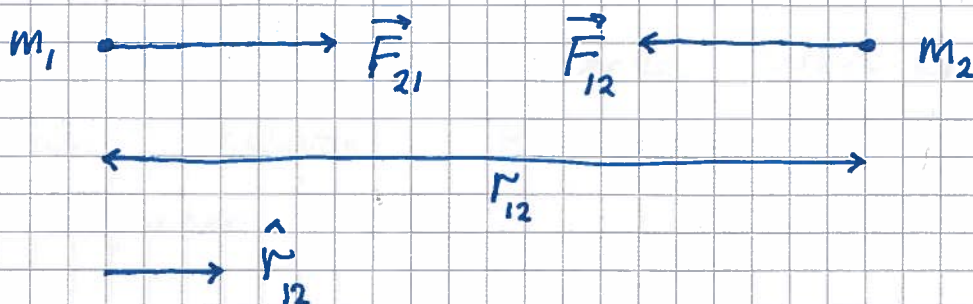
dvs krefter er vekselvirkning mellom legemer.

Når A påvirker B med $\vec{F}_{AB}$, påvirker B A med $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

$$[F] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N} \quad (\text{newton})$$

Fundamentale krefter [YF 5.5; LL 2.1; OS1 13.1; OS2 5.3]

- Gravitasjon. Svak tiltrekning mellom masser.

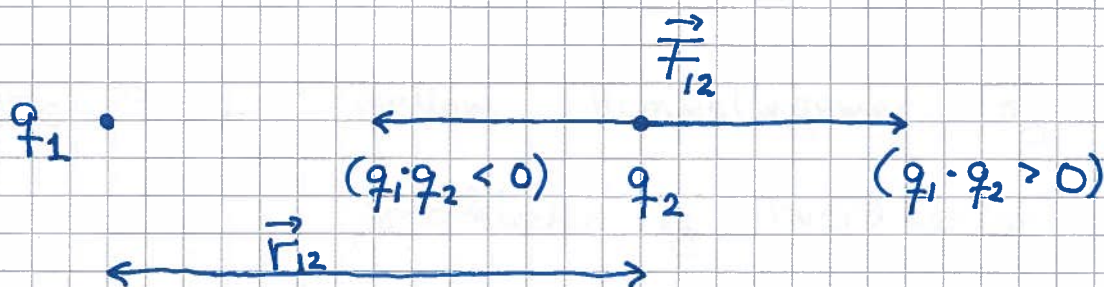


Newtons gravitasjonslov:

$$\vec{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Gravitasjonskonstanten: $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$

- Elektromagnetisk vekselvirkning.
Tiltrekning og frastøtning mellom ladninger.



Coulombs lov:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$[q] = C \text{ (coulomb)} ; 1 C = 1 As$$

(14)

$$\text{Vakuumpermittiviteten : } \epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

- Kjernekrefter. Svake og sterke. Svært kort rekkevidde. Relevans: Radioaktivitet. Stabilitet av atomkjerner.

Vår hverdag styres av gravitasjon (F_G) og coulombkrefter (F_E).

$$\text{Proton : } m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} , q = e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\text{Elektron : } m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} , q = -e$$

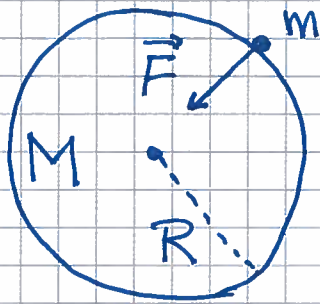
Dermed :

$$F_E \gg F_G \quad \text{mellom atomer og hverdagslige objekter}$$

$$F_G \gg F_E \quad \text{mellom himmellegemer, og mellom jordkloden og hverdagslige objekter}$$

Tyngde [os1 13.2 ; YF 4.4 ; LL 2.5]

(15)



Tyngden av m =
Gravitasjonskraften på m fra M

$$F = G M m / R^2$$

Jorda : $M \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R \approx 6370 \text{ km}$

$$\Rightarrow g = GM/R^2 \approx 9.81 \text{ m/s}^2$$

= tyngdens akselerasjon på/nær jordas overflate

Fritt fall dersom tyngden mg er
eneste kraft på m . N2 gir da

$$mg = ma$$

dvs

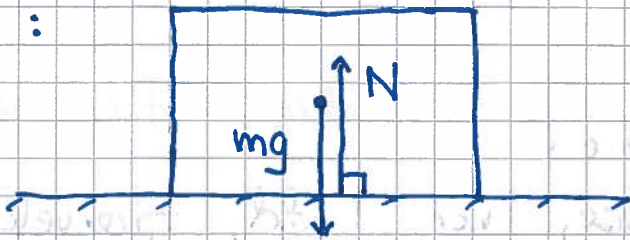
$$\underline{a = g}$$

Kontaktkrefter

[OS1 5.6, 6.2, 6.4^(14,3); YF 4.1, 5.3; LL 3, 8] (16)

Normalkraft : N = normalkomponenten av frastøtende coulombkraft mellom to legemer i kontakt

Eks :



Hvis klossen ligger i ro :

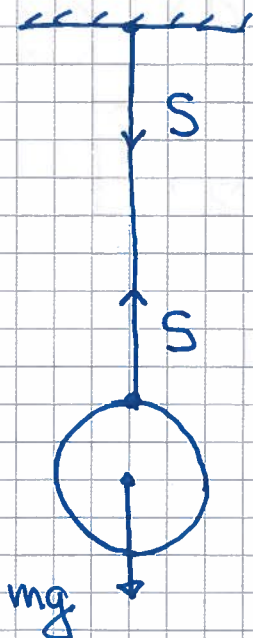
$$N = mg \quad (N1)$$

Snorkraft (strekk, "tension") :

S = netto tiltrekkende coulombkraft mellom snora og legemet som er festet til snora ;

$\vec{S}$ i snoras retning

Eks :

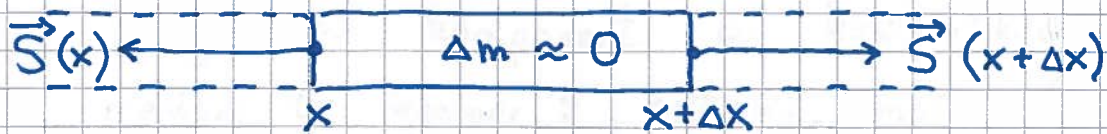


Hvis kula henger i ro :

$$S = mg \quad (N1)$$

[Hva er "motkreftene" til N , S og mg ?]

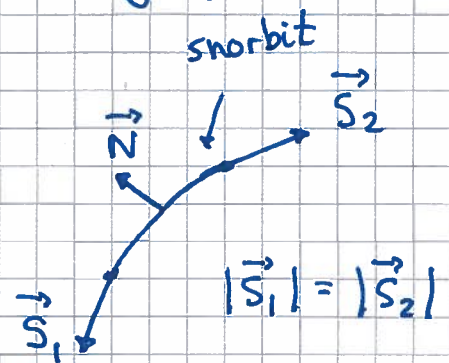
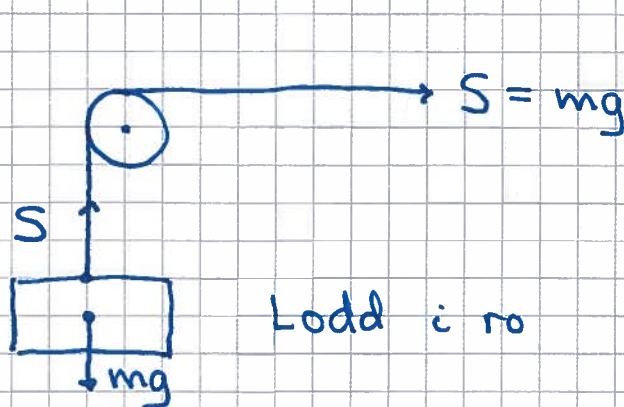
Let, stram snor blir rett, og med konstant S : (17)



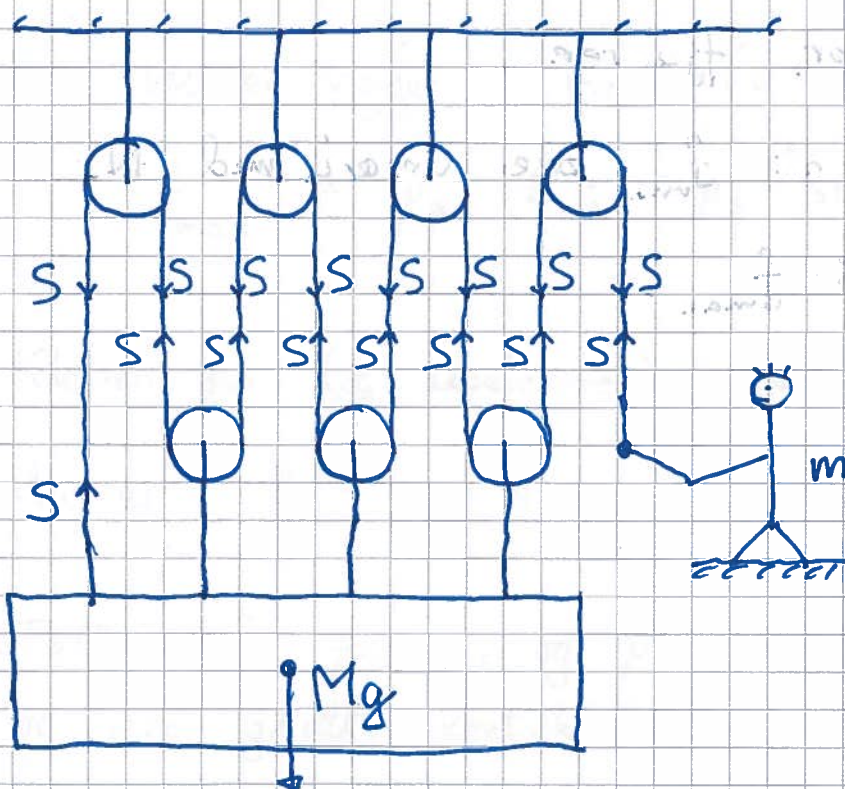
$$N1, N2 \Rightarrow \vec{S}(x) + \vec{S}(x+\Delta x) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{S}(x+\Delta x) = -\vec{S}(x) \Rightarrow S = \text{konst.}$$

Trinse (friksjonsfri) endrer (kun) retning på $\vec{S}$:



Talje:



N1 for kassa:

$$7S - Mg = 0$$

$\Downarrow$

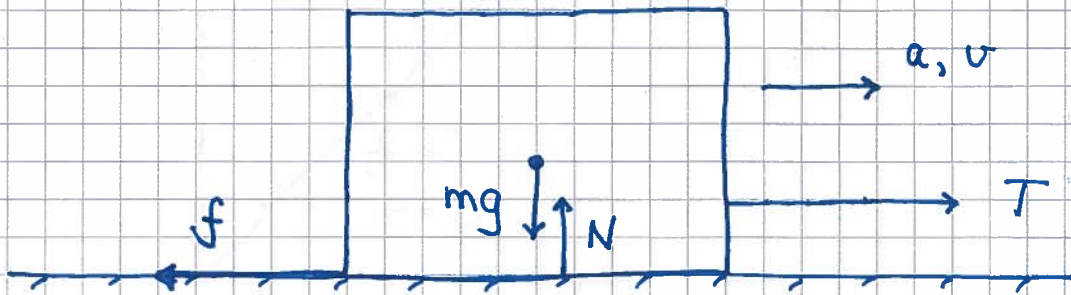
$$S = \frac{1}{7} Mg$$

$$(S_{\max} = mg)$$

Friskjonskrefter [OS1 6.2; YF 5.3; LL 3.1] (18)

f = tangentiell komponent av kontaktkraft mellom to legemer; retning mot ("ønsket") relativ bevegelse

Tørr friksjon:



T = trekk-kraft, f = friskjonskraft

$$NR: T - f = ma$$

Hvis klossen ligger i ro ($a=0$): $f = T$;

$$f_{\max} = \mu_s \cdot N; \quad \mu_s = \text{statisk friskjonskoeffisient}$$

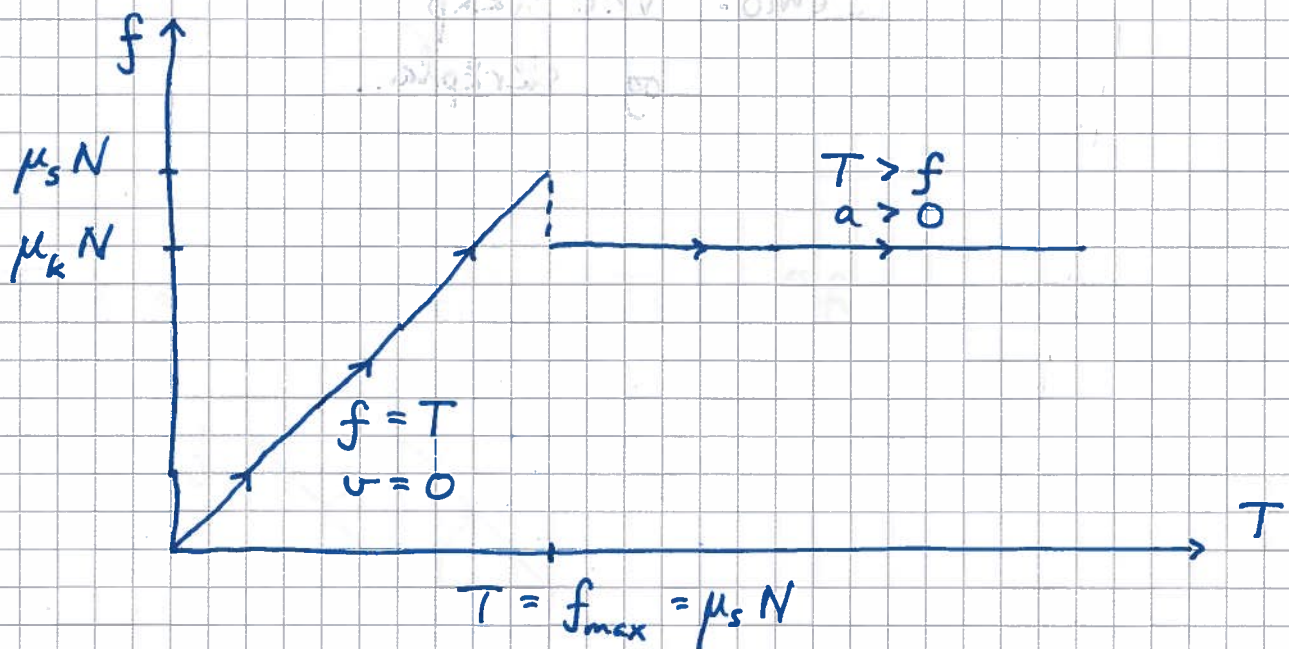
Klossen glir (og akselererer) hvis $T > f_{\max}$;

$$\text{da er } f = \mu_k \cdot N; \quad \mu_k = \text{kinetisk friskjonskoeffisient}$$

Tallverdier for μ_s og μ_k avhenger av type materialer og hvor glatte kontaktflatene er.

Vanligvis er $\mu_s > \mu_k$: Ujevnheter i overflatene gir best grep når $v = 0$.

Grafisk :



Et par tallverdier :

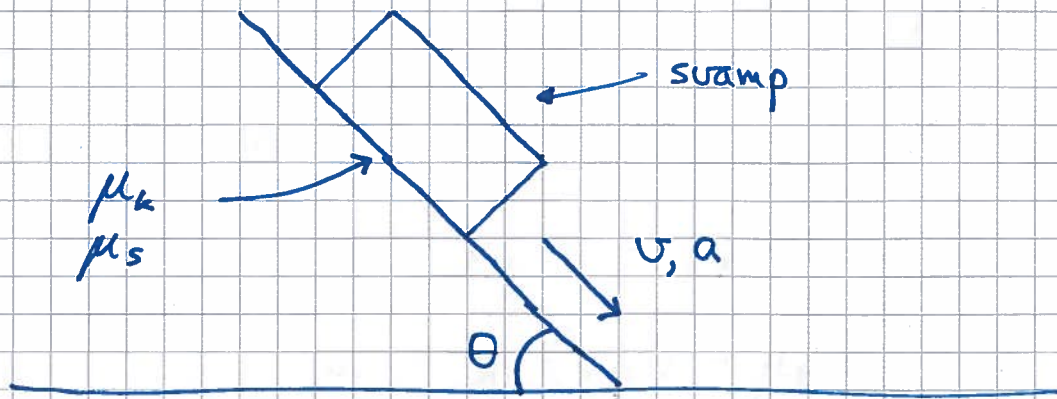
Stål mot is : $\mu_s \approx 0.03$

Gummi mot plast : $\mu_s \approx 1$ (Lab)

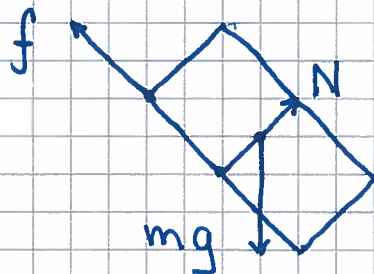
Våt svamp mot bordplate : $\mu_s > 1$

(se eks. neste side)

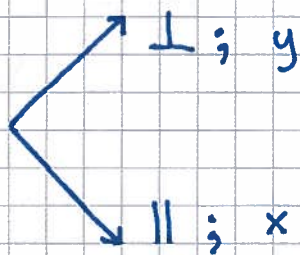
Problemløsningsstrategi via et eksempel:



- Finn alle ytre krefter. Tegn "fritt-legeme-diagram".



- Velg koordinatsystem. Dekomponer.



$$N = N_y, \quad N_x = 0$$

$$f = f_x, \quad f_y = 0$$

$$G_x = mg \sin \theta, \quad G_y = mg \cos \theta$$

- Bruk N1, $\sum_i \vec{F}_i = 0$, eller N2, $\vec{a} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{m}$, og løs resulterende ligninger.

Her: N1 i y -retn. $\Rightarrow N = mg \cos \theta$

N2 i x -retn. $\Rightarrow mg \sin \theta - f = ma$

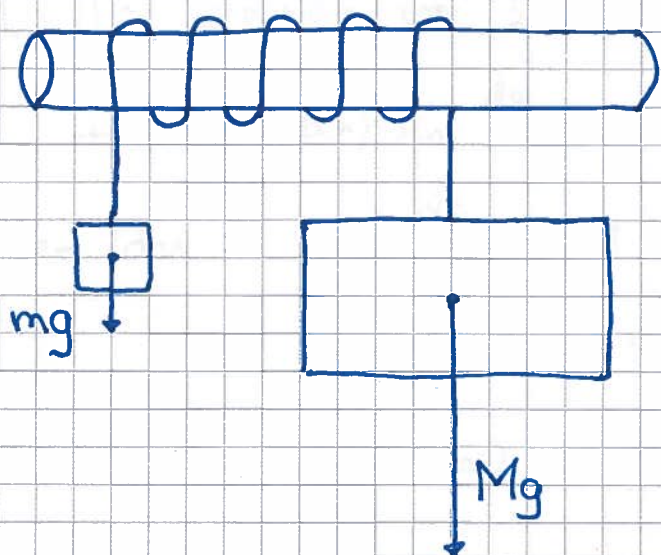
Hvis svæmp i ro : $f = mg \sin \theta$ ($a=0$)

Gir dersom $mg \sin \theta > f_{\max} = \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta$,
dvs dersom $\tan \theta > \mu_s$.

Da er $f = \mu_k N = \mu_k mg \cos \theta$, dvs
 $a = g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$

Exp. med våt svæmp gir max θ med svæmp i ro,
og dermed $\mu_s = \tan \theta_{\max}$.

Eks : Snorfiksjon ["Med livet som innsats"]

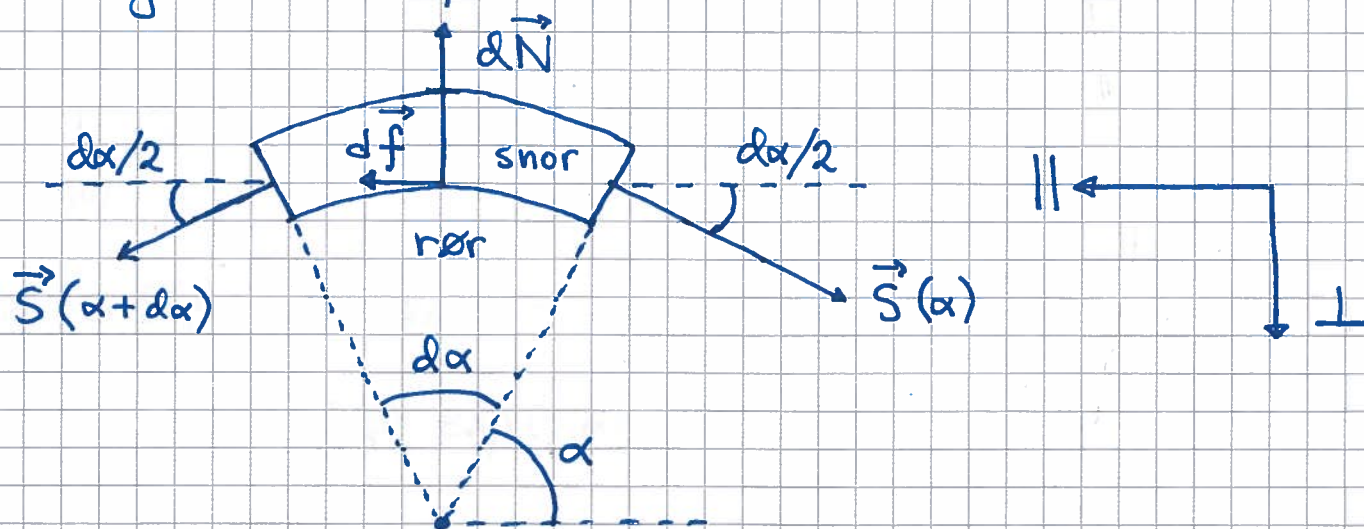


μ = statisk fiksjonskoeff.
mellom rør og snor

Finn minste m som holder M oppe for gitt
kontaktvinkel φ mellom rør og snor.

(I figuren : $\varphi = 9\pi$)

Løsning : N1 for bitteliten snorbit



$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \underbrace{\vec{S}(\alpha+d\alpha) + \vec{S}(\alpha)}_{\text{snordrag (fra resten av snora)}} + \underbrace{d\vec{N} + d\vec{f}}_{\text{normalkraft og friksjonskraft (fra røret)}} = 0$$

Minimal m når df er maksimal : $df = df_{\max} = \mu \cdot dN$

$$N1, ||: S(\alpha+d\alpha) \cos \frac{d\alpha}{2} - S(\alpha) \cos \frac{d\alpha}{2} + \mu dN = 0$$

$$N1, \perp: S(\alpha+d\alpha) \sin \frac{d\alpha}{2} + S(\alpha) \sin \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

$$\text{Liten } d\alpha: \cos \frac{d\alpha}{2} \approx 1, \quad \sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$$

$$S(\alpha+d\alpha) - S(\alpha) = dS$$

$$S(\alpha+d\alpha) + S(\alpha) = 2S$$

$$\text{Dermed: } dS = -\mu dN; \quad 2S \cdot \frac{d\alpha}{2} = dN$$

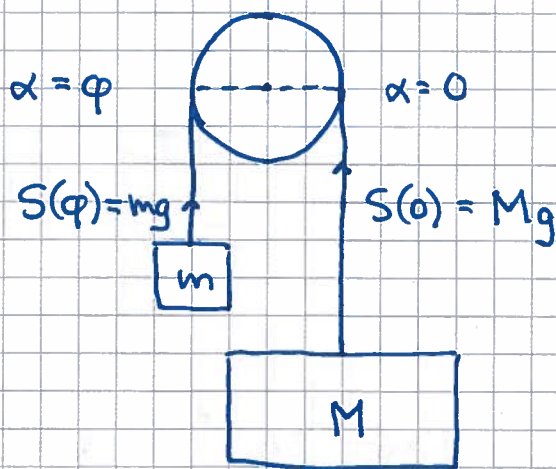
$$\Rightarrow dS/S = -\mu d\alpha$$

Finner $S(\varphi)$ ved å integrere, fra $\alpha=0$ til $\alpha=\varphi$: (23)

$$\int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = -\mu \int_0^\varphi d\alpha$$

$$\Rightarrow \ln S(\varphi) - \ln S(0) = -\mu\varphi$$

$$\Rightarrow S(\varphi) = S(0) \exp(-\mu\varphi)$$



Hvis $\mu \approx 0.17$, $M = 1 \text{ kg}$ og $\varphi = 9\pi$, blir

$$m = 1000g \cdot \exp(-0.17 \cdot 9\pi) \approx 8g$$

Omvendt: Påkrevd m for å heise M oppover er

bestemt av $S(\varphi) = S(0) \exp(+\mu\varphi)$, dvs

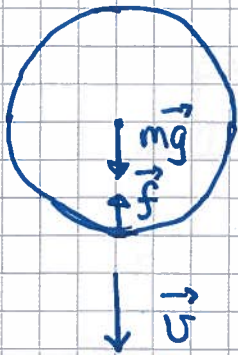
$$m = 1 \text{ kg} \cdot \exp(+0.17 \cdot 9\pi) \approx 122 \text{ kg}$$

Friksjon i fluider [OS1 6.4, 14.7; YF 5.3; LL 8]

(24)

Ser på symmetriske legemer med hastighet $\vec{v}$ relativt omgivende fluid (gass eller væske) med massetetthet ρ og dynamisk viskositet μ

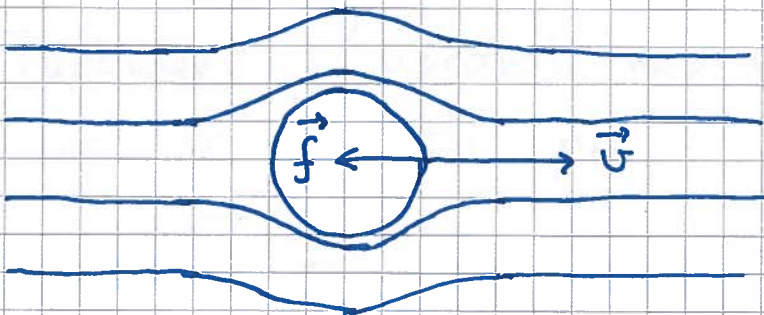
Eks: Ball i luft



$\vec{f}$ = luftmotstand

areal πr^2 på tvers av $\vec{v}$

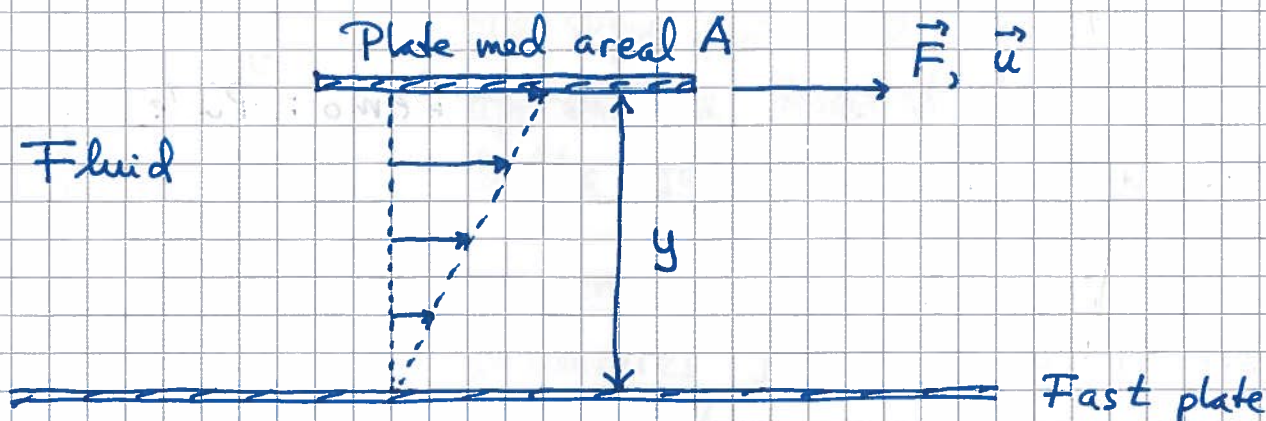
Laminær (pen, lagdelt) strømning av fluidet når v er liten nok :



$$\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$$

Kule, radius r : $k = 6\pi \mu r$ (Stokes' lov)

Dynamisk viskositet μ ; definisjon og måling:



Liten fart u på fri plate gir lineær fartsprofil i fluidet mellom platene.

Empirisk (dvs: eksperimentelt) finner man

$$F = \mu \cdot \frac{A \cdot u}{y}$$

der μ kalles fluidets dynamiske viskositet; $[\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$

Tallverdier $\nu / 20^\circ\text{C}$:

Fluid	Luft	Vann	Glyserol	Sirup
μ	$2 \cdot 10^{-5}$	10^{-3}	1	10^2

Turbulent (uordnet, med virvler) strømning når v er stor nok:

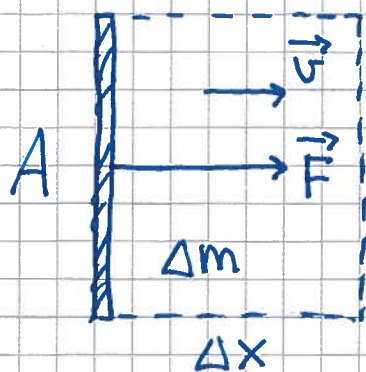
$$\vec{f} = -\left(\frac{1}{2} \rho A C_d\right) v^2 \hat{v}$$

C_d = drag-koeffisient (Kule: $C_d \approx 0.5$)

A = legemets areal på tvers av $\vec{v}$

Eks 1: C_d for plate

(26)



Må skyve plata med kraft F for å opprettholde konstant fart v , fordi lufta foran må settes i bevegelse.

Massen $\Delta m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot A \cdot \Delta x$
akselereres fra 0 til v på tiden
 $\Delta t = \Delta x / v$.

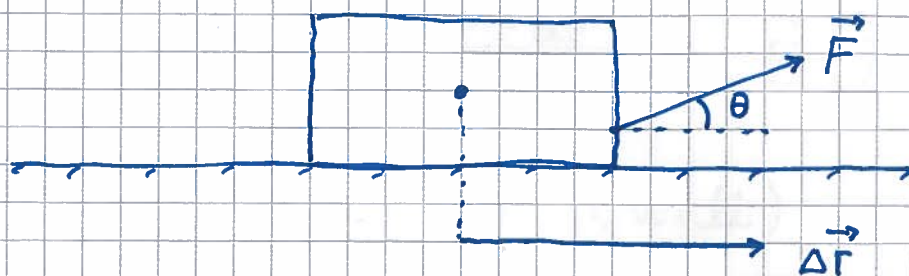
N2 gir da : $F = \Delta m \cdot \frac{v}{\Delta t} = \rho A \Delta x \cdot \frac{v}{\Delta t} = \rho A v^2$, som
stemmer med $\frac{1}{2} \rho A C_d v^2$ dersom $C_d = 2$

Eks 2 : Bilen Revolve har $A \approx 1.1 \text{ m}^2$ og $C_d \approx 1.35$.
Hva er luftmotstanden ved 100 km/h ?

Løsning :

$$f = \frac{1}{2} \rho A C_d v^2$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1.1 \text{ m}^2 \cdot 1.35 \cdot \left(\frac{100}{3.6}\right)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$
$$\approx \underline{\underline{690 \text{ N}}}$$

(Luft har $\rho \approx 1.2 \text{ kg/m}^3$)

Arbeid [OS1 7.1 ; YF 6.1-6.3 ; LL 4.1]

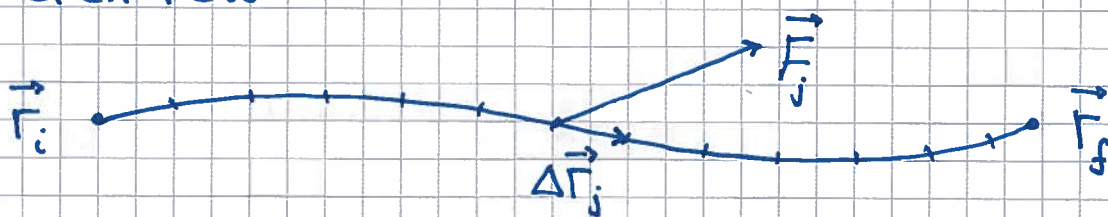
arbeid $\stackrel{\text{def}}{=}$ kraft $\times$ forflytning

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta$$

= arbeid utført av $\vec{F}$ på klossen når
klossens forflytning er $\Delta \vec{r}$

$$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \quad (\text{joule})$$

Generelt :



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \xrightarrow{\Delta r_j \rightarrow 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_j} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeid utført av $\vec{F}$ ved forflytningen
fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_j$

Effekt [OS1 7.4 ; YF 6.4 ; LL 4.1]

(28)

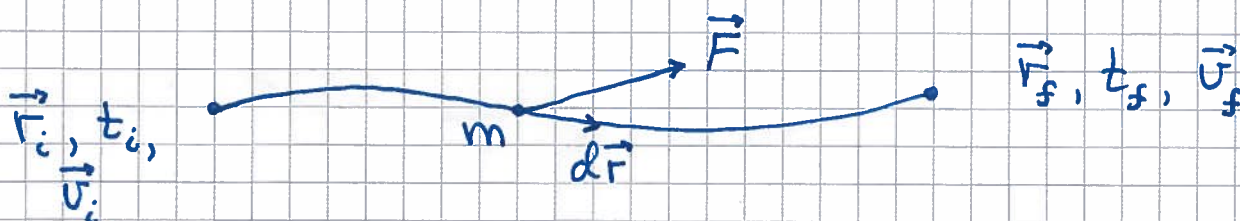
effekt $\stackrel{\text{def}}{=}$ arbeid (eller energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[P] = J/s = W \text{ (watt)}$$

$$1 \text{ kWh} = 1000 \frac{J}{s} \cdot 3600 s = 3.6 \text{ MJ}$$

Kinetisk energi [OS1 7.2 ; YF 6.2 ; LL 4.2]



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_i^f \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{v} \cdot d\vec{v} + d\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(v^2)$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_{v_i^2}^{v_f^2} d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$K = \text{kinetisk energi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2$$

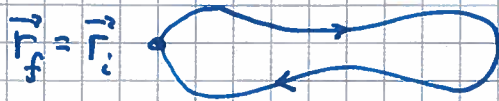
$$\Rightarrow \boxed{W = \Delta K = K_f - K_i}$$

Arbeidet W utført på legemet tilsvarer endringen i legemets kin. energi, ΔK

Konservative krefter [os1 8.2 ; YF 7.3 ; LL 4]

(29)

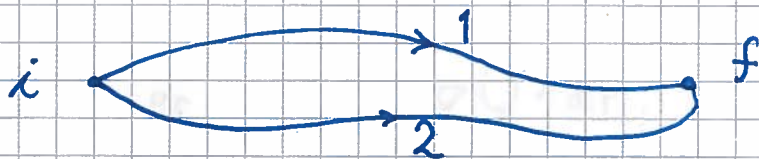
Anta at $\vec{F}$ virker på legeme som returnerer til startposisjonen:



Hvis $K_f = K_i$, er $W = \Delta K = 0$, dvs

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Da er $\vec{F}$ en konservativ kraft, og arbeidet W er uavhengig av veien:



$$\begin{aligned} 0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 + \left\{ \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2 \\ &= W_1 - W_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{W_1 = W_2}$$

Konservative krefter: Tyngdekraft, coulombkraft

Friksjonskrefter er ikke konservative

Potensiell energi [OS1 8.1-8.4; YF 7.1-7.4; LL4.3-4.4] (30)

Hvis $\vec{F}$ er konservativ, defineres den potensielle energien slik:

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Her har vi valgt å sette $U=0$ i $\vec{r} = \vec{r}_0$.

Dvs: Bare forskjeller i pot. energi har fysisk betydning

For liten forflytning er altså $dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Generelt er $dU = \nabla U \cdot d\vec{r}$, med

$$\nabla U = \hat{x} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial U}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial U}{\partial z} = \text{gradienten til } U$$

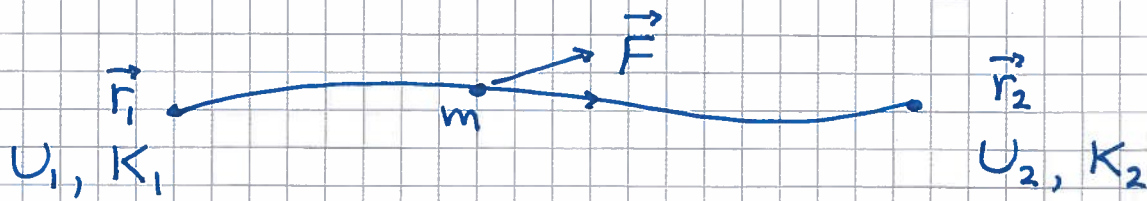
$$d\vec{r} = \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz$$

Sammenligning gir nå

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla U}$$

Bevaring av mekanisk energi

[OS1 8.3 ; YF 7.1-7.3 ; LL 4.5]



$$\Delta K = K_2 - K_1 = W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_2 - U_1 = - \int_0^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} - \left\{ - \int_0^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\} \\ &= \int_2^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_0^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_2^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W \end{aligned}$$

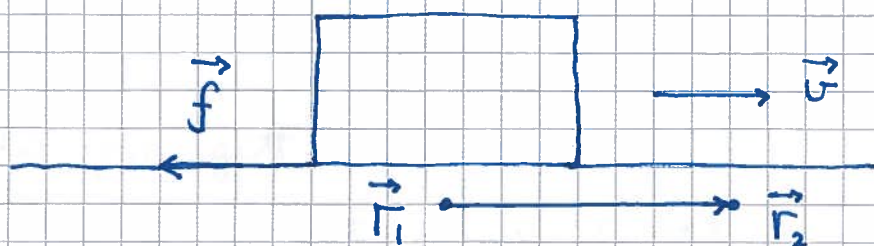
$$\Rightarrow K_2 - K_1 = U_1 - U_2$$

$$\Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Dvs: Total mekanisk energi,

$$E = K + U$$

er bevarat i et konservertiert system



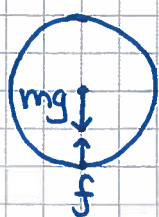
$$W_f = \int_1^2 \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{siden } \vec{f} \text{ alltid har retning mot } d\vec{r}$$

Mekanisk energi tapes ; omdannes til varme, lyd etc.

Siden $\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$, er $\vec{f}$ ikke konservativ

Ved ren rulling er kontaktpunktet i ro, dvs statisk frøksjon, $d\vec{r} = 0 \Rightarrow W_f = 0$, og mek. energi er bevart.

Ekse : Bordtennisball som faller



$$\begin{aligned} m &= 2.7 \text{ g} \\ r &= 20 \text{ mm} \\ C_d &= 0.5 \end{aligned}$$

- Hva er max fart ?
- Anta max fart og bestem $|W_f|$ når ballen har falt 20 m. ($v_i = 0$)

Løsning :

$$\bullet \text{ Vi antar } f = \frac{1}{2} \rho A C_d v_t^2 \quad \text{når } v = v_{\max} = v_t = \text{terminal-hastigheten}$$

$$N1 \Rightarrow f = mg \Rightarrow v_t = \sqrt{2mg / \rho A C_d} \approx \underline{8.4 \text{ m/s}} \quad (\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3 ; A = \pi r^2)$$

$$\bullet E_i = U_i = mgh ; \quad E_f = \frac{1}{2} m v_t^2$$

$$\begin{aligned} |W_f| &= E_i - E_f = mgh - \frac{m^2 g}{\rho A C_d} = mg(h - m / \rho A C_d) \\ &= \underline{0.43 \text{ J}}, \text{ som er } 82\% \text{ av opprinnelig mek. energi.} \end{aligned}$$

$$(\text{Fritt fall } 20 \text{ m} \Rightarrow v_f = \sqrt{2gh} \approx 20 \text{ m/s})$$

Impuls [051 9 ; YF 8 ; LL 5]

(= bevægelsesmængde = linear momentum)

N2, for gitt masse m :

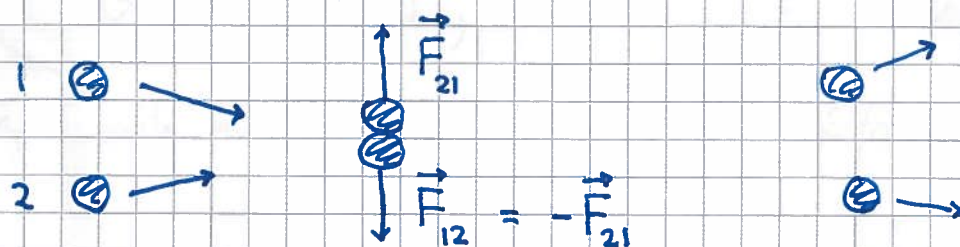
$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\vec{v} = \text{massens impuls} ; [\vec{p}] = \text{kg m/s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Hvis } \vec{F} = 0, \text{ er } \vec{p} \text{ bevart}}$$

Loven om
impulsbevarelse

Indre krefter i et system endrer ikke total impuls:



$$N3 \Rightarrow \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$$

$$\stackrel{N2}{\Rightarrow} \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \{ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konstant}$$

Kollisjoner [OS1 9.2-9.4; YF 8.3, 8.4 ; LL 5] (34)

Hvis ytre krefter kan neglisjeres, er total impuls bevart i en kollisjon; men ikke nødv.vis mek. energi E .

Elastisk støt: $\Delta E = 0$

Uelastisk støt: $\Delta E < 0$

Fullstendig uelastisk støt: Legemene henger sammen med felles hastighet etter kollisjonen. Gir maksimalt tap av mekanisk energi E .

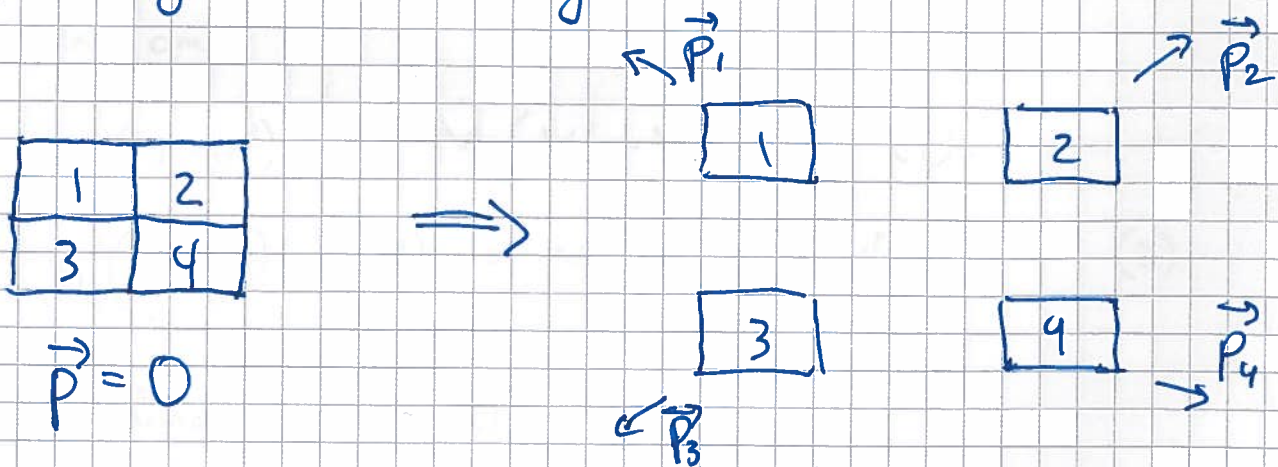
De fleste kollisjoner er kortvarige og skjer på et gitt sted

$$\Rightarrow \Delta U \approx 0, \quad \Delta E \approx \Delta K \text{ i kollisjonen}$$

Tapt mek. energi transformeres til deformasjon, varme, lyd.

En eksplosjon kan betraktes som en "omvendt"

fullstendig uelastisk kollisjon:



$$\sum_{j=1}^4 \vec{p}_j = 0$$

Sentralt støt [OS1 9.4; YF 8.2-8.4; LL 5.3]

(35)

Støt mellom m og M langs ei linje:

Før: $m \rightarrow v$ $V \leftarrow M$ ($\rightarrow +$)

Etter: $v' \leftarrow m$ $M \rightarrow V'$

Altid: $\Delta p = 0 \Rightarrow mv + MV = mv' + MV' \quad (1)$

(a) Fullst. uel. støt:

$$v' = V' = \frac{mv + MV}{m + M}$$

(b) Delvis uel. støt: Ikke løsbart (1 lign., 2 ukjente)

(c) Elastisk støt:

$$\Delta K = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m(v')^2 + \frac{1}{2}M(V')^2 \quad (2)$$

Skir om (1) og (2):

$$m(v - v') = M(V' - V) \quad (1)$$

$$m(v - v')(v + v') = M(V' - V)(V' + V) \quad (2)$$

(2) dividert med (1) gir

$$v + v' = V' + V \quad (3)$$

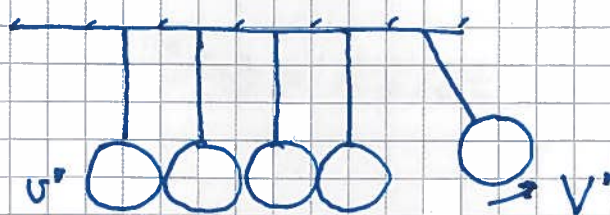
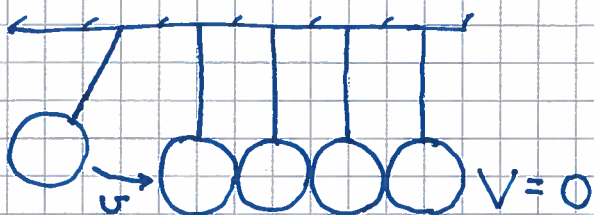
Tar hvor $(3) \cdot M - (1)$ og $(3) \cdot m + (1)$ og får

(36)

$$u' = \frac{M}{m+M} \left\{ 2V + u \cdot \frac{m-M}{M} \right\}$$

$$V' = \frac{m}{M+m} \left\{ 2u + V \cdot \frac{M-m}{m} \right\}$$

Eks 1: Newtons kugge



$$m = M \Rightarrow V' = u, \quad u' = V = 0$$

Eks 2: Elastisk ball mot vegg



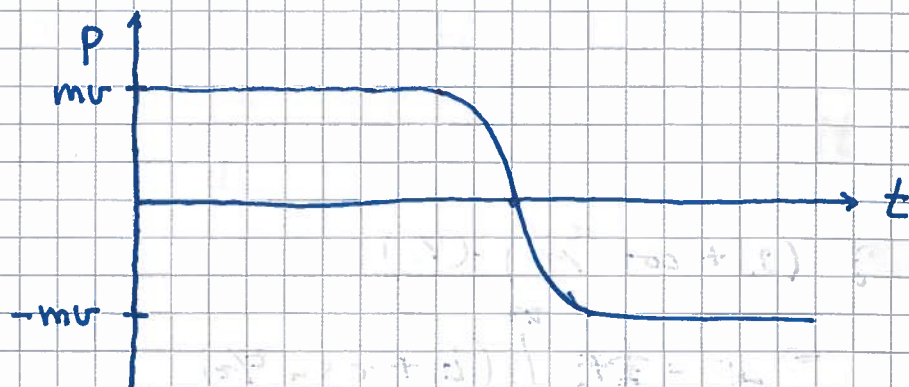
$$u' = \frac{M}{m+M} \left\{ 0 + u \cdot \frac{m-M}{M} \right\} \stackrel{m \ll M}{=} -u$$

$$\Rightarrow K' = \frac{1}{2} m (u')^2 = \frac{1}{2} m u^2 = K \quad ; \quad \text{OK}$$

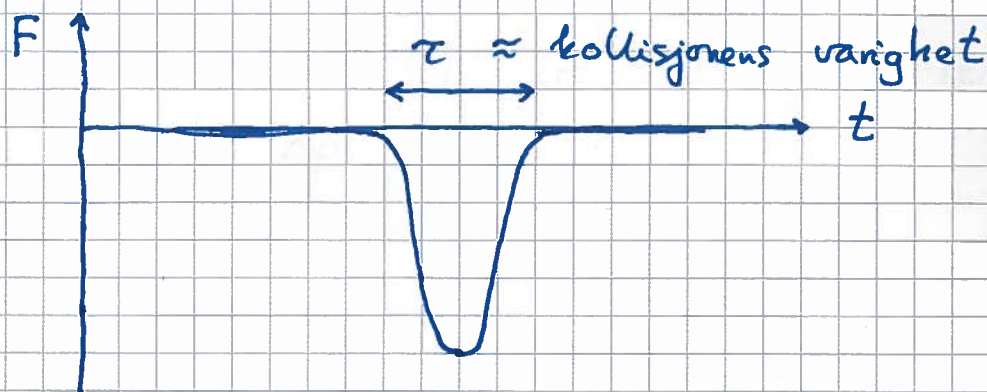
$$p' = m u' + M V' = -m u + M \cdot \frac{m}{m+M} \cdot 2u$$

$$= -m u + 2m u = m u = p \quad ; \quad \text{OK}$$

Ballens impuls $p(t)$ (kvalitativt) :



Kraften fra veggen på ballen, $\vec{F}(t) = d\vec{p}/dt$:



Anta f.eks. $\tau \approx 2 \text{ ms}$ og $|\Delta \vec{v}| \approx 40 \text{ m/s}$.

Gir en midlere akselerasjon i støtet

$$\langle a \rangle \approx \frac{40 \text{ m/s}}{0.002 \text{ s}} = 20 \text{ km/s}^2 \gg g$$

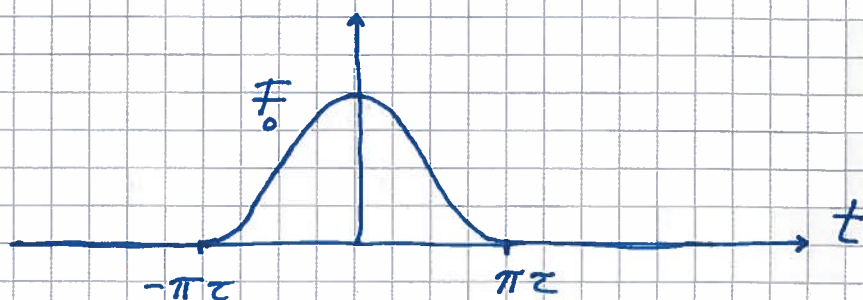
Dvs, tyngden mg kan trygt neglisjeres i selve kollisjonen

Kraftstøt ("impulse") :

Ytre kraft $\vec{F}(t)$ gir legemet en impulsending

$$\Delta \vec{p} = \int d\vec{p} = \int \vec{F}(t) dt$$

Eks :



Anta $F(t) = \frac{1}{2} F_0 (1 + \cos t/\tau)$ for $|t| \leq \pi\tau$
og regn ut Δp .

Løsn :

$$\Delta p = \int_{-\pi\tau}^{\pi\tau} F(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} F_0 \int_{-\pi\tau}^{\pi\tau} (t + \tau \sin t/\tau) dt$$

$$= \frac{1}{2} F_0 \cdot 2\pi\tau$$

$$= \underline{\underline{\pi F_0 \tau}}$$

Rakett [OS1 9.7; YF 8.6; LL 5.4]

(39)



Eksosfart relativt raketten : $u < 0$

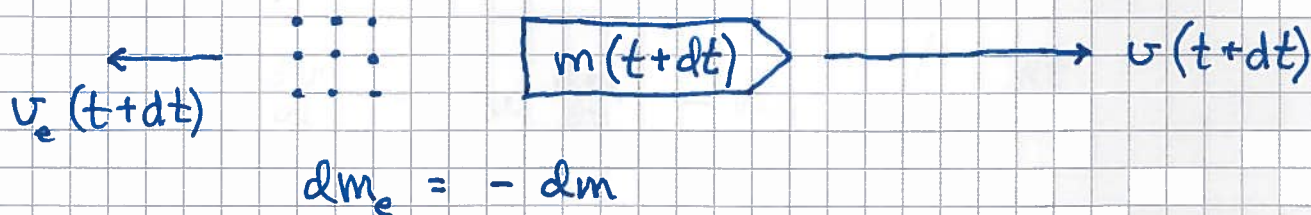
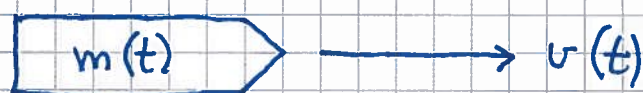
Rakettfart — " — fast system: $v > 0$

Eksosfart — " — — " — : $u_e = u + v$

Drivstoff-forbruk pr tidsenhet : $dm/dt < 0$

Anta $u = \text{konstant}$ og (foreløpig) $F_{ytre} = 0$

$\Rightarrow$ Impulsen er bevart for en gitt masse :



$$p(t) = m(t) \cdot v(t)$$

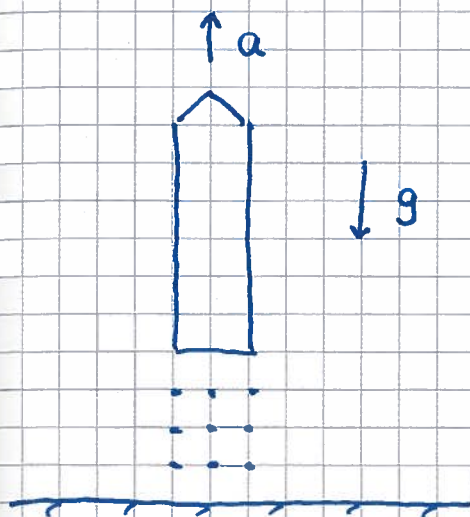
$$\begin{aligned} p(t+dt) &= m(t+dt) \cdot v(t+dt) + dm_e \cdot u_e(t+dt) \\ &= [m(t) + dm] \cdot [v(t) + dv] - dm \cdot [u + v(t) + dv] \\ &= m(t) \cdot v(t) + m(t) \cdot dv - dm \cdot u \end{aligned}$$

$$p(t+dt) = p(t) \quad \Rightarrow \quad m dv - u dm = 0$$

(40)

Derivasjon med dt gir $m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt}$, som er N2,
 $ma = F_{\text{skyr}}$, med skyrkraft $F_{\text{skyr}} = u \cdot \dot{m} > 0$.

For oppskyting fra bakken: $F_{\text{ytte}} = -mg$



$$\Rightarrow ma = u\dot{m} - mg$$

Må (selvsagt) ha
 $u\dot{m} > mg$
for å kunne ta av
fra bakken.

Øving:

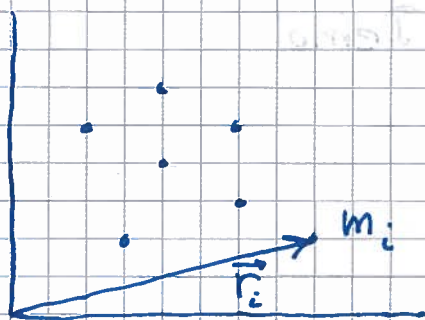
$$m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} - mg \quad / \cdot \frac{dt}{m}$$

$$\Rightarrow dv = u \frac{dm}{m} - g dt$$

som kan integreres.

Massesenter [OS1 9.6; YF 8.5 + oppg 8.115, 116;
(Tyngdepunkt) LL 5.6, 5.8, 6.1]

(41)



N punktmasser $m_1, m_2, \dots, m_N$
i posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$

Systemets massesenter: $\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$

Systemets totale masse: $M = \sum_i m_i$

Med kontinuerlig massefordeling:

$$m_i \rightarrow dm; \quad \sum_i \rightarrow \int$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm; \quad M = \int dm$$

Masseelementet dm :

1D: $dm = \lambda dl$; $\lambda =$ masse pr lengde^{enhet}; $dl =$ lengdeelement

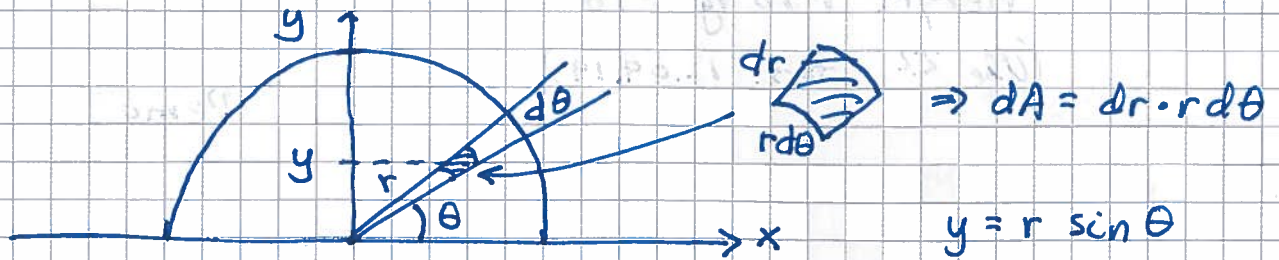
2D: $dm = \sigma dA$; $\sigma =$ " " flateenhet; $dA =$ flateelement

3D: $dm = \rho dV$; $\rho =$ " " volum^{enhet}; $dV =$ volumelement

Uniform massefordeling: $\frac{dm}{M} = \frac{dV}{V}$ osv

Eks 1: Halv sirkulær plate, radius R

(42)



$$\vec{X} = 0 \text{ pga symmetri} \Rightarrow \vec{R}_{cm} = Y \cdot \hat{y}$$

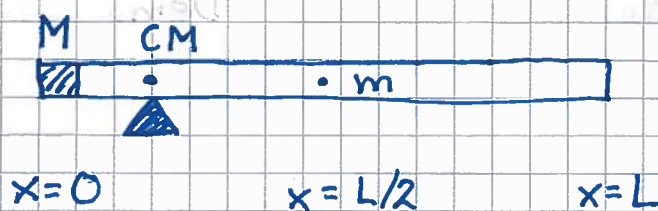
$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{M} \int y \, dm = \frac{1}{A} \int y \, dA ; \quad A = \frac{1}{2} \pi R^2 \\ &= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r \sin \theta \, dr \, r \, d\theta \\ &= \frac{2}{\pi R^2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \cdot \left[-\cos \theta \right]_0^\pi = \frac{2}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 = \underline{\underline{\frac{4R}{3\pi} \approx 0.42R}} \end{aligned}$$

Beregn selv disse:

$$\text{Halv tynn ring: } Y = \frac{2}{\pi} R$$

$$\text{Halv kompakt kule: } Y = \frac{3}{8} R$$

Eks 2: Rør med "punktmasse" i enden

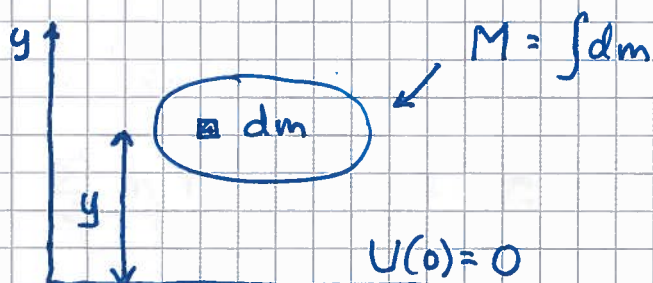


$$m = 165 \text{ g}$$

$$M = 305 \text{ g}$$

$$\bar{x}_{CM} = \frac{1}{m+M} \left\{ M \cdot 0 + \int_0^L x \cdot \frac{m dx}{L} \right\} = \frac{mL}{2(m+M)} \approx \underline{0.18L}$$

Eks 3: Potensiell energi i tyngdefeltet



$$U = \int dU = \int g y dm = g M Y, \quad \text{dvs som om hele massen } M \text{ er plassert i CM's høyde } Y$$

Legemets tyngdepunkt er der det vil balansere (som røret i Eks 2).

Som regel er g like stor for hele systemet. Da er CM og tyngdepunktet samme sted.

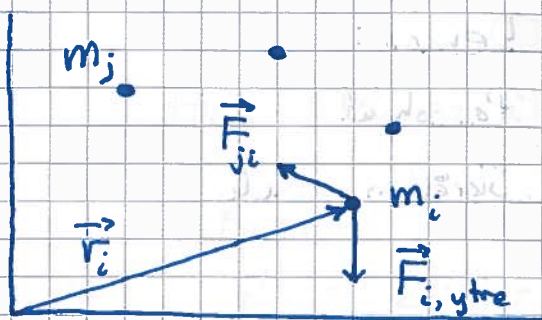
CM's bevegelse

[OS1 9.6 ; YF 8.5 ; LL 5.8]

(44)

Exp. med rør viser / antyder at CM beveger seg som om hele massen er samlet i CM.

Bevis:



$$N2 \text{ for } m_i: m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$$

Vi tar $\sum_i$ på begge sider.

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_i m_i \vec{r}_i \right\} = \frac{d^2}{dt^2} \{ M \vec{R}_{cm} \} = M \ddot{\vec{R}}_{cm}$$

$$\sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre} = \text{netto ytre kraft på systemet}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{=0} + \dots + \underbrace{\vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{ytre} = M \ddot{\vec{R}}_{cm}}$$

CM's bevegelse er som om hele massen M er samlet i $\vec{R}_{cm}$ og blir påvirket av netto ytre kraft $\vec{F}_{ytre}$.

Eks: $\vec{F} \rightarrow \boxed{M}$ $\vec{F} \rightarrow \boxed{M}$ $\vec{A}_{cm} = \frac{\vec{F}}{M}$ for begge klosser

Men klossen til høyre vil også få en rotasjon om CM.

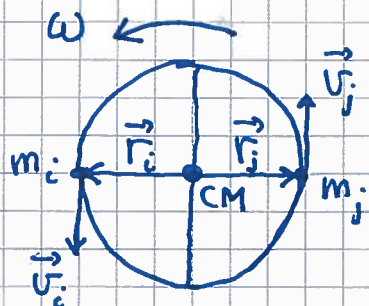
Ikke helt stive legemer kan også få indre vibrasjon.

Rotasjon [OS1 10,11; YF 9,10; LL 5,6]

(45)

De neste 2-3 ukene:

- Rotasjon om akse gjennom CM



Hvis CM er i ro (ren rotasjon):

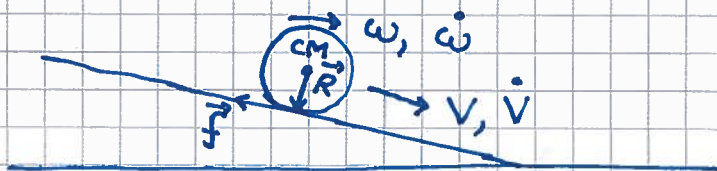
$$K_{CM} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 = 0$$

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$$

Men vi har rotasjonsenergi $K_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 > 0$

og dreieimpuls (mhp CM) $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \neq 0$

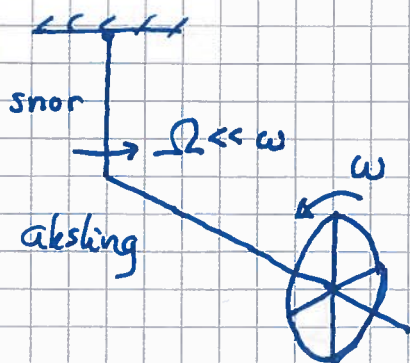
- Rulling: Translasjon av CM + Rotasjon om CM



$\dot{v} > 0$ pga netto ytre kraft $\vec{F} = \vec{G}_{||} - \vec{f}$

$\dot{\omega} > 0$ pga netto ytre dreiemoment (mhp CM) $\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{f}$

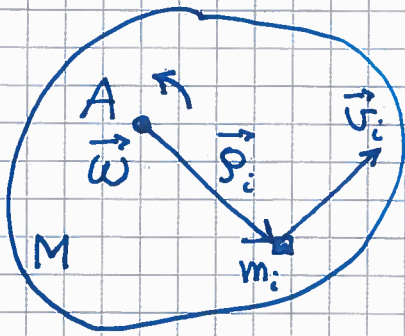
- Kompleks dynamikk



Presesjon
Gyroskop

Rotasjonsenergi. Trehetsmoment [OS1 10.4; YF 9.4; LL 6.2-6.4] (46)

Ser (stort sett!) på stive legemer, og først ren rotasjon om fast akse (ikke nødvis gjennom CM) :



Antar rotasjonsaksen A langs $\hat{z}$ ut av planet.

Lar vinkelfarten være en vektor langs rot.aksen :

$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$$

Høyrehåndsregel (HHR) for "fortegnet" på $\vec{\omega}$:

4 fingre på HH følger rot. bevegelsen. (Her: Mot klokke)

Da peker tommelen langs $\vec{\omega}$.

Fra figur :

$$\vec{r}_i = r_i \hat{r} \quad ; \quad r_i = \text{avstand fra A til } m_i$$

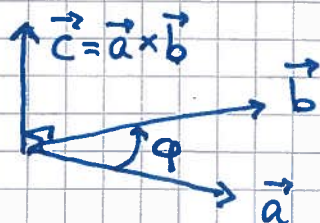
$$\vec{v}_i = v_i \hat{\phi} \quad ; \quad \vec{v}_i = \text{farten til } m_i$$

$$\vec{r}_i \perp \vec{v}_i, \quad \vec{r}_i \perp \vec{\omega}, \quad \vec{v}_i \perp \vec{\omega}$$

$$\text{Fra før: } v_i = r_i \omega$$

$$\text{Dermed: } \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

HHR for kryssprodukt: 4 fingre langs $\vec{a}$ bøyes mot $\vec{b}$;
da peker tommelen langs $\vec{a} \times \vec{b}$:



$$c = |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$= a \cdot b \cdot \sin \phi$$

Braker her synderkoordinater = polarkoord. + z

= ρ, φ, z [Reserverer $\vec{r}$ som posisjonsvektor relativt origo!]

Rotasjonsenergi:

$$K_{\text{rot}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

der I = legemets treghetsmoment mhp rot. aksen A:

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i \rho_i^2$$

Med kontinuerlig massefordeling: $m_i \rightarrow dm$; $\sum_i \rightarrow \int$

$$I = \int \rho^2 dm$$

ρ = avstand fra A til dm

Generell bevegelse for stivt legeme: Translasjon av CM, med fart $\vec{V}$, og rotasjon om akse gjennom CM, med vinkel fart $\vec{\omega}$.

Total kin. energi blir (ganske enkelt!)

$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

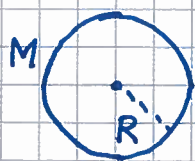
Se utlagt notat for utledning. [og YF 10.3; LL 6.6]

Notasjon: I_0 betyr mhp akse gjennom CM.

Trehetsmoment, eksempler [OS1 10.5; YF 9.6; LL 6.3]

(48)

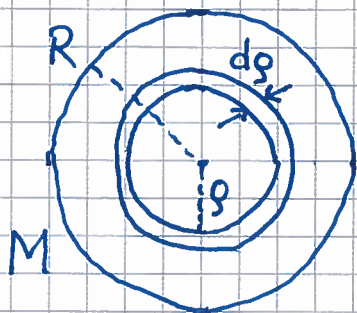
- Ring eller hul sylinder



$$I_o = \int r^2 dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

[Oppgis ikke til eksamen]

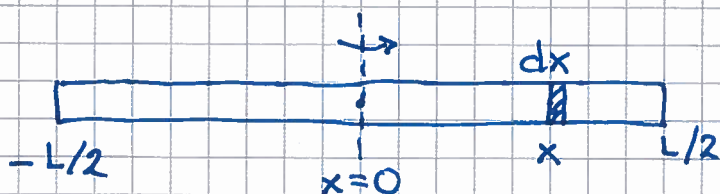
- Skive eller kompakt sylinder = sum av tynne ringer med radius g og tykkelse dg



$$\begin{aligned} dI_o &= g^2 dm = g^2 \cdot M \cdot dA / \pi R^2 \\ &= g^2 \cdot M \cdot 2\pi g dg / \pi R^2 = 2Mg^3 dg / R^2 \end{aligned}$$

$$I_o = \int dI_o = \frac{2M}{R^2} \int_0^R g^3 dg = \underline{\underline{\frac{1}{2} MR^2}} \quad [\text{Oppgis}]$$

- Tynn stang eller tynn plate (f.eks. ei dør)



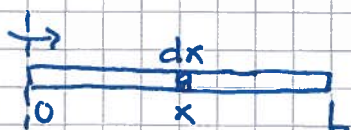
eller



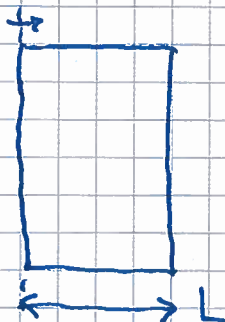
$$g = x, \quad dm = M \cdot dx / L$$

$$\Rightarrow I_o = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot M dx / L = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}} \quad [\text{Oppgis}]$$

Mhp akse ved enden:



eller

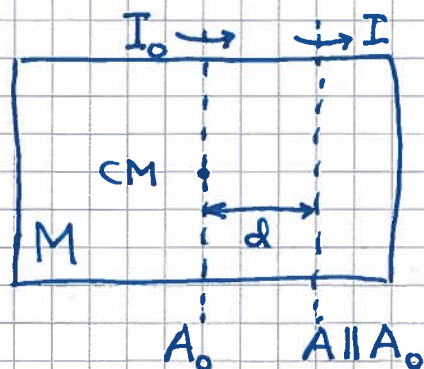


$$I = \int_0^L x^2 M dx / L = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$

[Oppgis ikke pga Steiners sets, som oppgis]

- Kuleskall : $I_o = \frac{2}{3}MR^2$
 - Kompakt kule: $I_o = \frac{2}{5}MR^2$
- Oppgis. Se øving/LF for detaljer.

Steiners sats [OS1 10.5; YF 9.5; LL 6.3]

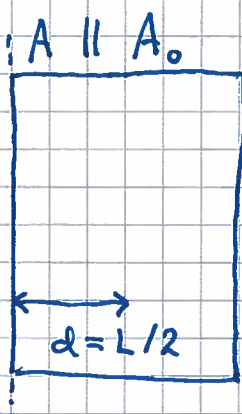
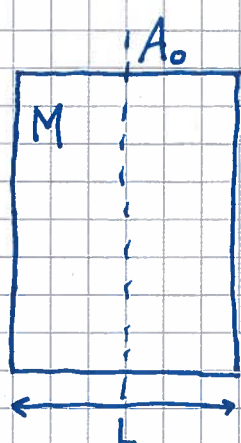


Med A parallell med A_o er

$$I = I_o + Md^2$$

[Se notat for utledning]

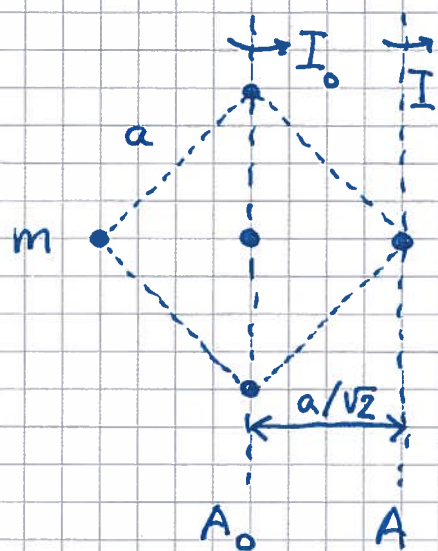
Eks 1: Dør



$$I = I_o + M \cdot (L/2)^2$$

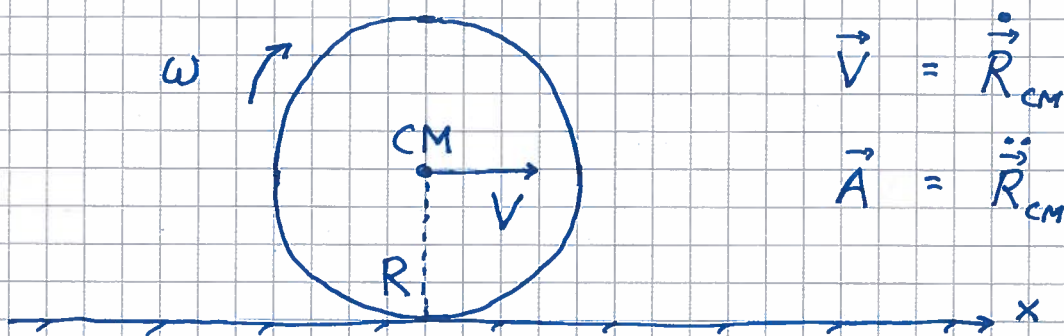
$$= \underline{\frac{1}{3} ML^2} \quad (\text{OK!})$$

Eks 2: System med 5 punktmasser



$$I_o = 2 \cdot m \cdot (a/\sqrt{2})^2 = \underline{ma^2}$$

$$\Rightarrow I = I_o + 5m \cdot (a/\sqrt{2})^2 = \underline{\frac{7}{2} ma^2}$$



$$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM}$$

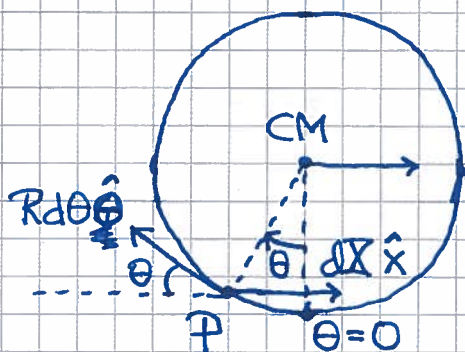
$$\vec{A} = \ddot{\vec{R}}_{CM} = \dot{\vec{V}}$$

Ren rulling : Ved rotasjon en liten vinkel $d\theta = \omega dt$ om CM flyttes CM lengden $dx = R d\theta = R\omega dt$ mot høyre, slik at $dx/dt = R\omega$, dvs

$$\boxed{V = R\omega}$$

Rullebetingelsen ($\Rightarrow A = R\ddot{\omega}$)

Punkt P på periferien følger en sykloide :



Forflytning av P ved vinkelendring fra θ til $\theta + d\theta$:

$$d\vec{r} = R d\theta \hat{\theta} + dX \hat{x}$$

Her er

$$\hat{\theta} = -\hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta \quad \text{og} \quad dX = R d\theta$$

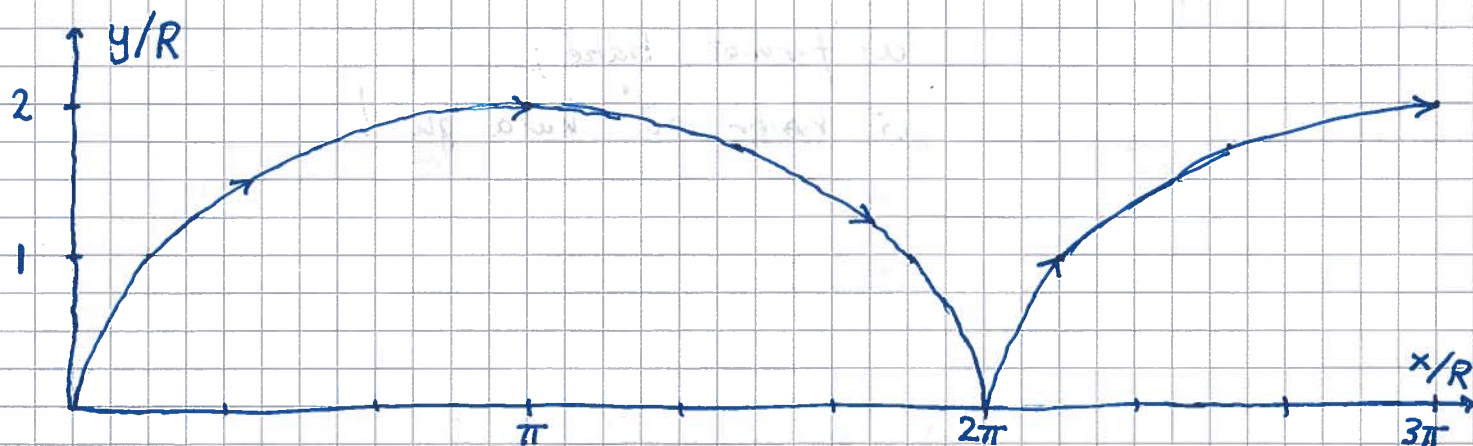
slik at

$$d\vec{r} = \hat{x} R d\theta (1 - \cos \theta) + \hat{y} R d\theta \sin \theta$$

Anta P i origo, $x=y=0$, når $\theta=0$. Da er

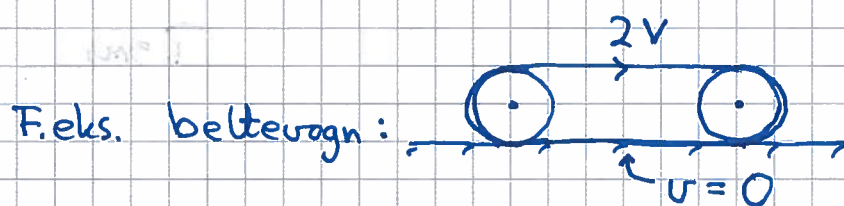
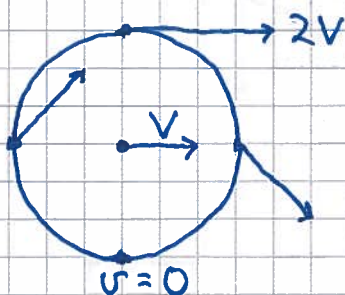
$$\vec{r} = \int d\vec{r} = \int_0^\theta \{ \hat{x} R d\theta (1 - \cos \theta) + \hat{y} R d\theta \sin \theta \}$$

$$= \underline{\hat{x} R (\theta - \sin \theta) + \hat{y} R (1 - \cos \theta)}$$



Hastigheten til P:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \hat{x} (R \dot{\theta} - R \dot{\theta} \cos \theta) + \hat{y} R \dot{\theta} \sin \theta \\ &= \hat{x} V (1 - \cos \theta) + \hat{y} V \sin \theta \end{aligned}$$



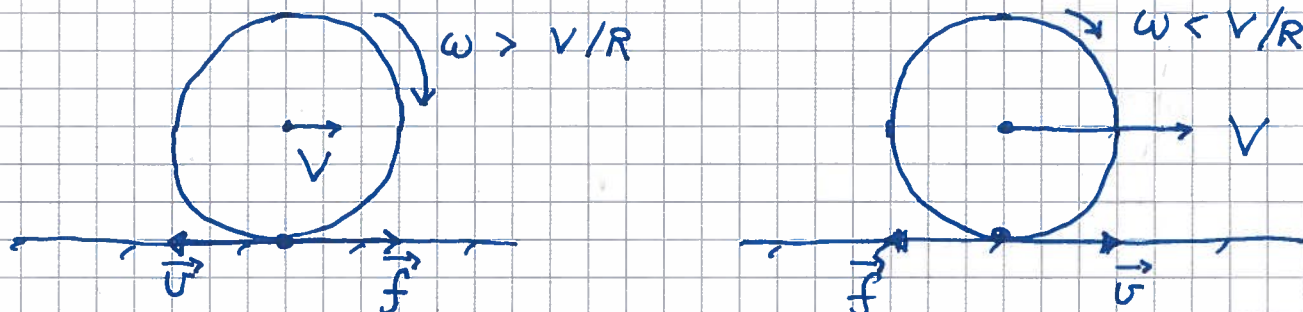
Merk: $v=0$ når P har kontakt med underlaget; da er $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$, dvs null effekttap, selv med $f \neq 0$.

Med ren rulling er $K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} c M R^2 \cdot \frac{V^2}{R^2}$

$$= \underline{(1+c) \cdot \frac{1}{2} M V^2} ; \quad c = \frac{2}{5} \text{ for kompakt kule, osv.}$$

Sluring: Ruller og glir. [OS1 11.1 ; LL 6.7] (52)

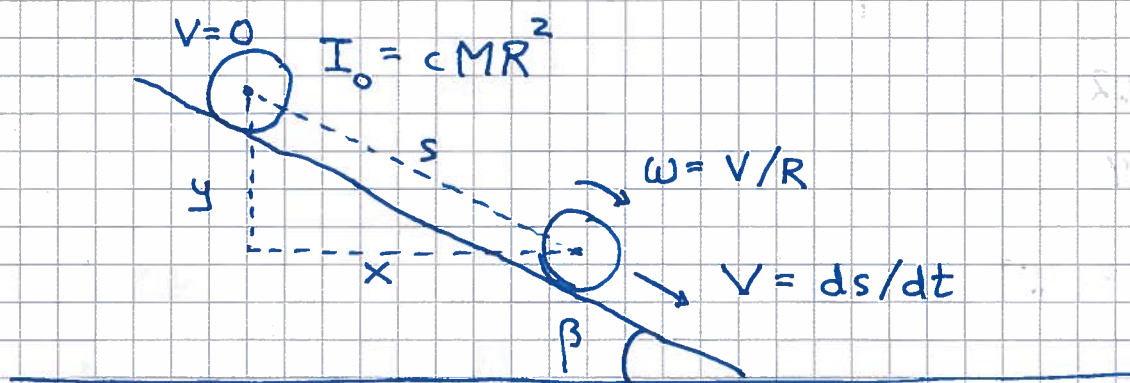
Hvis $\omega \neq V/R$, har legemets kontaktpunkt farten
 $v = V - \omega R \neq 0$, dvs det glir:



$$f = \mu_k \cdot N \quad ; \quad P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$$

$\Rightarrow$ taper mek. energi pr tidsenhed lik $|P_f|$

Ren rulling på skråplan [OS1 11.1 ; YF 10.3 ; LL 6.8]



Bestem V , A , f og største β som gir ren rulling

Løses enklast med energibevarelse: $|\Delta U| = |\Delta K|$

$$\Rightarrow Mgy = (1+c)\frac{1}{2}MV^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{V = \sqrt{2gy/(1+c)}}$$

$$\Rightarrow V(\text{kule}) > V(\text{skive}) > V(\text{kuleskall}) > V(\text{hul sylinder})$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \\
 &= \sqrt{\frac{2g}{1+c}} \cdot \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot \sin \beta \cdot V \quad (V = \sqrt{\frac{2g}{1+c}} \cdot y^{1/2}) \\
 &= \underline{\underline{\frac{g \sin \beta}{1+c}}}
 \end{aligned}$$

Uten friksjon: $F_{||} = Mg \sin \beta \Rightarrow A (f=0) = g \sin \beta$
 $\Rightarrow$ Vi må ha $\vec{f}$, rettet oppover skråplanet.

$$N2: Mg \sin \beta - f = MA = Mg \sin \beta / (1+c)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta}}$$

Ren rulling bare dersom

$$f \leq f_{\max} = \mu_s \cdot N = \mu_s Mg \cos \beta$$

$$\Rightarrow \frac{c}{1+c} \sin \beta \leq \mu_s \cos \beta$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\beta \leq \arctan \left\{ \mu_s \cdot \frac{1+c}{c} \right\}}}$$

Eks: Stålkule på plastbane, med $\beta = 30^\circ$

$$\mu_s \approx 0.2, \quad c = 0.4$$

$$\Rightarrow A = 0.36g$$

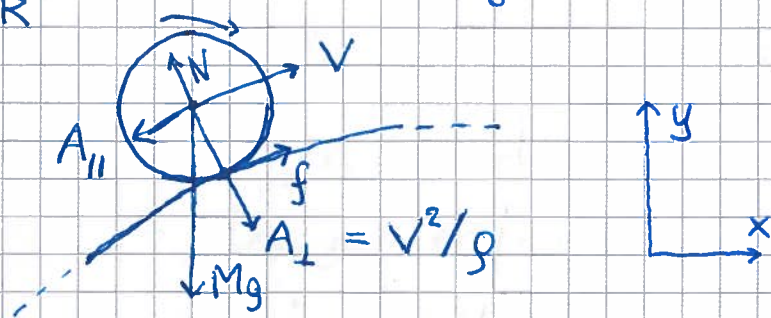
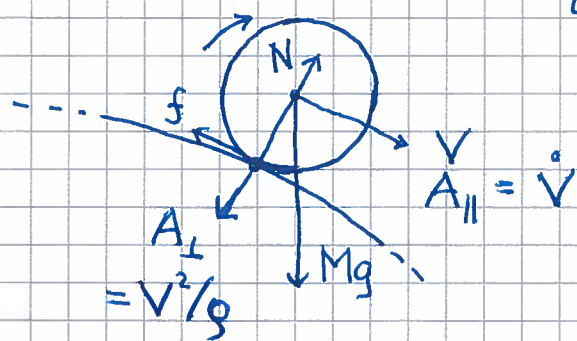
$$f = 0.14 Mg$$

$$\beta_{\max} = \arctan(0.7) = 35^\circ$$

Lab: Ren rulling på krum bane

$$\omega = V/R$$

$$I_0 = c \cdot MR^2$$



$$A_{\parallel} = \dot{V} = g \sin \beta / (1+c) \quad ; \quad \tan \beta = dy/dx = y'$$

$$A_{\perp} = V^2/\rho \quad ; \quad 1/\rho = |y''| / [1 + (y')^2]^{3/2}$$

$N \perp$ banen:

$$MA_{\perp} = MV^2/\rho = \begin{cases} Mg \cos \beta - N & (\text{krumning ned}) \\ N - Mg \cos \beta & (\text{--- opp}) \end{cases}$$

Ekspperimentelt:

- Film av bevegelsen
- "Tracking" av CM gir $\{x(t), y(t)\}_{\text{exp}}$
- Måling av $y(x)$ i 8 festepunkter.

Gir god tilnærming til hele banen $y(x)$ med såkalte kubiske splines (se neste side).

Numerikk:

- Beregn $\{x(t), y(t)\}_{\text{num}}$ med utgangspunkt i $dV/dt = g \sin \beta / (1+c)$, startbetingelser $\{x(0), y(0)\}$ og kjent bane $y(x)$, dvs kjent $\beta = \arctan(dy/dx)$

Kubisk spline: Labbanen $y(x)$ tilnærmes med 3. grads - polynomer

$$S_j(x) = a_j x^3 + b_j x^2 + c_j x + d_j \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, 6$$

på hver av de 7 intervallene (x_j, x_{j+1}) , der de 8 festepunktene $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_7, y_7)$ er kjent, og på kben med fast avstand horisontalt, $h = x_{j+1} - x_j = 20.0 \text{ cm}$. Polynomene $S_j(x)$ velges slik at $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}) = y_{j+1}$, og dessuten slik at $S'(x)$ og $S''(x)$ er kontinuerlige i festepunktene (og dermed overalt). En velger gjerne $y_0'' = y_7'' = 0$, dvs null krumning i de ytterste festepunktene.

Skrives nå polynomene på formen

$$S_j(x) = \frac{y_j'' \cdot (x_{j+1} - x)^3}{6h} + \frac{y_{j+1}'' \cdot (x - x_j)^3}{6h} + \left(\frac{y_{j+1}}{h} - \frac{y_{j+1}'' \cdot h}{6} \right) \cdot (x - x_j) + \left(\frac{y_j}{h} - \frac{y_j'' \cdot h}{6} \right) \cdot (x_{j+1} - x) \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, 6$$

blir de ukjente størrelsene $y_1'', y_2'', \dots, y_6''$ løsningen av de 6 lineære ligningene $A \vec{y}'' = \vec{b}$, dvs

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \\ y_4'' \\ y_5'' \\ y_6'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} \quad \text{med} \quad b_j = \frac{6}{h^2} (y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1})$$

Når alle $S_j(x)$ er beregnet, kan $y'(x)$ og $y''(x)$ beregnes, hvor som helst mellom x_0 og x_7 . Dvs, helningsvinkel β og krumningsradius ρ kan beregnes langs hele banen.

Numenikk: Bruker Euler - metoden her.

(56)

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{g \sin \beta}{1+c} \Rightarrow \Delta V = \frac{g \sin \beta}{1+c} \Delta t$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = V \Rightarrow \Delta s = V \Delta t$$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \Delta t, \quad \dots, \quad t_n = n \Delta t, \quad \dots$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad V_0 = V(t_0), \quad \beta_0 = \arctan \{y'(x_0)\}$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 = V_{0x} \Delta t = V_0 \cos \beta_0 \cdot \Delta t$$

$$y_1 = y(x_1)$$

$$V_1 = V_0 + \Delta V_0 = V_0 + \frac{g \sin \beta_0}{1+c} \Delta t; \quad \beta_1 = \arctan \{y'(x_1)\}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x_1 = x_1 + V_{1x} \Delta t = x_1 + V_1 \cos \beta_1 \cdot \Delta t$$

$$y_2 = y(x_2)$$

$$V_2 = V_1 + \frac{g \sin \beta_1}{1+c} \Delta t; \quad \beta_2 = \arctan \{y'(x_2)\}$$

osv.

• Deretter kan exp. og num. beregelse sammenlignes, dvs

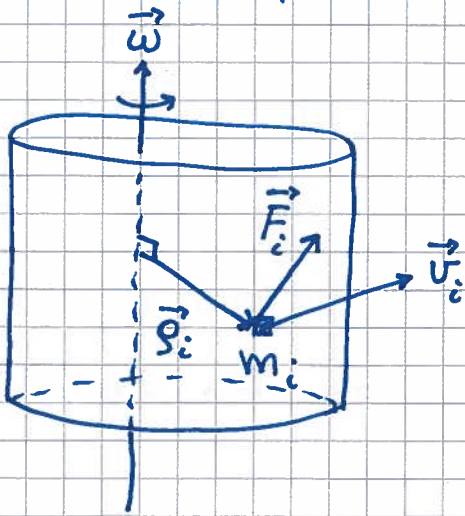
$$\{x(t), y(t)\}_{\text{exp}} \quad \text{vs} \quad \{x(t), y(t)\}_{\text{num}}$$

• Kraftene $\vec{N}$ og $\vec{f}$ fra banen på objektet kan (og skal!) beregnes, og framstilles grafisk på hensiktsmessig vis.

• Dissipative krefter — dvs slike som fører til tap av mekanisk energi — kan modelleres, på "laminær form" som $\vec{f} = -k \cdot \vec{V}$, og/eller på "turbulent form" som $\vec{f} = -D \cdot V^2 \cdot \hat{V}$.

Rotasjonsdynamikk

Akse med fast orientering [OS1 10.6, 10.7; YF 10.1, 10.2; LL 6.2]



Legemet tilføres effekten

$$\begin{aligned} P &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_{i,\parallel} v_i \\ &= \left\{ \sum_i F_{i,\parallel} \rho_i \right\} \omega \\ &= \tau \omega \end{aligned}$$

Her er $\tau = \sum_i F_{i,\parallel} \rho_i$ = netto ytre dreiemoment på legemet, mhp rot.aksen; $F_{i,\parallel}$ er komponenten langs $\vec{v}_i$ av ytre kraft $\vec{F}_i$ på masselement m_i .

Tilført effekt tilsvarer økning i kin. energi pr tidsenhet:

$$P = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} I \omega^2 \right\} = \frac{1}{2} I \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt} = I \omega \dot{\omega}$$

der $I = \sum_i m_i \rho_i^2$ er legemets treghetsmoment mhp rot.aksen

Sammenligning gir

$$\boxed{\tau = I \dot{\omega}}$$

som er N2 for rotasjon om akse med fast orientering.

Jf. N2 for translasjon: $F = m \dot{v}$

Arbeid utført av τ [OS1 10.8; YF 10.4; LL 6.4]

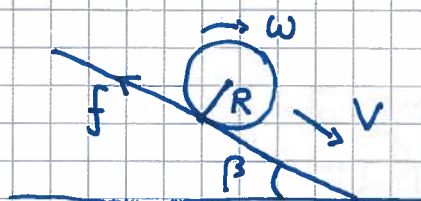
$$P = \tau \omega = \tau \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{og} \quad P = \frac{dW}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{dW = \tau d\varphi}$$

= arbeid utført av τ ved
omløpt vinkel $d\varphi$

Jf. arb. utf. ved transl.: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Eks 1: Ren rulling på skråplan



$$I_o = cMR^2, \quad \omega = v/R, \quad \dot{\omega} = \dot{v}/R$$

$$N2, II: Mg \sin \beta - f = M\dot{v}$$

$$N2 \text{ for rot. om akse gjennom CM: } \tau = I_o \dot{\omega}$$

Her er $\tau = f \cdot R$; både $\vec{N}$ og $M\vec{g}$ har null arm relativt aksen gjennom CM.

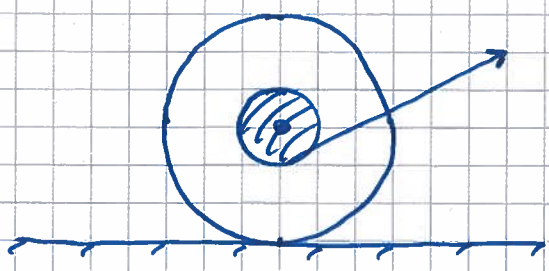
(Kraftens arm = Avstanden fra aksen til kraftens forlengelseslinje)

$$\text{Dermed: } f \cdot R = cMR^2 \cdot \frac{\dot{v}}{R} \Rightarrow f = cM\dot{v}$$

som innsatt i N2, II gir $Mg \sin \beta - cM\dot{v} = M\dot{v}$,
dvs

$$\underline{\dot{v} = \frac{g \sin \beta}{1+c}} \quad (\text{som s. 53})$$

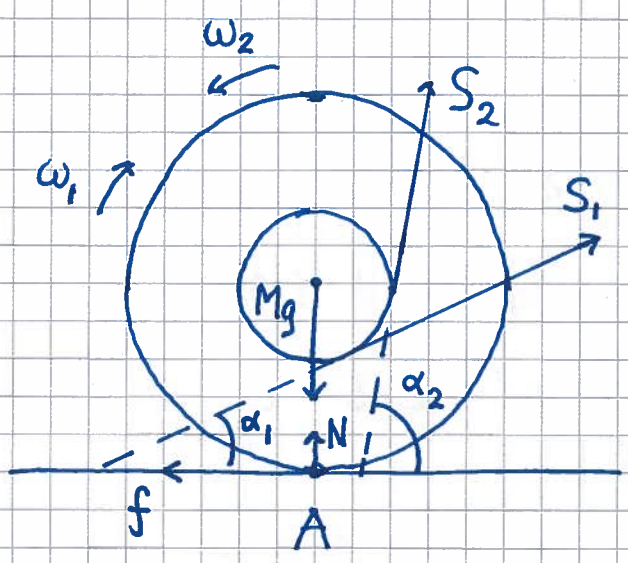
Eks 2: Trådsnelle på flatt underlag



S = snordraget

Når ruller snella mot høyre og mot venstre?

"Triks": Velg "kontaktlinja" som referanseakse A.

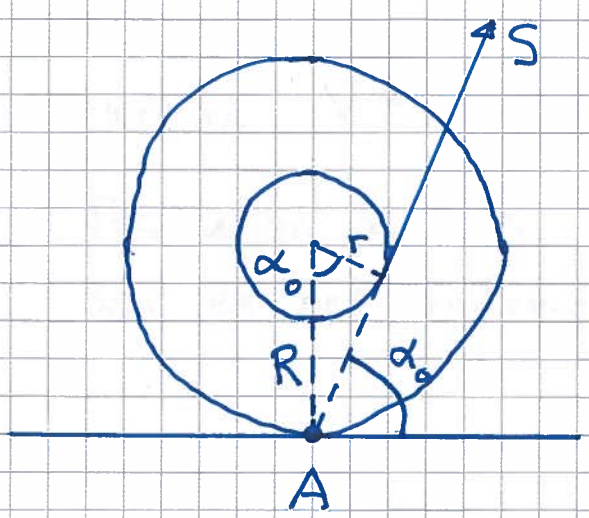


Bare S som har en arm, og dermed dreiemoment τ_A mhp aksen A.

$S_1 \Rightarrow$ (rot.) mot høyre

$S_2 \Rightarrow$ (rot.) mot venstre

Hvis forlengelsen av $\vec{S}$ går gjennom A, må snella bli liggende i ro:

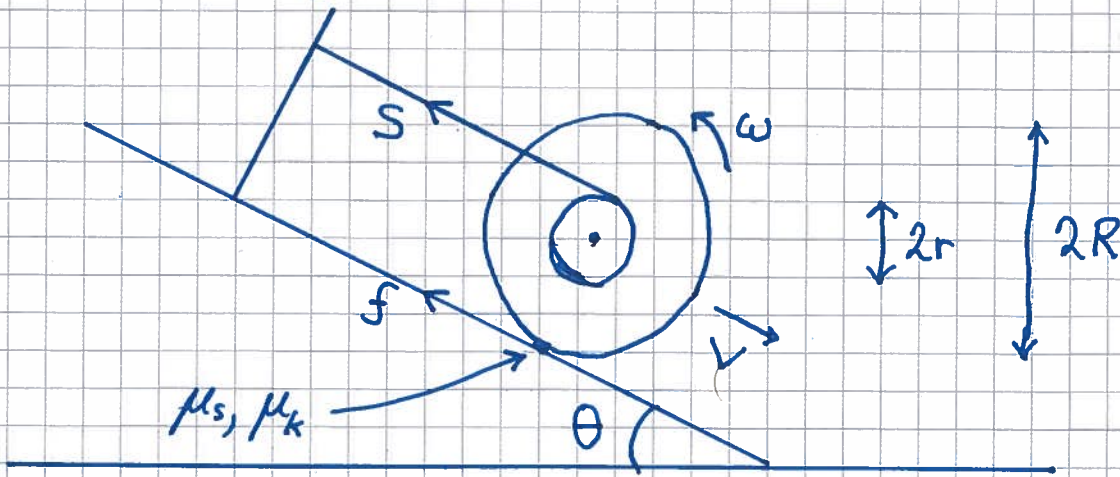


$$\begin{aligned} \sum \tau_A &= 0 \Rightarrow \dot{\omega} = 0 \\ &\Rightarrow \text{ingen rotasjon} \end{aligned}$$

Fra figur:

$$\cos \alpha_0 = \frac{r}{R}$$

(Hvis $S_x > f_{\max}$, glir snella mot høyre, uten å rotere)



- Hvor stor er max vinkel θ_0 uten at snella slurer baklengs nedover skråplanet?

Løsn: $N1 \parallel$ skråplanet og $N1$ for rot. om CM

$$f = f_{\max} = \mu_s N \quad \text{når } \theta = \theta_0$$

- Hvis $\theta > \theta_0$, hva blir S og $\dot{V}$?

Løsn: $N2 \parallel$ skråplanet og $N2$ for rot. om CM

$$f = \mu_k N$$

Her må $V = \omega r$ være oppfylt:

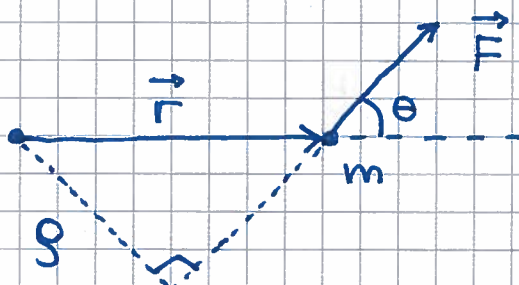
Translasjon av CM en lengde $2\pi r$ tar samme tid som en hel omdreining, dvs omløpt vinkel 2π

Rotasjonsdynamikk i 3D

(61)

Generelt må dreiemoment $\vec{\tau}$ og dreieimpuls $\vec{L}$ beregnes relativt et fritt valgt referansepunkt $\vec{r}_0$. Posisjonen til en punktmasse m , relativt $\vec{r}_0$, er da $\vec{r} - \vec{r}_0$, dersom $\vec{r}$ er dens pos. relativt origo. For enkelhets skyld velger vi her $\vec{r}_0 = 0$.

Dreiemoment [OS1 10.6; YF 10.1; LL 5.5, 6.4]



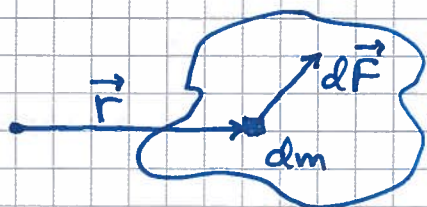
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}} = \text{kraftens dreiemoment p\aa } m \text{ (rel. origo)}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} \perp \vec{r} \text{ og } \vec{\tau} \perp \vec{F} \quad (\text{Her: } \vec{\tau} \text{ ut av planet})$$

$$\tau = |\vec{\tau}| = r \cdot F \cdot \sin \theta = g \cdot F$$

der g = kraftens arm = avstand fra refpunktet til kraftens forlengelseslinje

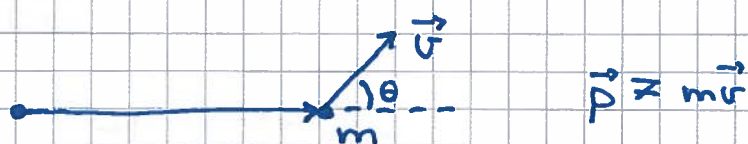
For partikkelsystem:



$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$$

= netto dreiemoment p\aa systemet

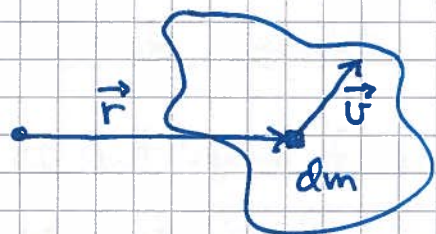
Dreieimpuls [OS1 11.2; YF 10.5; LL 6.6]



$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}} = \text{massens dreieimpuls (rel. origo)}$$

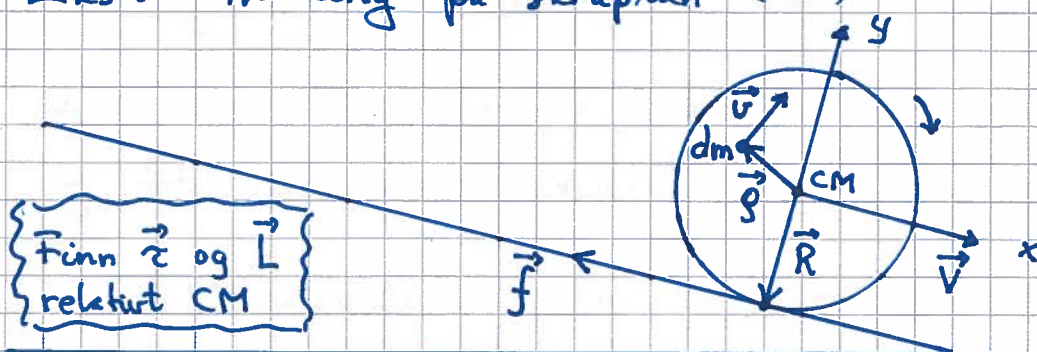
$$\vec{L} \perp \vec{r}; \quad \vec{L} \perp \vec{p} \quad \text{og} \quad L = |\vec{L}| = r \cdot p \cdot \sin \theta$$

For partikkelsystem:



$$\begin{aligned} \vec{L} &= \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm = \int \vec{r} \times d\vec{p} \\ &= \text{systemets totale dreieimpuls} \end{aligned}$$

Eks: Rulling på skråplan (⊗)



$$\begin{aligned} \vec{V} &= V \hat{x} \\ \vec{\omega} &= -\omega \hat{z} \\ \vec{R} &= -R \hat{y} \\ \vec{f} &= -f \hat{x} \\ \vec{r} &= r \hat{\phi} \\ \vec{v} &= -v \hat{\phi} \end{aligned}$$

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{f} = \underline{\underline{-Rf \hat{z}}}$$

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm = \int r \cdot \omega r \cdot dm \cdot (-\hat{z}) = \left(\int r^2 dm \right) \cdot (-\omega \hat{z}) = \underline{\underline{I_0 \vec{\omega}}}$$

Merk at vektoren $d\vec{L}/dt = I_0 \dot{\vec{\omega}}$ peker langs $-\hat{z}$ (siden vinkelfarten øker i absoluttverdi), dvs $\dot{\vec{L}}$ og $\vec{\tau}$ peker i samme retning. Vi skal straks vise at $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$.

N2 for rotasjon [OSI 11.2 ; YF 10.5 ; LL 6.6]

("Spinningsatsen")

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \{ \vec{r} \times \vec{p} \} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

dvs $\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$ (Jf. N2 for translasjon: $\vec{F} = d\vec{p}/dt$)

der $\vec{\tau}$ = netto ytre dreiemoment på systemet

$\vec{L}$ = systemets totale dreieimpuls

Statisk likevekt [OSI 12.1, 12.2 ; YF 11.1-11.3 ; LL 7.1]

Et stivt legeme forblir i ro, med $\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$, bare dersom netto ytre kraft $\vec{F}$ og netto ytre dreiemoment $\vec{\tau}$ begge er null.

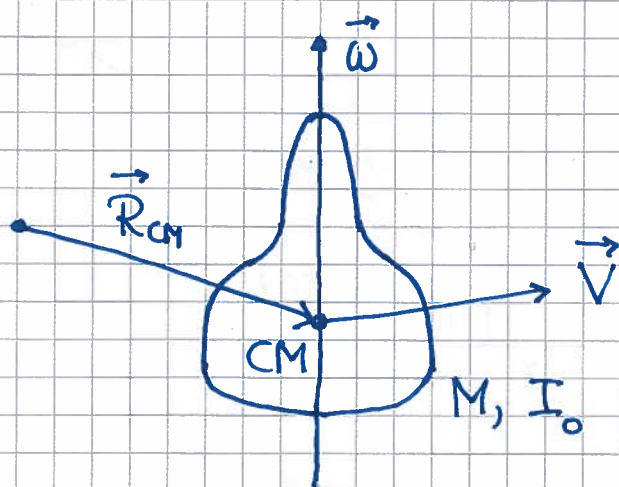
Bevaringslover oppsummert

- I et isolert system (ingen ytre krefter) er total energi, total impuls og total dreieimpuls bevart.
- I et konservativt system er total mekanisk energi, $K+U$, bevart.
- Hvis netto ytre kraft $\vec{F}$ på et system er null, er total impuls $\vec{p}$ bevart
- Hvis netto ytre dreiemoment $\vec{\tau}$ på et system er null, er total dreieimpuls $\vec{L}$ bevart

Total dreieimpuls for sturt legeme [os1.... ; YF 10.5; LL 6.6]

(64)

Anta at rotasjonsaksen er en 2-tallig rotasjonsakse; dvs at legemet ser likedan ut etter å ha blitt rotert 180° ($= 360^\circ/2$).



Legemets banedreieimpuls, pga CMs transasjonsbevegelse:

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}$$

Legemets indre dreieimpuls ("spinn"), pga rotasjon om CM:

$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$$

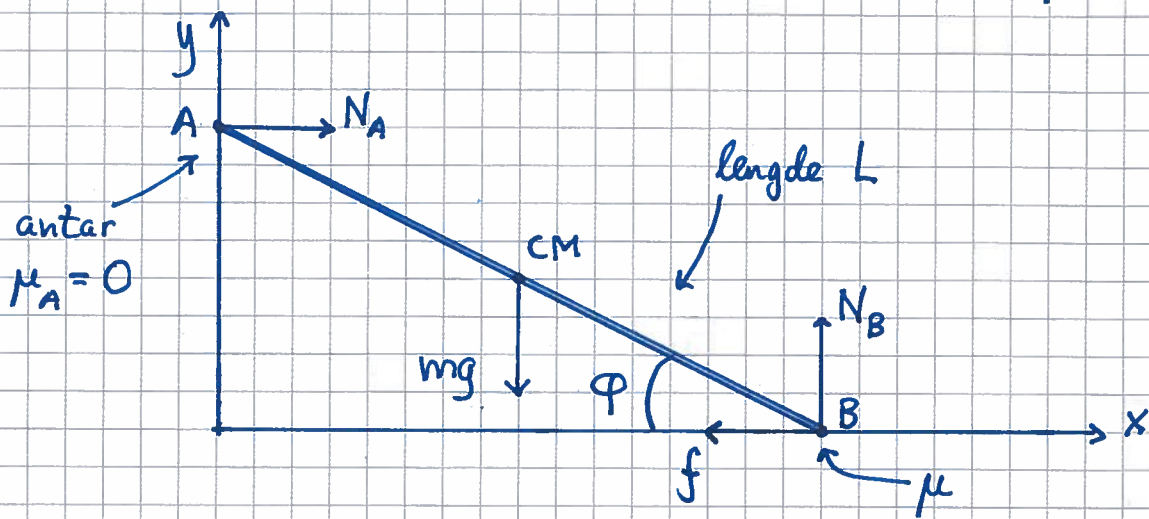
Legemets totale dreieimpuls:

$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s$$

(Se notat for detaljert utledning.)

Eksempler

Eks 1: Glir stigen? Finn minste φ uten at den glir.



Stigen i ro når $\sum F_x = \sum F_y = \sum \tau = 0$.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f = N_A ; \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow N_B = mg$$

Beregner τ relativt B: $\sum \tau_B = 0$

$$\Rightarrow mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos \varphi - N_A \cdot L \cdot \sin \varphi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} mg \cos \varphi = f \sin \varphi = \mu N_B \sin \varphi = \mu mg \sin \varphi$$

(siden $\varphi_{\min}$ må tilsvare $f = f_{\max} = \mu N_B$)

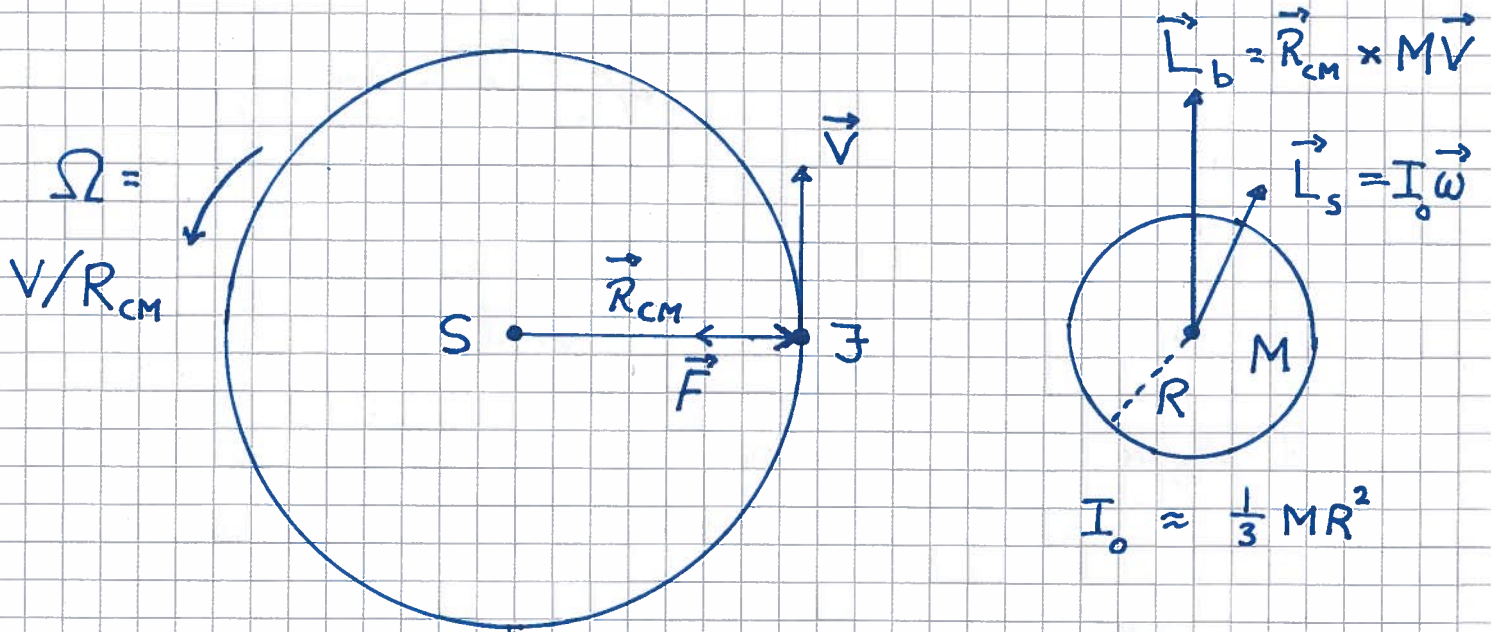
$$\Rightarrow \tan \varphi_{\min} = \frac{1}{2} \mu \Rightarrow \varphi_{\min} = \arctan \left(\frac{1}{2} \mu \right)$$

[Kommentar: Hva hvis $\mu_A > 0$? Har da 4 ukjente krefter, men bare 3 ligninger. Systemet er "statisk ubestemt".

En fjerde ligning oppnås f.eks. ved å ta hensyn til at stigen i virkeligheten ikke er helt stiv, men at den bøyes litt ned på midten.]

Eks 2: Hva er jordas dreieimpuls relativt sola?

Anta sirkelbane, stivt legeme og fast sol i origo.



$$\vec{\tau} = \vec{R}_{CM} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \text{konstant}$$

(Ikke helt riktig, av diverse grunner. F.eks. er J ikke et helt stivt legeme.)

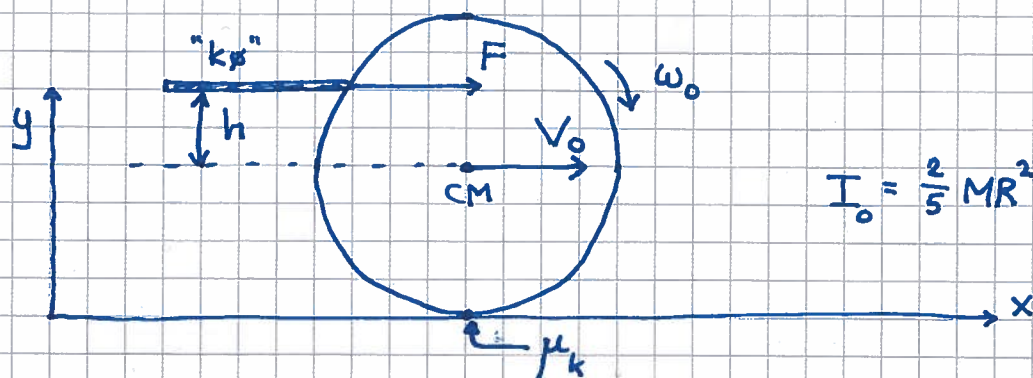
$$L_b = R_{CM} MV = R_{CM}^2 M \Omega \approx (1.5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot \frac{2\pi}{1 \text{ år}} \\ \approx 3 \cdot 10^{40} \text{ Js}$$

$$L_s = I_o \omega \approx \frac{1}{3} MR^2 \omega \approx \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (6.37 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \cdot \frac{2\pi}{1 \text{ døgn}} \\ \approx 6 \cdot 10^{33} \text{ Js} \ll L_b$$

dus $L \approx L_b$

Eks 3: Snooker [LL 6.7 ; øving 6]

(67)



Kortvarig kraft F , med varighet Δt , i høyde h over (evt. under; $h < 0$) senterlinja.

Kan neglisjere friksjonskraften f i selve støtet ($f \ll F$)

N2, transl.: $F = \Delta p / \Delta t \Rightarrow F \cdot \Delta t = M V_0$

N2, rot. om CM: $\tau = \Delta L / \Delta t \Rightarrow F \cdot h \cdot \Delta t = I_0 \omega_0$

Hvis $\omega_0 > V_0 / R$: "Toppspinn" } Sluring
 Hvis $\omega_0 < V_0 / R$: "Underskru" }

Ren rulling fra start ($\omega_0 = V_0 / R$) for en bestemt h -verdi.

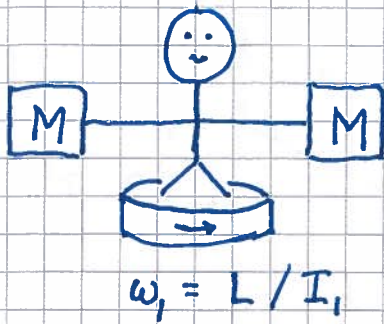
Hvis sluring fra start: Ren rulling etter hvert. Kinetisk friksjon medfører at ~~ω~~ ω nærmer seg V/R .

Eks 4: Piruett [OSI 11.3; YF 10.6; LL 6.5]

68

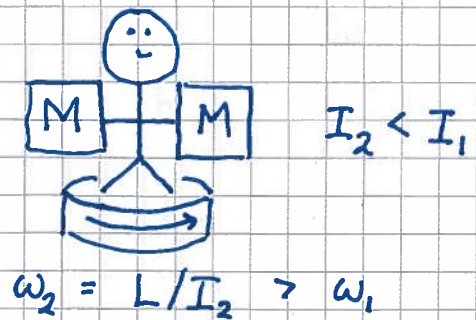
$$\tau = 0 \Rightarrow L = I\omega = \text{konstant}$$

$\Rightarrow \omega$ øker hvis I reduseres !



$$\tau = 0$$

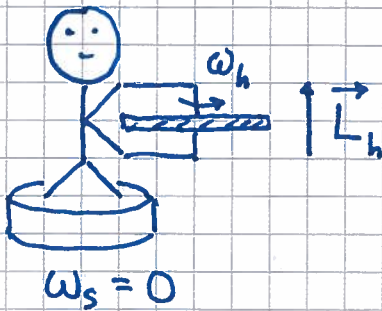
$$\Delta L = 0$$



Arbeid gjøres på de to massene og gir økt rotasjonsenergi:

$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} L \omega_1 ; K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} L \omega_2 > K_1$$

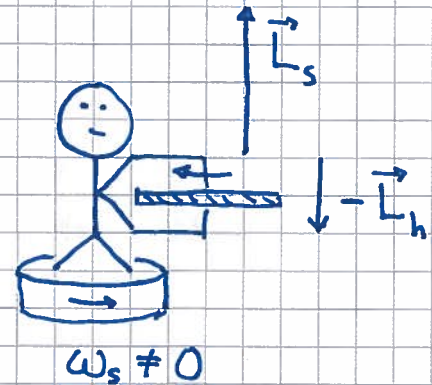
Eks 5: Student og sykkelhjul



Hjulets snus

$$\vec{\tau}_{\text{tytte}} = 0$$

$$\Delta \vec{L} = 0$$



Før:

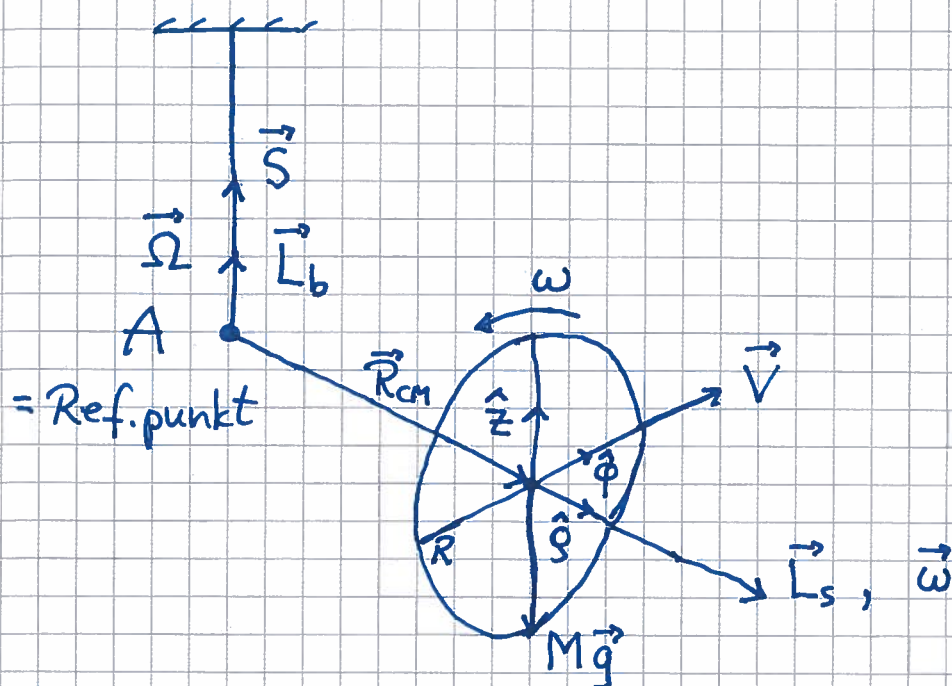
$$\vec{L} = \vec{L}_h$$

Etter:

$$\vec{L} = \vec{L}_s - \vec{L}_h$$

$$\Rightarrow \vec{L}_s = 2 \vec{L}_h$$

$$\omega_s \neq 0$$



$$I_o \approx MR^2$$

$$M \approx 5 \text{ kg}$$

$$R \approx 0.3 \text{ m}$$

$$R_{cm} \approx 0.2 \text{ m}$$

$$T_{\Omega} = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 5 \text{ s}$$

Finn ω !

Løsning:

N2 for rotasjon om A:

$$\vec{\tau}_A = d\vec{L}_A / dt \quad ; \quad \vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s, \quad \text{der}$$

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{cm} \times M\vec{V} = R_{cm} \hat{s} \times MV \hat{\phi} = R_{cm} MV \hat{z} = R_{cm}^2 M \Omega \hat{z}$$

$$\vec{L}_s = I_o \vec{\omega} = MR^2 \omega \hat{s}$$

Siden $\omega \gg \Omega$, dvs $L_s \gg L_b$, er $\vec{L}_A \approx \vec{L}_s = MR^2 \omega \hat{s}$

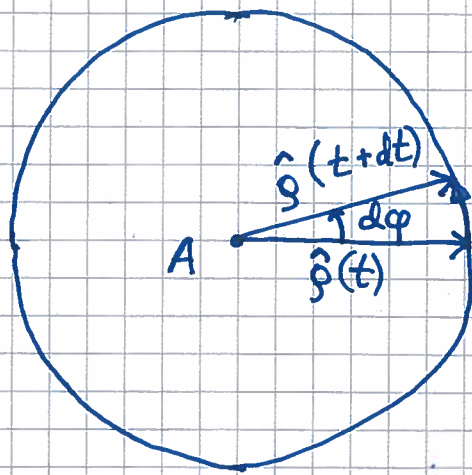
Ytre dreiemoment:

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{cm} \times M\vec{g} = R_{cm} \hat{s} \times (-Mg \hat{z}) = R_{cm} Mg \hat{\phi}$$

Dermed:

$$\underbrace{R_{cm} Mg \hat{\phi}}_{\vec{\tau}_A} = \underbrace{MR^2 \omega \frac{d\hat{s}}{dt}}_{\dot{\vec{L}}_A}$$

Vektoren $\hat{g}$ roterer om z-aksen med vinkel fart Ω : (70)



$$d\hat{g} = \overbrace{|\hat{g}| \cdot d\varphi}^{\text{buelengden}} \cdot \hat{\varphi} = d\varphi \cdot \hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{g}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \hat{\varphi} = \Omega \hat{\varphi}$$

Dermed:

$$R_{cm} M g \hat{\varphi} = M R^2 \omega \Omega \hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\omega = \frac{R_{cm} g}{R^2 \Omega}}}$$

Hjulets (raske!) omløpstid:

$$T_{\omega} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R^2 \cdot 2\pi / T_{\Omega}}{R_{cm} g} = \frac{(2\pi R)^2}{R_{cm} g T_{\Omega}}$$

Talverdier:

$$T_{\omega} \approx \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot 5} \text{ s} \approx \frac{2^2}{10} \text{ s} = \underline{0.4 \text{ s}}$$

$$f_{\omega} = 1/T_{\omega} \approx 2.5 \text{ omdreining pr sekund (Hz)}$$