

KLASSISK DYNAMIKK

①

[YF 1-11, 14 ; LL 1-7, 9]

Størrelser, enheter, SI-systemet [YF 1]

Eks: Masse ; $m = 79.2 \mu\text{g}$

↑ ↑ ↓

Størrelse Symbol Måltall (Tallverdi) Enhet

Dekadisk prefiks: $\mu = \text{mikro} = 10^{-6}$

Notasjon: $[m] = \text{kg}$ ("enheten til masse er kilogram")

Grunnenheter i SI:

lengde: $[l] = \text{m}$ (meter)

tid: $[t] = \text{s}$ (sekund)

masse: $[m] = \text{kg}$ (kilogram)

elektrisk strømstyrke: $[I] = \text{A}$ (ampere)

temperatur: $[T] = \text{K}$ (kelvin)

stoffmengde: $[n] = \text{mol}$

Sammensatte enheter:

hastighet: $[v] = \text{m/s}$

akselerasjon: $[a] = \text{m/s}^2$

Abledte enheter:

kraft: $[F] = \text{kg m/s}^2 = \text{N}$ (newton)

energi: $[W] = \text{Nm} = \text{J}$ (joule)

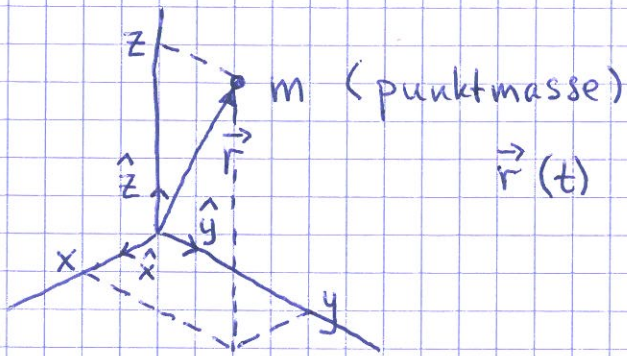
effekt: $[P] = \text{J/s} = \text{W}$ (watt)

Kinematikk

[YF 2,3 ; LL 1]

(2)

(= beskrivelse av bevegelse)



$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} + z(t) \hat{z}$$

= m's posisjon ved tid t
i kartesiske koordinater

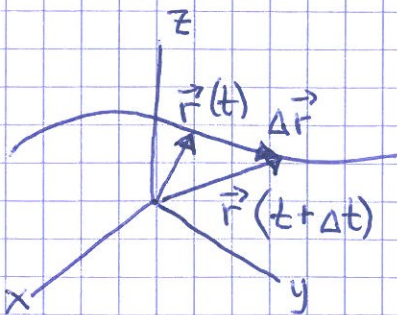
Enhetsvektorer $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$:

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad (\text{dimensjonsløs})$$

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \quad ; \quad \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

Banen $\vec{r}(t)$ beskriver m's bevegelse:



$$\begin{aligned} \Delta \vec{r} &= \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \\ &= \text{forflytningen mellom} \\ &\quad t \text{ og } t+\Delta t \end{aligned}$$

Hastighet = forflytning pr tidsenhet:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Dvs: $\vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$ (da Δt er en skalar)

$\vec{v}$ er tangent til banen

Akselerasjon = hastighetsendring pr tidsenhet: ③

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Vanlig notasjon i fysikk:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \text{osv} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

Komponenter, kartesiske:

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{osv}$$

$$\text{Tilsvarende: } a_x = \dot{v}_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x} \quad \text{osv}$$

$$\text{Ser at: } \vec{r} \xrightarrow{\text{derivasjon}} \vec{v} \xrightarrow{\text{derivasjon}} \vec{a}$$

Forventer da:

$$\vec{a} \xrightarrow{\text{integrasjon}} \vec{v} \xrightarrow{\text{integrasjon}} \vec{r}$$

som stemmer:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x dt$$

$$\Rightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^t v_x(t) dt$$

$$\Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(t) dt$$

Tilsvarende:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow dv_x = a_x dt \Rightarrow \dots \Rightarrow v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^t a_x(t) dt$$

Generalisering til 3D:

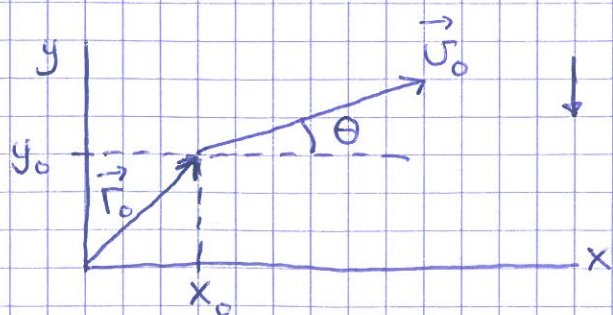
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \dots \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \dots \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt$$

Eks: Anta konstant $\vec{a}$ og $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$.
Bestem $\vec{r}(t)$ og $\vec{v}(t)$.

Løsn: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$; $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2$

Eks: Kast i tyngdefeltet



$$\vec{a} = -g \hat{y}$$

Finn $\vec{r}(t)$ og vis at $y(x)$,
banen, er en parabel.

Løsn: $x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 = x_0 + v_0 t \cos \theta$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = y_0 + v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2$$

Eliminasjon av t gir $y(x)$ (vis selv)

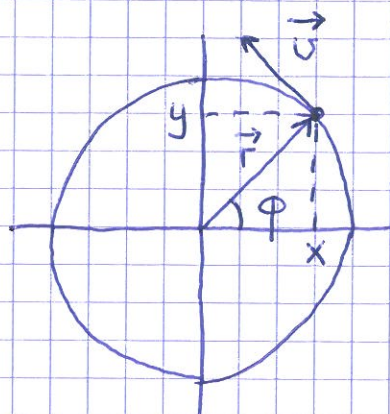
Øving 1: • Kast i motbakke.

• Gitt $a(v)$, hva blir $v(t)$?

Sirkelbevegelse

[YF 3.4 ; LL 1.7, 1.8]

(5)



Polarkoord:

r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom $\hat{x}$ og $\vec{r}$

($\varphi > 0$ mot klokke)

Fra fig: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $\tan \varphi = y/x$,

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (= \text{konst. for sirkelbev.})$$

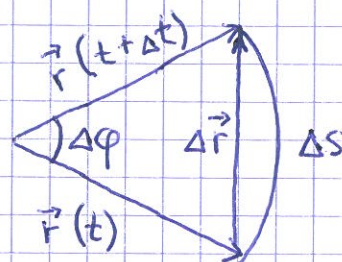
$$\vec{r} = r \cos \varphi \hat{x} + r \sin \varphi \hat{y}$$

Vinkelhastighet = vinkelendring pr tidsenhet:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Vinkel = buelengde / radius:

$$\Delta \varphi = \Delta s / r$$



Når $\Delta t \rightarrow 0$: $\Delta \varphi \rightarrow 0$, $\Delta r = |\Delta \vec{r}| \rightarrow \Delta s = r \Delta \varphi$

$$\Delta \vec{r} \perp \vec{r}$$

Dermed:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta \varphi}{\Delta t} = r \frac{d\varphi}{dt} = r \omega$$

$$\vec{v} \parallel \Delta \vec{r} \quad \text{og} \quad \Delta \vec{r} \perp \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \perp \vec{r}$$

6

Hvis v og $\omega = v/r$ er konst., har vi uniform sirkelbev., og da er

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} d\varphi = \omega \int_0^t dt = \omega t, \text{ og med } \varphi(0)=0 \text{ f\u00e5s}$$

$$\boxed{\varphi(t) = \omega t}$$

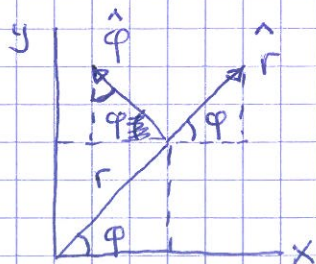
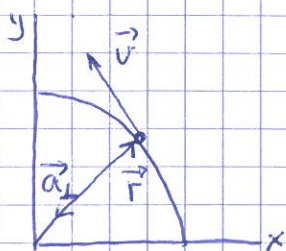
Har da:

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} = r \cos \omega t \hat{x} + r \sin \omega t \hat{y}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t) \hat{x} + \dot{y}(t) \hat{y} = -r\omega \sin \omega t \hat{x} + r\omega \cos \omega t \hat{y}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t) \hat{x} + \ddot{y}(t) \hat{y} = -r\omega^2 \cos \omega t \hat{x} - r\omega^2 \sin \omega t \hat{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_\perp = -\omega^2 \vec{r}} \quad \text{Sentripetalakselerasjon}$$



$$\begin{aligned} \hat{r} &= \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi \\ \hat{\varphi} &= -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\text{Ser at: } \vec{r} = r \hat{r}, \quad \vec{v} = v \hat{\varphi} = r\omega \hat{\varphi}, \quad \vec{a}_\perp = -\omega^2 r \hat{r} = -\frac{v^2}{r} \hat{r}$$

Hvis $v = |\vec{v}|$ endrer seg, har vi ogs\u00e5 baneakselerasjon:

$$a_{||} = \dot{v} = \frac{d}{dt}(v\omega) = r \frac{d\omega}{dt} = r\dot{\omega}$$

$$\text{Total akselerasjon: } \vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_{||} = -\omega^2 r \hat{r} + r\dot{\omega} \hat{\varphi}$$

$$\text{Vinkelakselerasjon: } \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad ; \quad [\alpha] = 1/s^2$$

$$\text{Periode: } T = \text{oml\u00f8pstid}; [T] = s$$

$$\text{Frekvens: } f = \text{antall omk\u00f8p pr tidsenhet}; [f] = \text{Hz (henz)} = 1/s$$

$$\Rightarrow v = 2\pi r/T \Rightarrow T = 2\pi r/v = 2\pi/\omega, \quad f = 1/T = \omega/2\pi$$

Newtons lover [YF 4,5 ; LL 2,3]

(7)

Eksperimentelle ("empiriske") Lover

N1:
$$\boxed{\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}}$$

Med null netto ytre kraft $\vec{F}$ på et legeme, forblir legemet i ro eller i retlinjet bevegelse med konstant hastighet $\vec{v}$

N2:
$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

Med netto ytre kraft $\vec{F}$ på et legeme, får legemet en akselerasjon prop. med $\vec{F}$, $\vec{a} = \vec{F}/m$; $m =$ legemets masse

N3:
$$\boxed{\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}}$$

Hvis A virker på B med kraft $\vec{F}_{AB}$, virker B på A med kraft $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$.

Legemene vekselvirker med hverandre.

Enhet: $[F] = [m \cdot a] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N} \quad (\text{newton})$

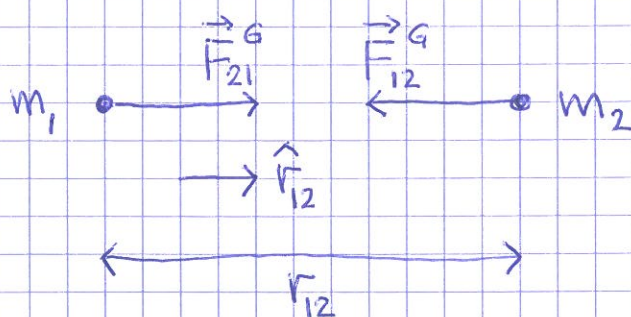
Fundamentale krefter i naturen [YF 5.5; LL 2.1] ⑧

Viktige i klassisk dynamikk og elektromagnetisme er:

- Gravitasjon: Svak tiltrekning mellom legemer pga masse
- Elektromagnetisk: Tiltrekning eller frastøtning pga ladning

[Har dessuten svake og sterke kjernekrefter med kort rekkevidde, hvor ca 10^{-18} m og 10^{-15} m, som beskriver hvor radioaktivitet og det faktum at kjernepartikler holdes sammen]

Newton's gravitasjonslov:

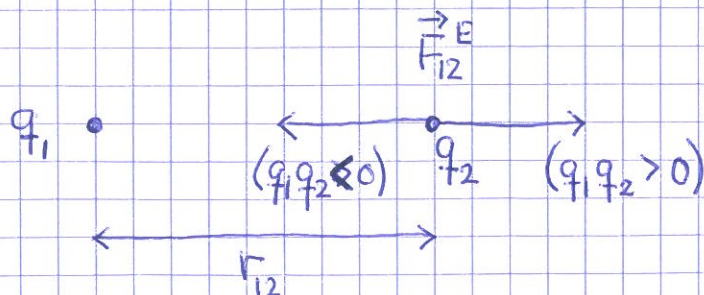


$$\vec{F}_{12}^G = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

(gravitasjonskonstanten)

Coulombs lov:



$$\vec{F}_{12}^E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

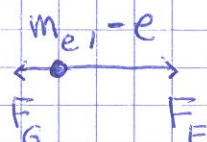
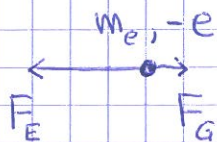
$$[q] = C = \text{A} \cdot \text{s} \text{ (coulomb)}$$

$$\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$$

(vakuumpermittiviteten)

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

Eks: To elektroner



(9)

$$m_e \sim 10^{-30} \text{ kg}, \quad e \sim 10^{-19} \text{ C}$$

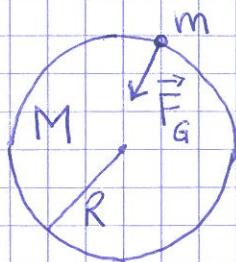
$$\Rightarrow F_E / F_G \sim 10^{43} \Rightarrow F_G \text{ kan neglisjeres}$$

Mellom jorda og månen, derimot, er $F_G \gg F_E$ (selv med nettoladning på f.eks. 10^{10} C på begge)

Mellom "hverdagslige" objekter er typisk $F_E \gg F_G$ (selv med praktisk talt elektrisk nøytrale objekter), men i tillegg kommer F_G fra jorda.

Konklusjon: Både F_G og F_E viktige i hverdagen her på jorda.

Tyngde [YF 4.4; LL 2.5]



Tiltrekkende kraft på m fra jorda:

$$F_G = G \frac{mM}{R^2} \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(6370 \cdot 10^3)^2} \text{ (N)}$$
$$= mg$$

med $g = GM/R^2 \approx 9.8 \text{ m/s}^2 = \text{tyngdens akselerasjon}$

Hvis $F_G = mg$ er eneste kraft på m , får vi (N2)

$$mg = ma$$

dvs

$$a = g = 9.8 \text{ m/s}^2 \quad (\text{"fritt fall"})$$

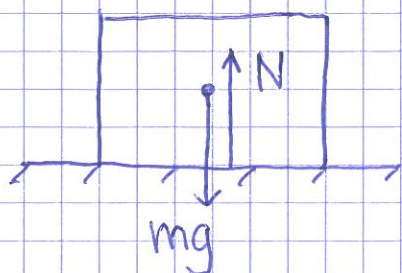
Kontaktkrefter

[YF 4.1 ; LL3]

(10)

Normalkraft:

N = netto frastøtende coulombkraft
fra underlaget på klossen

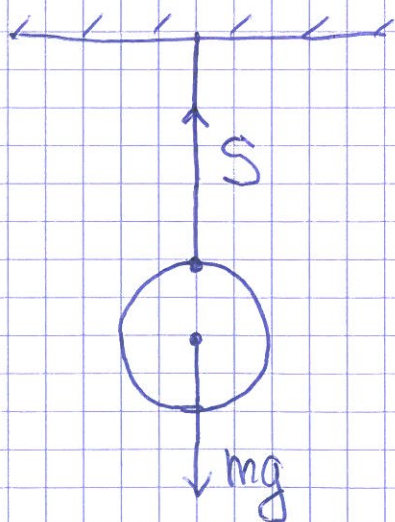


Med klossen i ro gir $N1$ at

$$N = mg$$

Snordrag:

S = netto tiltrekkende coulombkraft
fra snora på kula



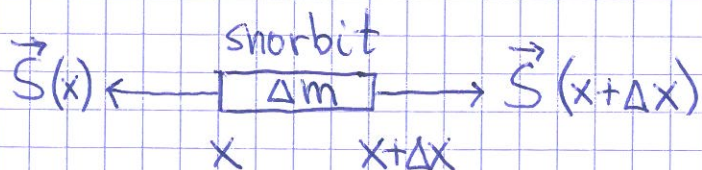
Med kula i ro gir $N1$

$$S = mg$$

[Oppg: Gjør rede for $N3$ (kraft og motkraft)
i disse to tilfellene]

Snordraget $\vec{S}$ er konstant i utstrakte og rette snorer (evt. stenger) som er lette og/eller ikke-akselererte:

(11)

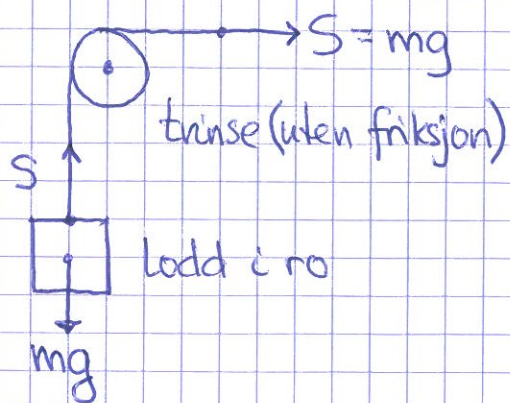


$$N2: \vec{S}(x + \Delta x) + \vec{S}(x) = \Delta m \cdot \vec{a}$$

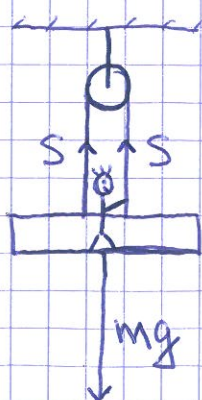
Hvis $\Delta m \approx 0$ eller $\vec{a} = 0$, er $\vec{S}(x + \Delta x) = -\vec{S}(x)$

$\Rightarrow$ Konstant $S = |\vec{S}|$ langs hele snora

Trinser endrer retningen på $\vec{S}$:



Talje:



$$N1 \Rightarrow 2S = mg$$

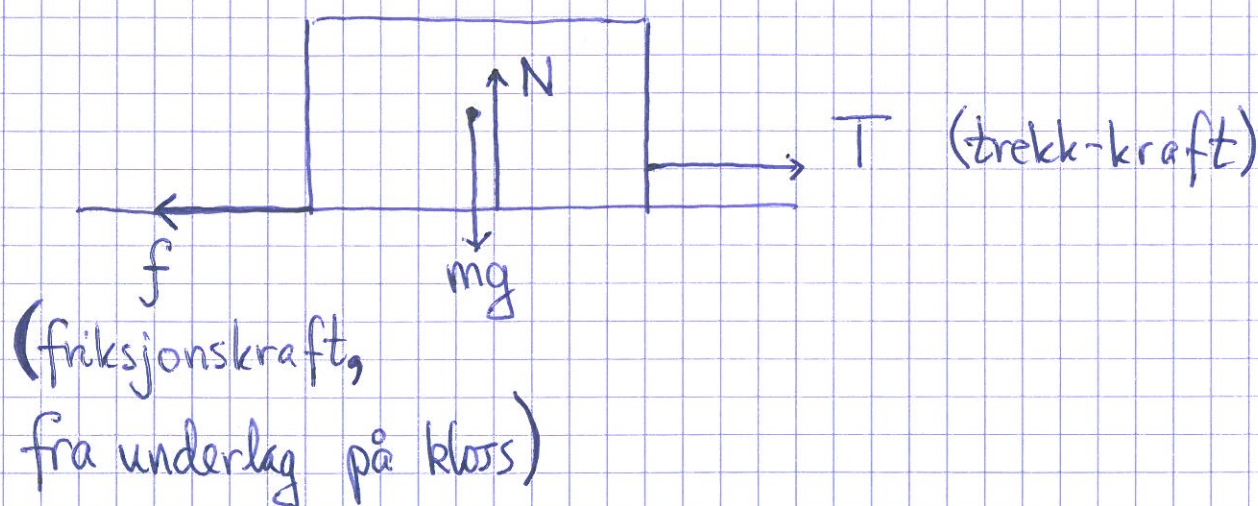
$$S = mg/2$$

Friksjon [YF 5.3 ; LL 3.1]

(12)

Kontaktkrefter rettet mot relativ bevegelse, evt. mot relativ bevegelse som ville finne sted uten friksjon.

Tørr friksjon :



Anta at T økes jevnt. Da blir klossen liggende i ro (statisk friksjon) inntil T når en verdi T_s . Hvis $T > T_s$, begynner klossen å gli (kinetisk friksjon), og den akselereres. Ved å variere m , og dermed

$N = mg$, finner vi at T_s , og dermed maksimal statisk friksjonskraft $f_{\max} = T_s$, er proporsjonal med N :

$$f_{\max} = \mu_s N$$

(13)

Her er μ_s = statisk friksjonskoeffisient, et dimensjonsløst tall, bestemt av materialtype og overflatebehandling av kloss og underlag.

Med $T > f_{\max}$ måler vi en friksjonskraft

$$f = T - ma, \quad (N2)$$

og ved å variere m , og dermed $N = mg$, finner vi at

$$f = \mu_k N$$

Her er μ_k = kinetisk friksjonskoeffisient, dim.løst, og bestemt av materialtyper og overflatebehandling.

Litt ujevnhet i grenseflatene gir best "grep" i det statiske tilfellet:

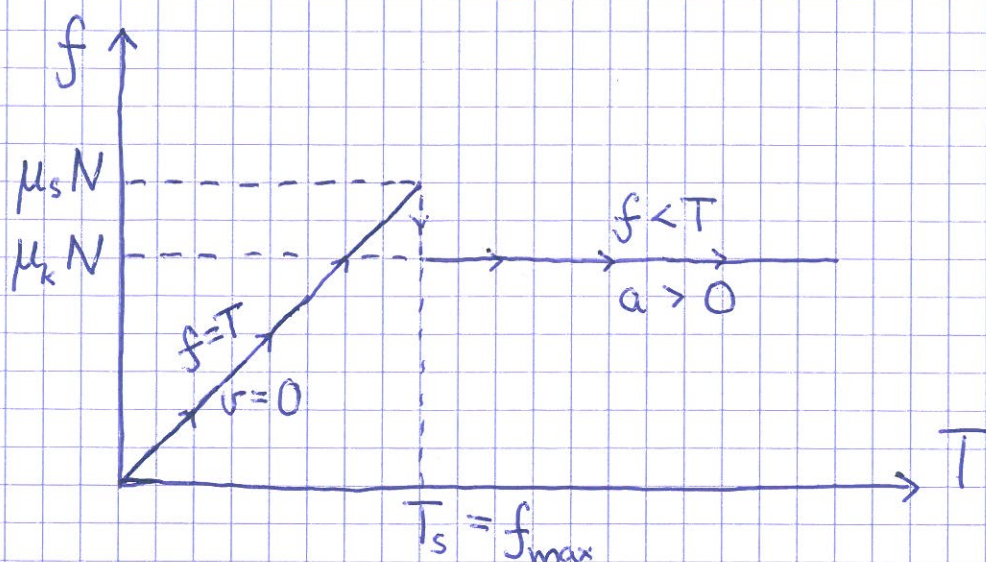
kloss
underlag

Med relativ bevegelse (kinetisk tilfelle) "flyter" klossen oppå, og friksjonskraften blir noe redusert.

Ekspenimenter gir da også typisk at $\mu_s > \mu_k$.

Grafisk framstilling:

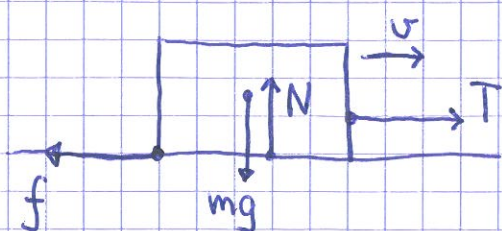
14



Noen tallverdier:

	μ_s	μ_k
Tre mot tre:	0,25-0,50	0,2
Sølv mot sølv:	1,4	0,55
Gummi mot tørr asfalt:	1,0	0,8
— " — våt — " —:	0,3	0,25

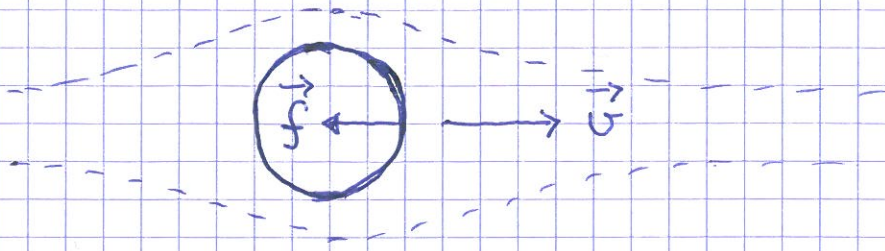
Oppsummert, tørr friksjon:



$v=0$: statisk friksjon,
 $f=T$
 $f_{\max} = \mu_s N$

$v>0$: kinetisk friksjon,
 $f = \mu_k N$ ($\mu_k < \mu_s$)

Fraksjon i fluider (våt fraksjon) [YF5.3; LL8] (15)



- Liten $v \Rightarrow$ laminær (pen) strømming av fluidet omkring (det symmetriske) objektet

$$\vec{f} = -k \vec{v} = -k v \hat{v}$$

Her avhenger k av fluidets viskositet og objektets størrelse og form

- Stor $v \Rightarrow$ turbulent strømming

$$\vec{f} = -D v^2 \hat{v} \quad (\text{sånn omtrent})$$

D = "drag" - koeffisient

Newtons lover; løsningsstrategi og eksempler

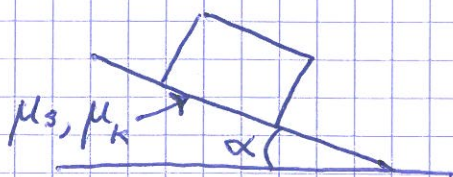
[YF 5 ; LL 3]

- Finn alle ytre krefter $\vec{F}_i$ på legemet
- Tegn "fritt-legeme-diagram", dvs omgivelsene erstattes av krefter på legemet: tyngde $m\vec{g}$, snordrag $\vec{S}$, normalkraft $\vec{N}$, friksjon $\vec{f}$,
- Velg hensiktsmessig koordinatsystem. Dekomponer.
- Bruk N2 ($\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i / m$) evt N1 ($\sum_i \vec{F}_i = 0$)

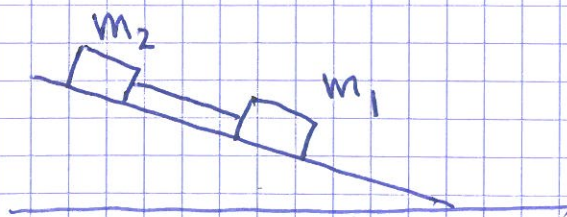


Eks: Kloss(er) på skråplan

[Ør 2; Lab]

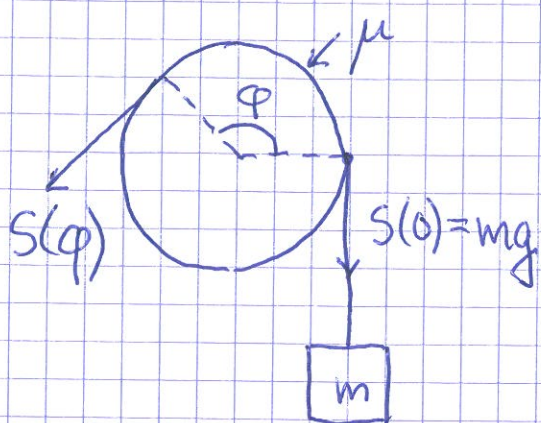


Varianter:



Eks: Snorfriksjon

(17)



m = loddmasse

μ = statisk friksjonskoeffisient

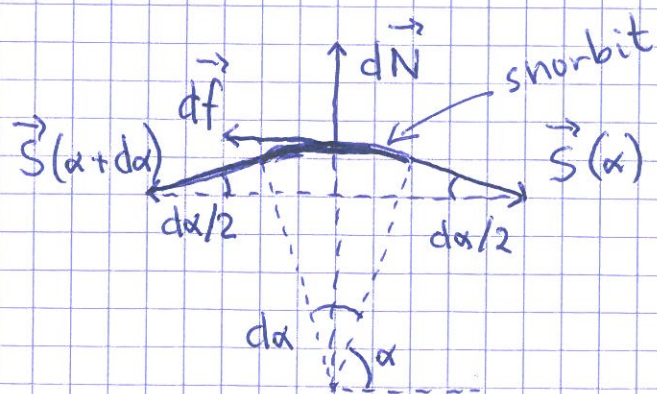
$S(\varphi)$ = snordrag med kontaktvinkel φ mellom snor og sylinder

$S_{\min}(\varphi)$ = minimum snordrag for å holde lodd oppe

$S_{\max}(\varphi)$ = max snordrag uten at lodd heises opp

Oppgave: Finn $S_{\min}(\varphi)$ og $S_{\max}(\varphi)$

Strategi: Siden S endres langs kontaktvinkelen, ser vi på liten snorbit mellom vinkel α og $\alpha + d\alpha$:



$\vec{S}$ = snordrag = kraft på snorbit fra resten av snora

$d\vec{N}$ = normalkraft fra sylinder på snorbit

$d\vec{f}$ = friksjonskraft

Når $S(\varphi) = S_{\min}(\varphi)$, er $df = \mu dN$ med retning som i figuren.

Når $S(\varphi) = S_{\max}(\varphi)$, er $df = \mu dN$ med motsatt retning

$$\text{Lodd i ro} \Rightarrow \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad (N1)$$

$$\Rightarrow \vec{S}(\alpha + d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$$

Dekomponerer:

$$\text{Tangentielt: } S(\alpha + d\alpha) \cos \frac{d\alpha}{2} - S(\alpha) \cos \frac{d\alpha}{2} \pm df = 0$$

$$\text{Normalt: } S(\alpha + d\alpha) \sin \frac{d\alpha}{2} + S(\alpha) \sin \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

Når $d\alpha \ll 1$ ("d $\alpha \rightarrow 0$ "), har vi

$$\cos \frac{d\alpha}{2} \approx 1 \quad \text{og} \quad \sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$$

Dermed:

$$\text{Tangentielt: } S(\alpha + d\alpha) - S(\alpha) \pm \mu dN = 0$$

$$\text{Normalt: } [S(\alpha + d\alpha) + S(\alpha)] \cdot \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

$$\text{Vi har: } S(\alpha + d\alpha) - S(\alpha) = dS$$

$$S(\alpha + d\alpha) + S(\alpha) \approx 2S$$

Dermed:

Tangentielt: $dS = \mp \mu dN$

Normalt: $S \cdot d\alpha = dN$

Dividerer disse med hverandre:

$$\frac{dS}{S \cdot d\alpha} = \mp \mu \Rightarrow \frac{dS}{S} = \mp \mu d\alpha$$

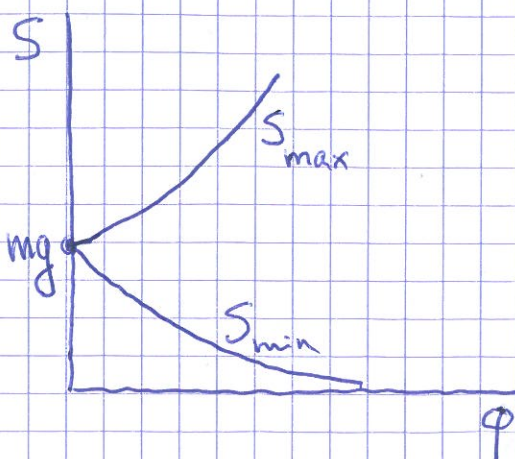
Integrasjon gir:

$$\int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = \mp \int_0^\varphi \mu d\alpha$$

$$\Rightarrow \ln S(\varphi) - \ln S(0) = \mp \mu \varphi$$

$$\Rightarrow S(\varphi) = S(0) e^{\mp \mu \varphi} ; S(0) = mg$$

$$\text{Dvs: } S_{\min}(\varphi) = mg \cdot e^{-\mu \varphi} ; S_{\max}(\varphi) = mg \cdot e^{\mu \varphi}$$



Tallseksempel: $\mu = 0.2$ og
2.25 omdreiningar, dvs
 $\varphi = 9\pi/2$ gir

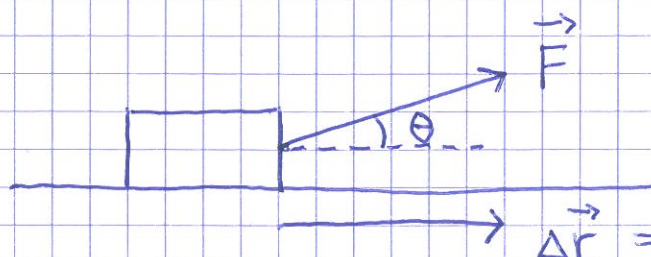
$$S_{\min} \approx 0.06 mg$$

$$S_{\max} \approx 17 mg$$

Arbeid og energi [YF 6,7 ; LL 4]

(20)

Arbeid [YF 6.1-6.3 ; LL 4.1]

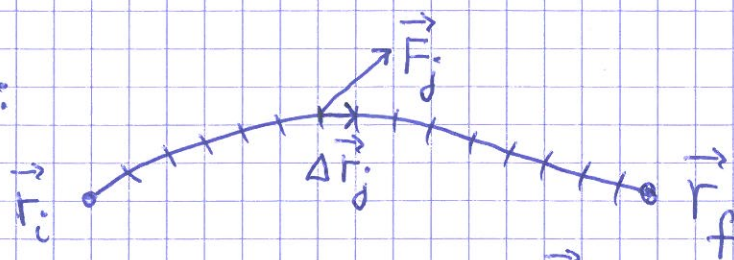


$\Delta \vec{r}$ = legemets forflytning

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = \text{arbeid utført av ytre kraft } \vec{F} \text{ på legemet}$$

$$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \quad (\text{joule})$$

Generelt:



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \quad \xrightarrow{\Delta \vec{r}_j \rightarrow 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeid utført av $\vec{F}$ ved forflytning fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_f$

Effekt [YF 6.4 ; LL 4.1]

effekt = arbeid (evt. energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot d\vec{r}/dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[P] = \text{J/s} = \text{W} \quad (\text{watt})$$

Eks: Hva er $\langle P \rangle$ på en hybel som bruker
4 MWh el.energi pr år?

Løsn: $\langle P \rangle = 4 \cdot 10^6 \text{ Wh} / [365 \cdot 24 \text{ h}] = 457 \text{ W} \approx \underline{\underline{0,5 \text{ kW}}}$

Kinetisk energi [YF 6.2; LL 4.2]



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} \stackrel{N2}{=} \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$d(v^2) = d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v} = 2\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_{v_i^2}^{v_f^2} d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2} m v^2$

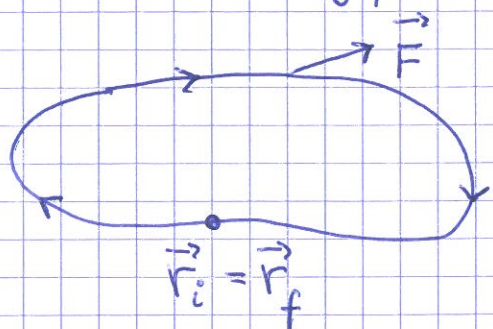
Dermed: $\boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$

Arbeid W utført på legemet tilsvarer endringen ΔK i legemets kinetiske energi.

Konservativ kraft [YF 7.3; LL 4.4]

(22)

Et system som ikke taper mekanisk energi til andre energiformer (f.eks. varme) er konservativt



Hvis $\vec{F}$ er konservativ,
er $K_f = K_i$ (dvs $|\vec{v}_f| = |\vec{v}_i|$),
dvs $W = \Delta K = 0$.

$$\Rightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Konservativ kraft

↑
Integral rundt
lukket kurve

Potensiell energi [YF 7.1-7.4; LL 4.3-4.4]

Når $\vec{F}$ er en konservativ kraft, er potensiell energi

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

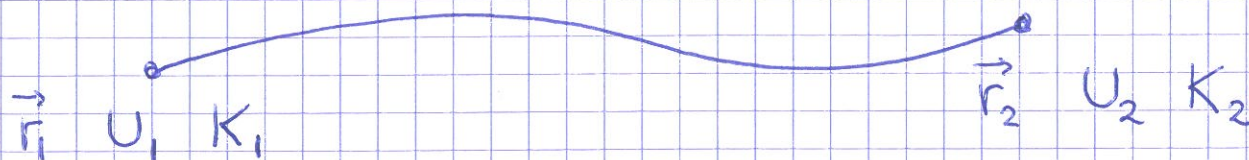
der vi har valgt $U(\vec{r}_0) = 0$.

Bare forskjeller i pot. energi har fysisk betydning.

Mekanisk energibevarelse [YF 7.1-7.3; LL 4.5]

(23)

Anta kons. system.



$$\begin{aligned} U_1 - U_2 &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= W = K_2 - K_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_1 + U_1 = K_2 + U_2}$$

Dvs: Total mekanisk energi

$$E = K + U$$

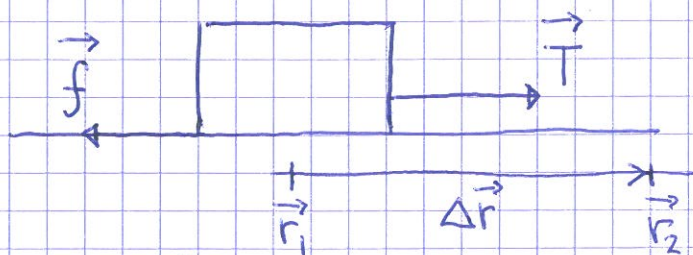
er konstant (bevart)

i et konservativt system.

Friksjonsarbeid

[YF 7.3; LL 4.5]

(24)



$$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{da } \vec{f} \text{ alltid har}$$

retning mot $d\vec{r}$. Friksjonsarbeidet W_f

"går tapt": Mekanisk energi omdannes til varme.

Når $\vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ alltid, er selvsagt også

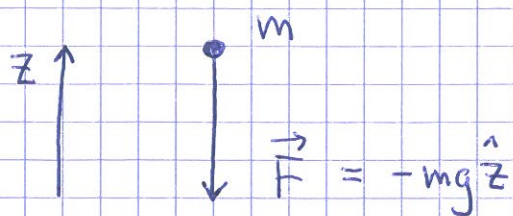
$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0,$$

ders friksjonskraften $\vec{f}$

er ikke konservativ.

Eks 1: Fritt fall

(25)



Anta $U(0)=0$ og $v(0)=0$.
Bestem $U(z)$ og $v(z)$; $z < 0$.

Løsn: $U(z) = - \int_0^z \underbrace{(-mg\hat{z})}_{\vec{F}} \cdot \underbrace{(\hat{z} dz)}_{d\vec{r}} = \underline{\underline{mgz}}$

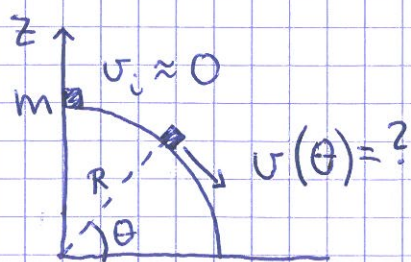
Total mek. energi er bevart

$$\Rightarrow U(z) + K(z) = U(0) + K(0) = 0$$

$$\Rightarrow mgz + \frac{1}{2}mv(z)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v(z) = \sqrt{-2gz}}} \quad (z < 0)$$

Eks 2: Glatt kuleformet tak



Løsn: E er bevart. Anta $U(0)=0$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv(\theta)^2 + mgz(\theta) = mgR$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v(\theta) = \sqrt{2gR(1-\sin\theta)}}}$$

- Hvor mister m kontakten med underlaget? ($N \rightarrow 0$)
- Hvordan ta hensyn til friksjon?
- Hva skjer hvis legemet ruller og "slurer"?

Impuls [YF 8; LL 5]

(26)

[evt. bevegelsesmengde; eng: (linear) momentum]

$$N2: \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \begin{matrix} \text{hvis} \\ m = \text{konst.} \end{matrix} \quad \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Impuls = masse · hastighet

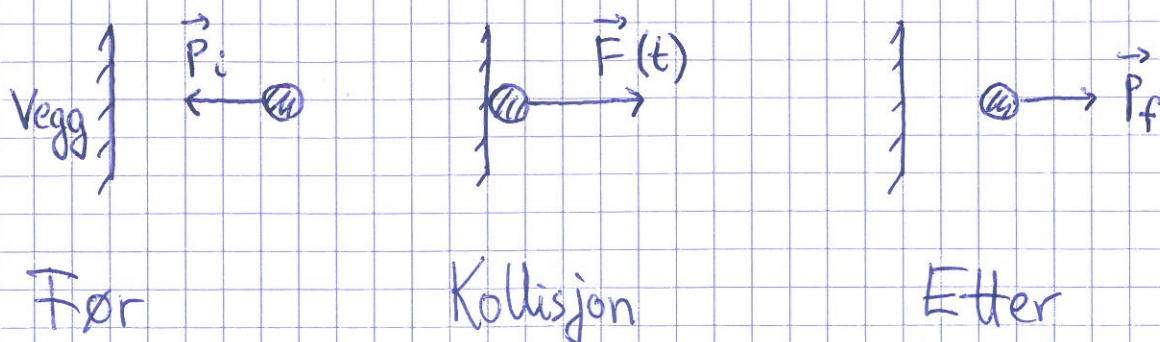
$$\vec{p} = m \vec{v} ; \quad [p] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

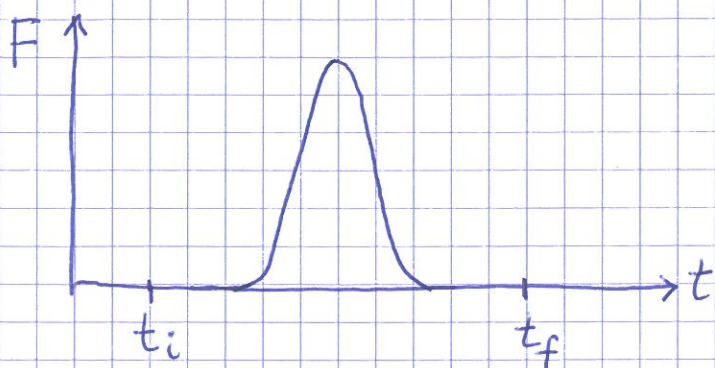
$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \quad N2$$

Impulsbevarelse:

Hvis $\sum \vec{F}_{\text{ytre}} = 0$, er legemets impuls bevart.

Ytre $\vec{F}$ gir impulsendring:



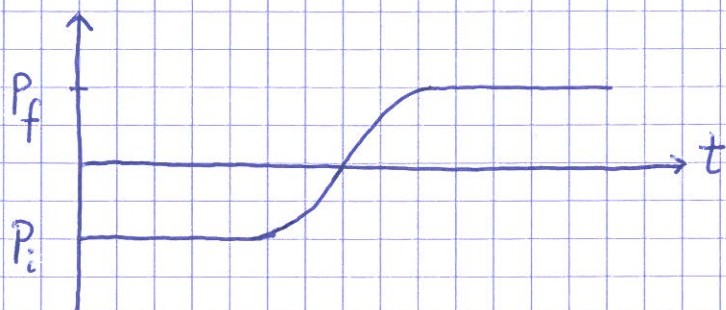


Impulsendring i
kollisjon med vegg:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

$$= \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p}$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt$$



Kollisjoner [YF 8.3, 8.4; LL 5.3]

Elastisk støt: $\Delta K = 0$ (mek. energi bevart)

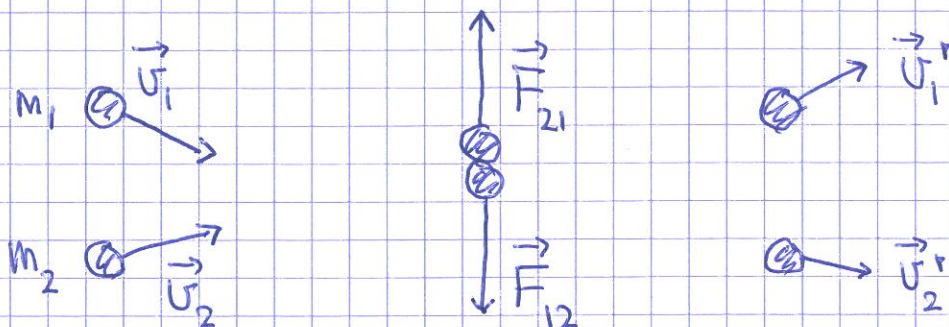
Uelastisk "—" : $\Delta K < 0$ ("—" ikke bevart)

Fullstendig uelastisk støt: Kolliderende legemer henger sammen, med felles hastighet, etter kollisjonen. Max energitap $|\Delta K|$.

Tapt mek. energi $\rightarrow$ deformasjon, lyd, varme...

$$\vec{F}_{\text{ytre}} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{p}_{\text{tot}} = 0$$

Indre krefter endrer ikke $\vec{p}_{\text{tot}}$:



Før

Kollisjon

Etter

$$N2: \vec{F}_{21} = d\vec{p}_1/dt, \quad \vec{F}_{12} = d\vec{p}_2/dt$$

$$N3: \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$$

Eks: Anslå $\langle F \rangle$ (midlere kraft) i et slag på en bordtennisball. ($m = 2.7 \text{ g}$)

(29)

Løsn: Anslår $v_i \sim 10 \text{ m/s}$, $v_f \sim 30 \text{ m/s}$, $\Delta t_{(\text{koll})} \sim 1 \text{ ms}$

$$\Rightarrow \langle F \rangle = \frac{m \Delta v}{\Delta t} = \frac{2.7 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 40 \text{ m/s}}{10^{-3} \text{ s}} = \underline{108 \text{ N}}$$

$$\langle F \rangle / mg = \frac{\Delta v}{g \Delta t} = \frac{\langle a \rangle}{g} = \frac{40000 \text{ m/s}^2}{10 \text{ m/s}^2} = \underline{4000}$$

Dvs, OK å neglisjere ytre kraft mg i kollisjonen

Sentralt støt [YF 8.2-8.4; LL 5.3]

Før: $m \xrightarrow{u} \quad \quad \quad \xleftarrow{V} M$ (i)

Etter: $u' \xleftarrow{m} \quad \quad \quad M \xrightarrow{V'}$ (f)

[I fig: $u, V' > 0$, $u', V < 0$]

$$\Delta p = 0 \Rightarrow \underbrace{mu + MV}_{P_i} = \underbrace{mu' + MV'}_{P_f}$$

(a) Fullstendig uelastisk:

(30)

$$u' = v' = \frac{mu + MV}{m+M}$$

(b) Delvis uelastisk: Kun 1 lign. ($\Delta p = 0$)
for 2 ukjente (u', v'). Må ha 1 opplysning ekstra.

(c) Elastisk, $\Delta K = 0$:

$$\frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mu'^2 + \frac{1}{2}MV'^2$$

$$\Rightarrow m(u+u')(u-u') = M(V'+V)(V'-V) \quad (1)$$

$$\Delta p = 0 \Rightarrow m(u-u') = M(V'-V) \quad (2)$$

$$(1)/(2) \Rightarrow u + u' = V + V'$$

$$\Rightarrow u' - V' = -(u - V) \quad (3)$$

(2) og (3) gir

$$u' = \frac{M}{m+M} \left(2V + u \frac{m-M}{M} \right)$$

$$V' = \frac{m}{M+m} \left(2u + V \frac{M-m}{m} \right)$$

Eks: Ball mot vegg, elastisk.

(31)



Løsn:
$$v' = \frac{M}{m+M} \left(0 + v \frac{m-M}{M} \right) \approx \frac{M}{M} \cdot v \cdot \left(\frac{-M}{M} \right) = -v$$

$$V' = \frac{m}{M+m} (2v + 0) \approx \frac{m}{M} \cdot 2v \approx 0$$

Er $\Delta p = 0$?

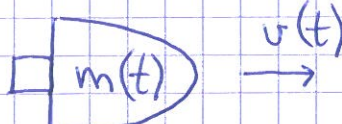
$$\left. \begin{aligned} p &= mv, \quad P = MV = 0, \quad p' = mv' = -mv, \\ P' &= MV' \approx M \cdot \frac{m}{M} \cdot 2v = 2mv \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\Delta p = 0}$$

Er $\Delta K = 0$?

$$\left. \begin{aligned} K_m &= \frac{1}{2}mv^2, \quad K_M = 0, \quad K'_m = \frac{1}{2}mv'^2, \\ K'_M &= \frac{1}{2}MV'^2 \approx \frac{1}{2}M \left(\frac{m}{M} 2v \right)^2 = 2 \frac{m}{M} mv^2 \approx 0 \end{aligned} \right\} \Downarrow \underline{\Delta K = 0}$$

Rakettprinsipp [YF 8.6; LL 5.4]

(32)

Før (t) :  $p(t) = m(t)v(t)$

Efter $(t+dt)$:  $v_e \leftarrow$ eksos $\rightarrow v(t+dt)$
 dm_e

$$p(t+dt) = \underbrace{m(t+dt)}_{m(t)+dm} \underbrace{v(t+dt)}_{v(t)+dv} + \underbrace{dm_e}_{-dm} \underbrace{v_e(t)}_{v(t)+u}$$

$$u = \text{eksoshastighet relativt raketten} = v_e - v < 0$$

$$dm = \text{raketten's masseendring i løpet av } dt < 0$$

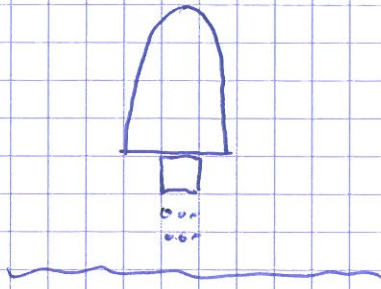
$$\Rightarrow p(t+dt) = \underbrace{m(t)v(t)}_{p(t)} + m(t)dv + \underbrace{v(t)dm - v(t)dm}_0 - u dm$$

Med $F_{\text{ytre}} = 0$ (outer space) er $p(t+dt) = p(t)$

$$\Rightarrow m dv = u dm$$

$$\Rightarrow \underbrace{m dv/dt}_{m \cdot a} = u dm/dt = \underbrace{u \dot{m}}_{F_{\text{skyv}}} (> 0)$$

I tyngdefeltet :



$$F_{\text{ytre}} = -mg$$

$\Rightarrow$ Total kraft på (rest-)raketten blir

$$F_{\text{skyt}} + F_{\text{ytre}} = u\dot{m} - mg$$

Som gir

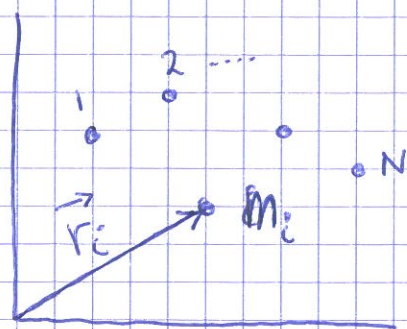
$$ma = u\dot{m} - mg \quad (N2)$$

Hittil : "Punktmasser"

Nå : Partikkelsystemer. Stive legemer.

Massesenter. Tyngdepunkt

[YF 8.5, oppg 8.115+8.116; LL 5.6, 5.8, 6.1]

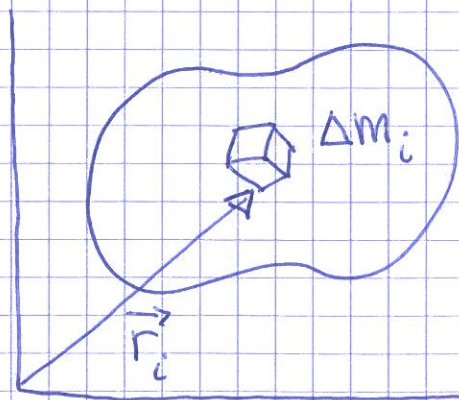


Massesenter (CM) for N punktmasser $m_1, m_2, \dots, m_N$ i posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$M = \sum_i m_i = \text{total masse}$$

Kontinuerlig massefordeling:



$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

$$= \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

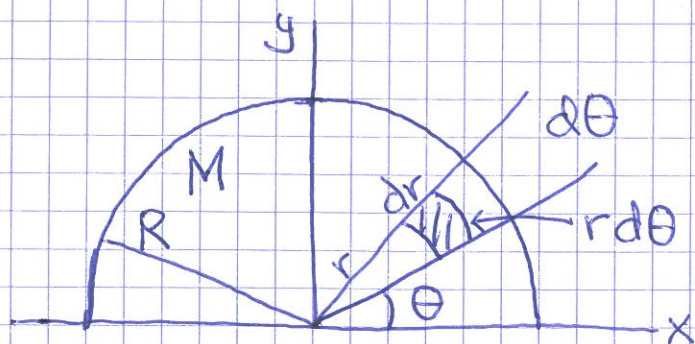
↑
integral over der vi har masse

3D: $dm = \rho dV$, ρ = masse pr volumenhet,
 dV = volumelement

2D: $dm = \sigma dA$, σ = masse pr flateelement,
 dA = flateelement

1D: $dm = \lambda dl$, λ = masse pr lengdeenhet,
 dl = linjeelement

Eks: Halvsirkulær tynn skive



$$dA = dr \cdot r d\theta$$

$$\frac{dm}{M} = \frac{dA}{A} = \frac{r dr d\theta}{\frac{1}{2} \pi R^2}$$

$$\vec{r} = \hat{x} r \cos\theta + \hat{y} r \sin\theta$$

$$\vec{R}_{cm} = \hat{x} X_{cm} + \hat{y} Y_{cm} ; X_{cm} = 0 \text{ pga symmetri}$$

$$Y_{cm} \approx R/2 \quad (\text{rektangel } \begin{array}{c} 2R \\ \boxed{\cdot} \\ R \end{array} \text{ gir } Y_{cm} = R/2)$$

Exp. gir $Y_{cm} \approx 7R/18$ (papp og pinne!)

(36)

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm = \int r \sin \theta \frac{dA}{A} =$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} r \sin \theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \underbrace{\int_0^R r^2 dr}_{\frac{1}{3} R^3} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta}_{\uparrow (-\cos \theta) = 1+1 = 2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{4}{3\pi} R \approx 0.42 R}}$$

Vis selv:

Halvsirkulær tynn stang: $Y_{CM} = \frac{2}{\pi} R$ (1D)

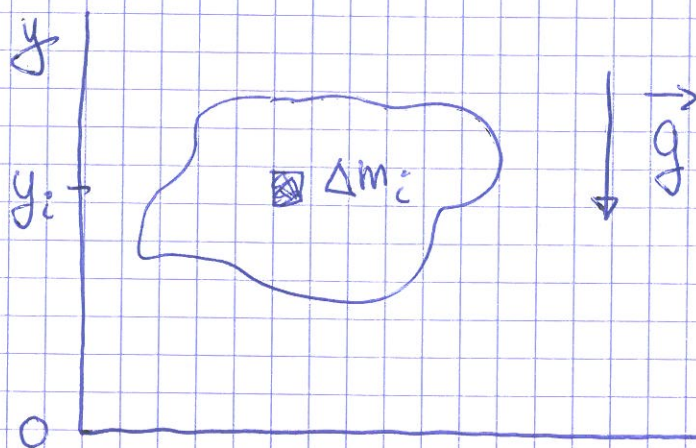
Kompakt halvkule: $Y_{CM} = \frac{3}{8} R$ (3D)

[Tips: Omdreining av skiva rundt y-aksen gir halvkule, med volumelement $dV = dA \cdot 2\pi x$.

Integrasjon over r fra 0 til R og over θ fra 0 til $\pi/2$ (hvorfor ikke π ?!) får med all massen. Volum av halvkule kjenner du (?)]

Potensiell energi U for partikkelsystem i tyngdefeltet

37



Velger $U(0) = 0$

$$U = \sum_i \Delta U_i = \sum_i \Delta m_i g y_i$$

Hvis $g = \text{konst.}$:

$$U = g \sum_i \Delta m_i y_i = \underline{g M Y_{\text{cm}}}$$

det samme som om hele massen $M = \sum_i \Delta m_i$
var samlet i høyden Y_{cm} !

(Og da f.eks. i nettopp $\vec{R}_{\text{cm}}$)

[Dette har vi antatt "hele livet",
Nå vet vi at det er OK!]

Tyngdepunktbevegelsen [YF8.5; LLS.8]

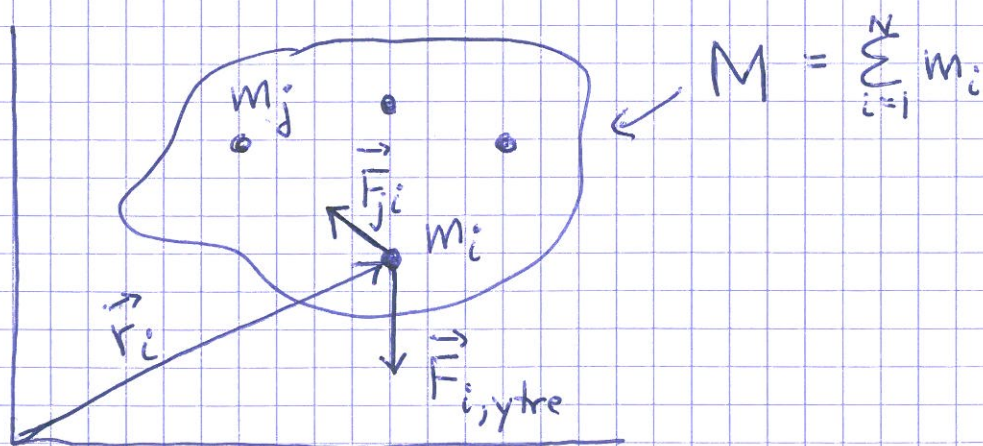
(38)

Skal se at:

$$M \ddot{\vec{R}}_{cm} = \vec{F}_{ytre}$$

Dvs:

Tyngdepunktet $\vec{R}_{cm}$ beveger seg som om hele massen M var samlet i $\vec{R}_{cm}$ og ble utsatt for summen av alle ytre krefter, $\vec{F}_{ytre}$, som virker på systemet!



N2 for m_i :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\vec{F}_{i,ytre}}_{\text{total ytre kraft p\aa } m_i} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\text{total indre kraft p\aa } m_i}$$

Legg sammen N2 for alle massene:

(39)

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i &= \underbrace{\sum_i \vec{F}_{i, \text{ytre}}}_{\substack{= \text{netto ytre} \\ \text{kraft } \vec{F}_{\text{ytre}} \\ \text{på systemet}}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\substack{= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} + \dots + \vec{F}_{N, N-1} + \vec{F}_{N-1, N} \\ = 0 \quad (\text{pga N3})}}\end{aligned}$$

Venstre side:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_i m_i \vec{r}_i \right\} = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ M \vec{R}_{\text{CM}} \right\} = M \ddot{\vec{R}}_{\text{CM}}$$

Dermed:
$$\boxed{M \ddot{\vec{R}}_{\text{CM}} = \vec{F}_{\text{ytre}}}$$

Bevegelse i tillegg til tyngdepunktbevegelsen:

- Rotasjon om CM
- Vibrasjon relativt CM

Stive legemer:

Kun translasjon av CM + rotasjon om CM

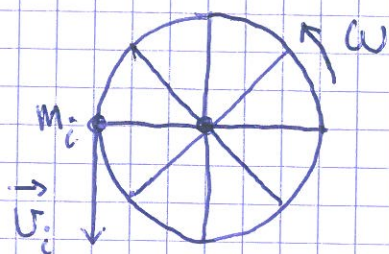
ROTASJON

[YF 9,10; LL 6 (5)]

(40)

Innledning:

- Roterende hjul



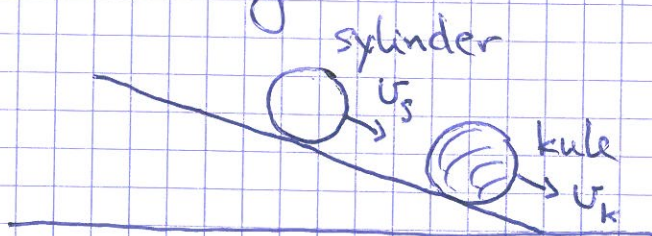
$CM \neq ro \Rightarrow K_{trans} = 0$, men
 $K_{rot} \neq 0$

Impuls?

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0, \text{ men}$$

dreieimpuls $\neq 0$

- Rulling



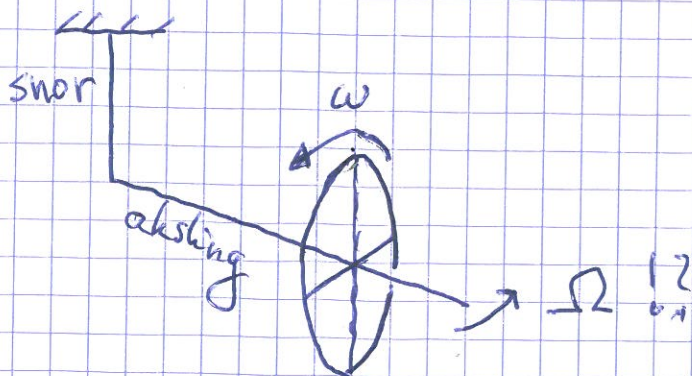
Hvor angriper kreftene?

Dreiemoment!

Hvorfor er $v_k > v_s$?

Fraksjonens rolle

- Mer komplisert dynamikk

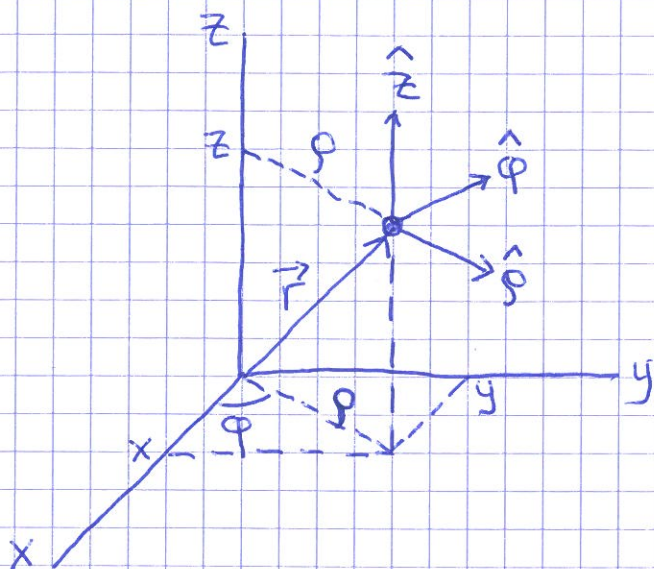


Preesjon
Gyroskop

Sirkelbevegelse [YF 9.1-9.3; LL 1.8]

(41)

Antar rotasjon om gitt akse, z -aksen, og bruker sylinderkoordin. (= polarkoord. + z)



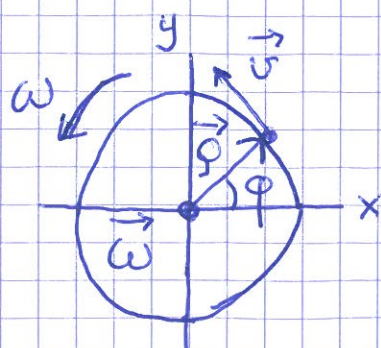
$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z} \quad (= x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z})$$

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = y/x$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

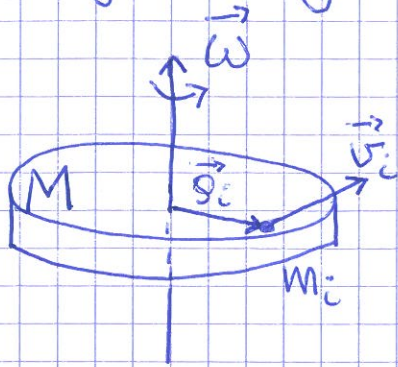
Lar vinkelhastigheten bli vektor som peker langs rotasjonsaksen:



$$\vec{\omega} = \omega \hat{z} \quad (= \omega \hat{\omega}), \quad \vec{\rho} = \rho \hat{\rho}$$

$$\vec{v} = \rho \omega \hat{\phi}$$

Ser at $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}}$ gir riktig retning ($\hat{\phi} = \hat{z} \times \hat{\rho}$) og tallverdi ($v = \omega \rho$)

Rotasjonsenergi [YF 9.4; LL 6.4]

$$K = K_{\text{rot}} = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\rho_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2$$

Tregghetsmoment [YF 9.4; LL 6.3]

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2 = \text{legemets tregghetsmoment mhp gitt akse}$$

Med kont. massefordeling:

$$m_i \rightarrow \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} dm \quad \text{og} \quad \sum_i \rightarrow \int$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int \rho^2 dm}$$

(der ρ = avstand fra akse til dm)

Dermed:

$$\boxed{K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

Kinetisk energi for stivt legeme [YF 10.3; LL 6.6] (43)

Generell beregning: Translasjon av CM + Rotasjon om CM

$$\Rightarrow K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_o \omega^2$$

M = massen, $V = \vec{R}_{\text{CM}}$,

I_o = treghetsmoment mhp rot.aksen gjennom CM

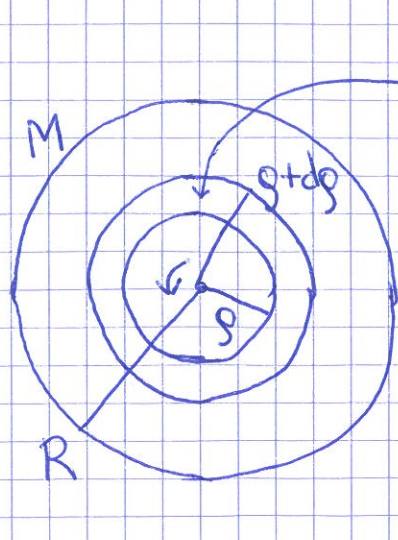
$\vec{\omega}$ = vinkelhast. for rot. omkring " " "

Eksempler på beregning av I [YF 9.6; LL 6.3]

Eks 1: Ring (evt. sylinderskall)

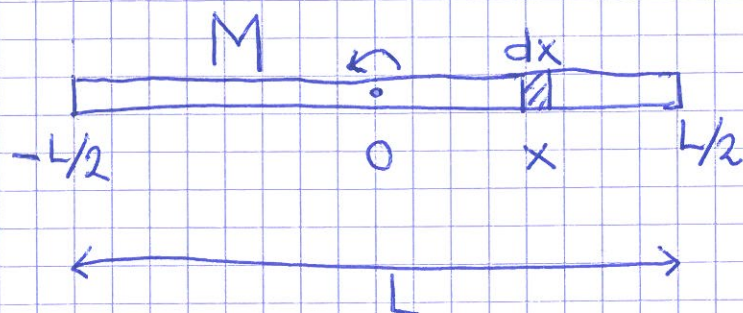

$$I_o = \int_{\text{ring}} s^2 dm = R^2 \int_{\text{ring}} dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

Eks 2: Sirkulær skive (evt. kompakt sylinder)


$$\begin{aligned} dI_o &= dm \cdot s^2 ; \quad dm = M \frac{dA}{A} = M \cdot \frac{2\pi s ds}{\pi R^2} \\ \Rightarrow I_o &= \int dI_o = \int_0^R M \frac{2\pi s ds}{\pi R^2} s^2 \\ &= \frac{2M}{R^2} \underbrace{\int_0^R s^3 ds}_{R^4/4} = \underline{\underline{\frac{1}{2} MR^2}} \end{aligned}$$

Eks 3: Tynn stang

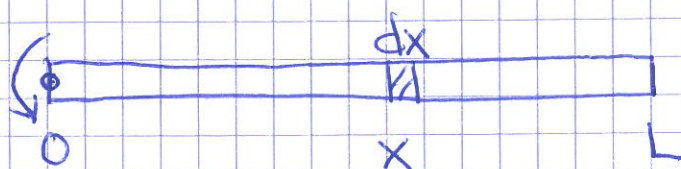
44



$$g = x, \quad dm = M dx / L$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 M dx / L = \frac{M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}}$$

Eks 4: Mhp akse gjennom stangas ende



$$I = \int_0^L x^2 M dx / L = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$

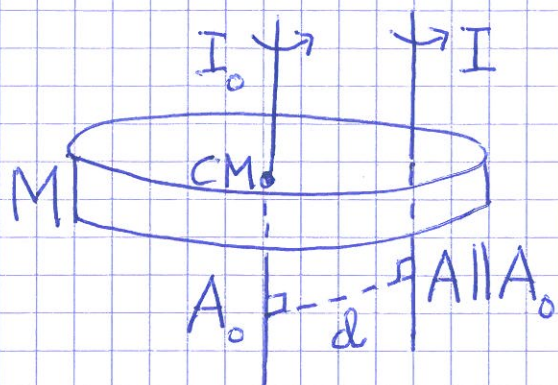
Eks 5: Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$

Eks 6: Kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

Steiners sats

[VF 9.5; LL 6.3]

(45)



$$I = I_0 + Md^2$$

Eks 1: Tynn stang



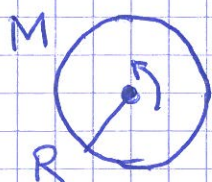
$$I_0 = \frac{1}{12} ML^2$$

$$d = L/2 \Rightarrow$$



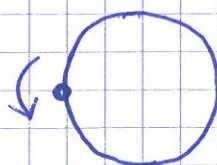
$$I = I_0 + M(L/2)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

Eks 2: Kuleskall



$$I_0 = \frac{2}{5} MR^2$$

$$d = R \Rightarrow$$

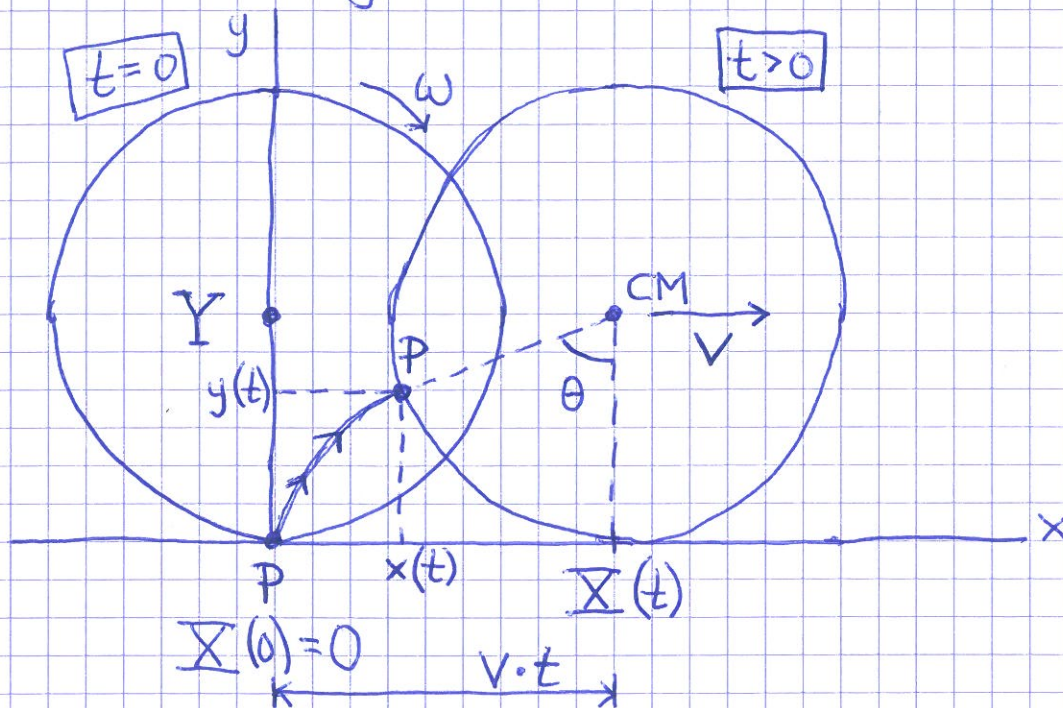


$$I = I_0 + MR^2 = \frac{7}{5} MR^2$$

Rulling og sluring [YF 10.3; LL 6.7]

(46)

Ren rulling



P = punkt på periferien; $(x(t), y(t))$ = banen til P

$$V = \dot{R}_{CM} = \dot{X} \quad ; \quad Y = R$$

$$\omega = \dot{\theta}$$

$$X = V \cdot t = R \cdot \theta$$

$$V = \dot{X} = R \dot{\theta} = R \omega$$

$$A = \ddot{X} = \dot{V} = R \ddot{\theta} = R \dot{\omega} = R \alpha$$

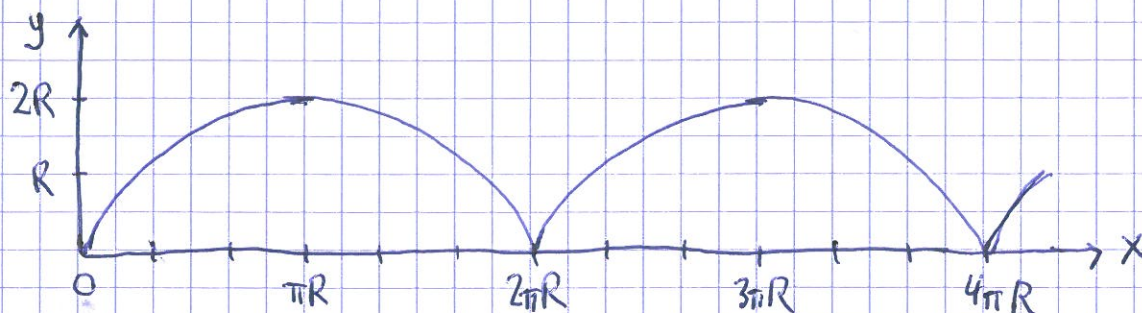
Rullebetingelser:

$$V = R\omega, \quad A = R\alpha$$

Banen til P:

$$x = X - R \sin \theta, \quad y = R - R \cos \theta$$

Sykloide:

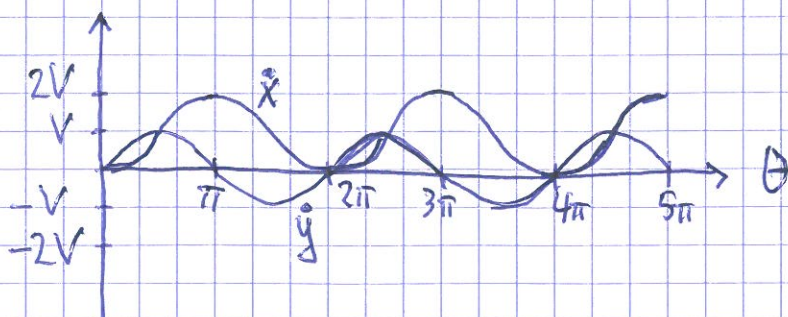


Hastigheden til P:

$$\dot{x} = \dot{X} - R\dot{\theta} \cos \theta = V(1 - \cos \theta)$$

$$\dot{y} = R\dot{\theta} \sin \theta = V \sin \theta$$

$$\Rightarrow \vec{v}(\theta) = \hat{x} V(1 - \cos \theta) + \hat{y} V \sin \theta$$



K ved ren rulling:

$$I_0 = c \cdot MR^2 \quad (c=1 \text{ for ring etc}) ; \quad \omega = V/R$$

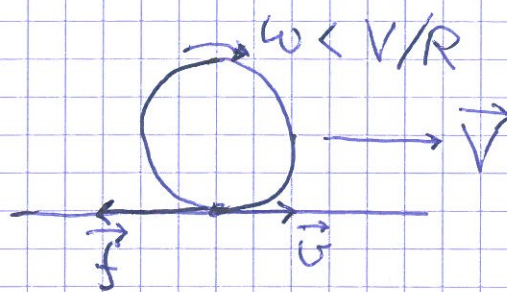
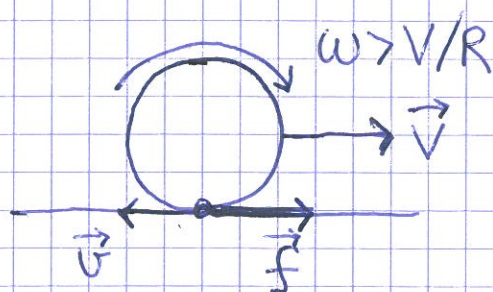
$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} cMR^2 \frac{V^2}{R^2} = \underline{\underline{(1+c) \cdot \frac{1}{2} MV^2}}$$

Sluring

(48)

$\omega \neq V/R \Rightarrow$ relativ hastighet $v = V - \omega R \neq 0$
mellom legeme og underlag & kontaktpunktet

$\Rightarrow$ legemet roterer og glir; legemet slurer



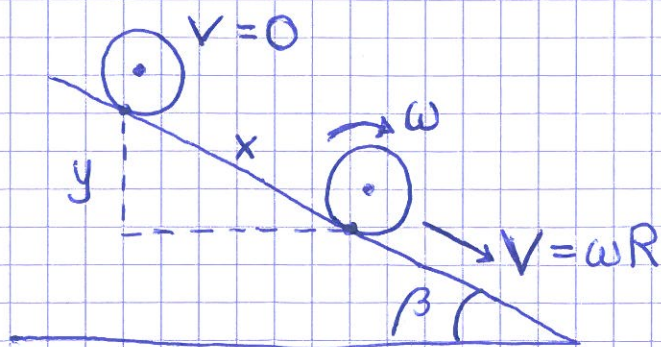
Effekttap: $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$ ($f = |\vec{f}| = \mu_k N$)

Hvis ren rulling, $v = 0$: $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$

Statisk friksjon $f \leq \mu_s N$; $\vec{f}$ rettet mot "tenkt
relativhast." $\vec{v}$ hvis det ikke hadde vært friksjon.

[I praksis litt tap av mek. energi også ved
ren rulling pga "rullefriksjon".]

Eks: Ren rulling på skråplan [YF 10.3; LL 6.8]



$M = \text{masse}$, $R = \text{radius}$, $I_o = cMR^2$

Finne $\dot{V}$, samt minste
tillatte μ_s for ren rulling.

Exp viser: $\dot{V}(\text{kule}) > \dot{V}(\text{skive}) > \dot{V}(\text{kuleskall}) > \dot{V}(\text{hul sylinder})$

Løsning: E er bevart $\Rightarrow Mgy = (1+c) \cdot \frac{1}{2} MV^2$

(49)

$$y = x \sin \beta$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{2gx \sin \beta / (1+c)} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \Rightarrow V = \sqrt{2gx \sin \beta / (1+c)} \\ \Rightarrow \text{exp. er} \\ \text{forklart!} \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \text{exp. er forklart!}$$

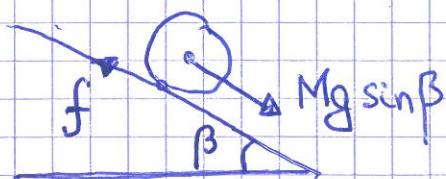
Objekt	kule	skive	kuleskall	hul sylinder
c	2/5	1/2	2/3	1

Akselerasjonen:

$$\dot{V} = \sqrt{\frac{2g \sin \beta}{1+c}} \cdot \frac{d}{dt} \sqrt{x} ; \quad \frac{d}{dt} \sqrt{x} = \frac{1}{2} x^{-1/2} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{V}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = \sqrt{\frac{2g \sin \beta}{1+c}} \cdot \frac{\sqrt{2gx \sin \beta / (1+c)}}{2\sqrt{x}} = \underline{\underline{g \cdot \frac{\sin \beta}{1+c}}}$$

Hvis bare $G_{||} = Mg \sin \beta$ virket langs skråplanet, ville $\dot{V}$ ha blitt $g \sin \beta$. Friksjon f , rettet oppover skråplanet, reduserer $\dot{V}$ med faktoren $1/(1+c)$:



$$Mg \sin \beta - f = M \dot{V} = \frac{Mg \sin \beta}{1+c}$$

$$\Rightarrow f = Mg \sin \beta \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{1+c} \right\}$$

$$= \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta$$

Men: $f_{\max} = \mu_s N = \mu_s Mg \cos \beta$

$\Rightarrow$ Ren rulling bare mulig hvis

$$\mu_s Mg \cos \beta \geq \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta$$

$$\underline{\underline{\mu_s \geq \frac{c}{1+c} \tan \beta}}$$

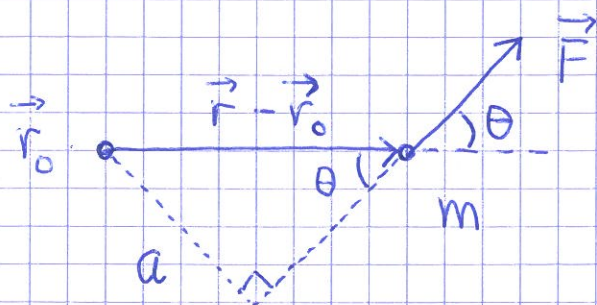
Kule (kompakt): $\mu_s \geq \frac{2}{7} \tan \beta$ osv.

Rotasjonsdynamikk

50

Dreiemoment

[YF 10.1 ; LL 5.5, 6.4]



$$\vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$$

= $\vec{F}$'s dreiemoment på m ,
relativt valgt referansepunkt $\vec{r}_0$

Retning:

$$\vec{\tau} \perp \vec{F}$$

$$\text{og } \vec{\tau} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$$

(ut av planet
i figuren)

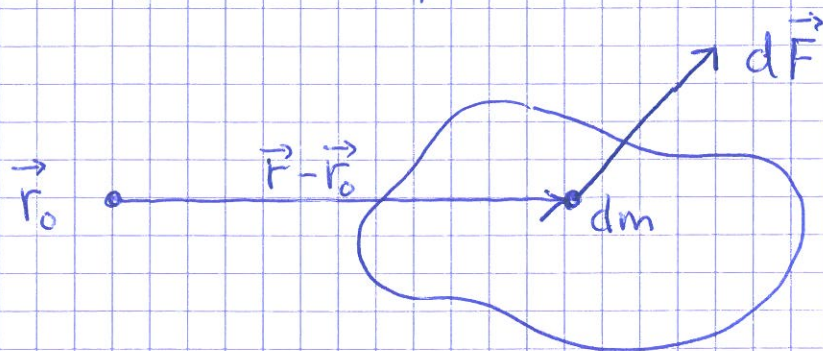
Absoluttverdi:

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \theta$$

$$= a \cdot F$$

(= arm $\cdot$ kraft)

For partikkelsystem:



$$d\vec{r} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F}$$

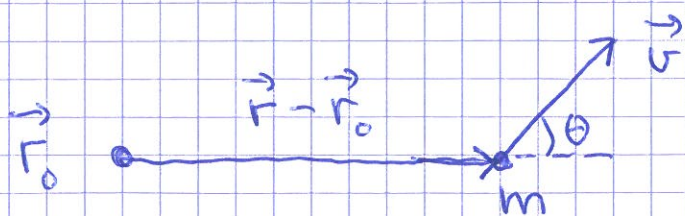
$$\vec{r} = \int d\vec{r} = \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F}$$

= totalt dreiemoment på legemet, relativt $\vec{r}_0$

Fra før: Netto ytre $\vec{F} \Rightarrow$ endring i impulsen $\vec{p}$

Nå: Netto ytre $\vec{r} \Rightarrow$ endring i dreieimpulsen $\vec{L}$

Dreieimpuls [YF 10.5 ; LL 6.6]



$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\boxed{\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p}}$$

= m's dreieimpuls,
relativt $\vec{r}_0$

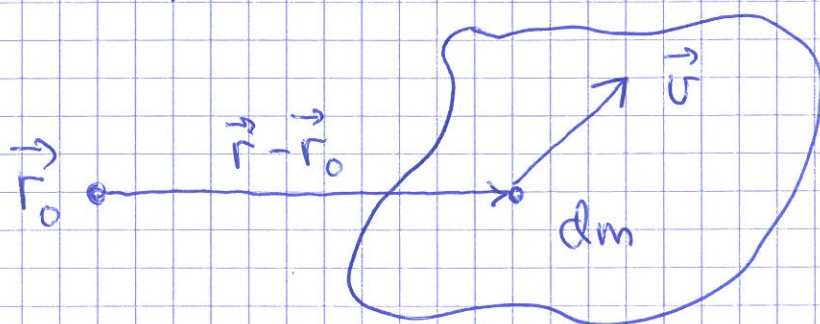
Retning:

$$\vec{L} \perp \vec{p} \text{ og } \vec{L} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$$

Absoluttverdi:

$$|\vec{L}| = |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin\theta = a \cdot p \quad (\text{arm} \cdot \text{impuls})$$

For partikkelsystem:



$$d\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{p} = dm (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{u}$$

$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int dm (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{u}$$

= legemets totale dreieimpuls, relativt $\vec{r}_0$

N2 for rotasjon [YF 10.5; LL 6.6]

(53)

$$N2: \vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{p}}$$

Anta fast $\vec{r}_0$, evt. $\dot{\vec{r}}_0 \parallel \vec{v}$, for da er $\dot{\vec{r}}_0 \times \vec{v} = 0$

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} \{ m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} \} = m \underbrace{\dot{\vec{v}} \times \vec{v}}_{=0} + m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{a}$$

$$\stackrel{N2}{=} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F} \stackrel{(def)}{=} \vec{\tau}$$

For partikkelsystem:

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} \int dm (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} = \int dm (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{a}$$

$$\stackrel{N2}{=} \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F} = \int d\vec{\tau} = \vec{\tau}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = d\vec{L}/dt} \quad N2, \text{ rotasjon}$$

der

$\vec{\tau}$ = netto ytre dreiemoment på legemet

$\vec{L}$ = legemets dreieimpuls

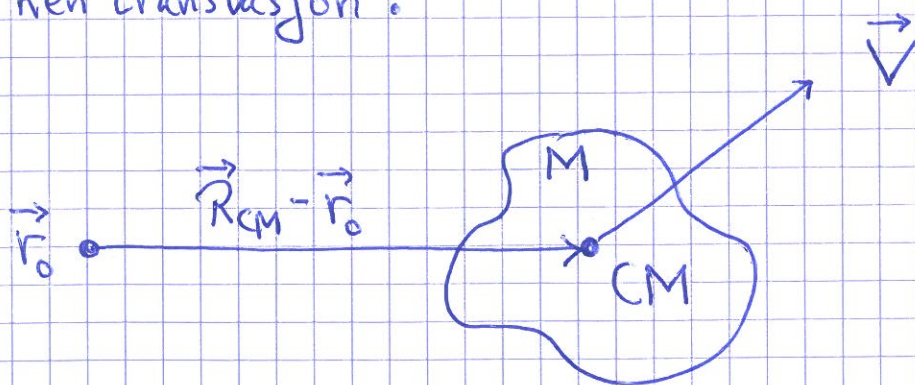
NB: Samme ref.punkt $\vec{r}_0$ i $\vec{\tau}$ og $\vec{L}$!

Bevaringslover, oppsummert

- $\vec{F}_{\text{ytre}} = 0$ (isolert system) $\Rightarrow E_{\text{(total)}}, \vec{p}$ og $\vec{L}$ bevart
(ingen ytre krefter) $\nwarrow$
- Konservativt system $\Rightarrow$ mek. energi $E = K + U$ bevart
- $\sum \vec{F}_{\text{ytre}} = 0 \Rightarrow \vec{p}$ bevart
- $\sum \vec{r}_{\text{ytre}} = 0 \Rightarrow \vec{L}$ bevart

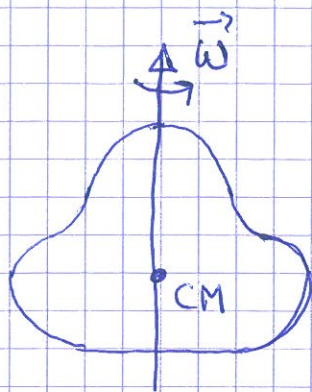
$\vec{L}$ for stivt legeme [YF 10.5; LL 6.6]

Ren translasjon:



$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{Fra def.}} \vec{L}_b &= M (\vec{R}_{\text{CM}} - \vec{r}_0) \times \vec{V} \\ &= \text{banedreieimpuls} \end{aligned}$$

Ren rotasjon; om akse gjennom CM:



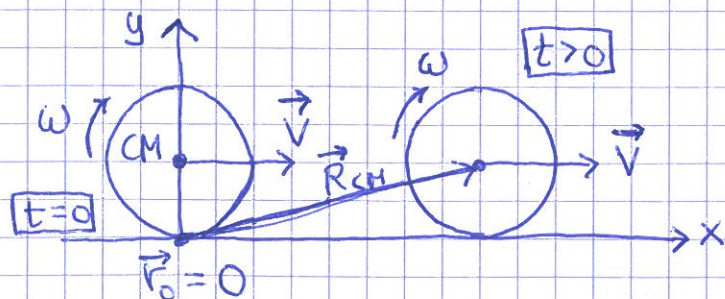
Med refleksjonssymmetri om rotasjonsaksen er

$\vec{L}_s = I_o \vec{\omega} = \text{indre dreieimpuls, spinn; uavhengig av } \vec{r}_o$

Total dreieimpuls for stivt legeme:

$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_o) \times \vec{V} + I_o \vec{\omega}$$

Eks: Snookerkule, masse M , radius R , $I_o = \frac{2}{5}MR^2$



$$\vec{\omega} = -\omega \hat{z}$$

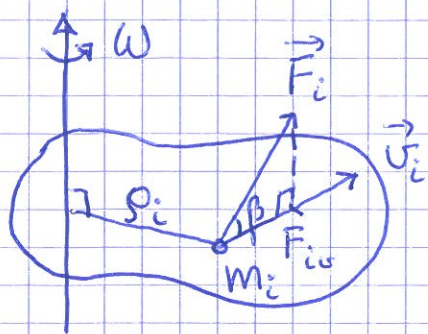
$$\vec{L} = ?$$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= M \vec{R}_{CM} \times \vec{V} + I_o \vec{\omega} \\ &= \underline{\underline{-MRV \hat{z} - \frac{2}{5}MR^2 \omega \hat{z}}} \end{aligned}$$

Hvis ren rulling: $V = \omega R \Rightarrow \vec{L} = -\frac{7}{5}MR^2 \omega \hat{z}$

N2 for rotasjon om akse med fast orientering

(56)



$$\begin{aligned}\vec{F}_i \cdot \vec{v}_i &= F_i v_i \cos \beta \\ &= F_{i\omega} v_i\end{aligned}$$

Skal se at $\tau = I \dot{\omega}$ ved å regne ut to forskjellige uttrykk for effekten som tilføres det stive legemet.

$$\begin{aligned}P &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \stackrel{N2}{=} \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i \stackrel{5.21}{=} \frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (= \frac{dK}{dt}) \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i m_i r_i^2 \right\} \cdot \frac{1}{2} \omega^2 = I \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt}\end{aligned}$$

$$P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_{i\omega} v_i = \left\{ \sum_i F_{i\omega} r_i \right\} \omega = \tau \omega$$

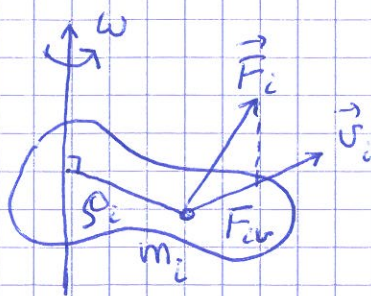
$$\Rightarrow \boxed{\tau = I \dot{\omega}} \quad (N2, \text{rot. om akse m/ fast orientering})$$

der $\tau = \sum_i F_{i\omega} r_i =$ ytre dreiemoment på legemet,
(her referert til rotasjonsaksen, og ikke et ref. punkt $\vec{r}_0$)

$I = \sum_i m_i r_i^2 =$ legemets treghetsmoment
mhp den ~~vag~~ fast orienterte rot. aksen

Arbeid utført ved rotasjon [YF 10.4; LL 6.4]

(57)



$$\text{Fra sist: } P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \tau \omega$$

$$\text{med } \tau = \sum_i F_{i\perp} r_i$$

$$P = dW/dt \quad \text{og} \quad \omega = d\phi/dt$$

$$\Rightarrow \text{Tilført effekt: } \boxed{P = \tau \omega}$$

Utført arbeid ved rotasjon $d\phi$:

$$\boxed{dW = \tau d\phi}$$

$$[\text{Sammenlign translasjon: } P = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}]$$

Statisk likevekt [YF 11.1-11.3; LL 7.1]

Et stivt legeme er ^(og ferdig!) i ro, dus

$$\vec{P} = 0$$

$$\text{og} \quad \vec{L} = 0,$$

bare dersom

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

Netto ytre kraft

og

$$\sum_i \vec{\tau}_i = 0$$

Netto ytre dreiemoment

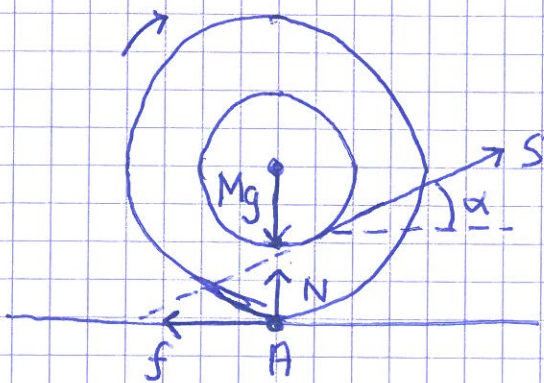
Rotasjon, eksempler

58

Eks 1: Snelle



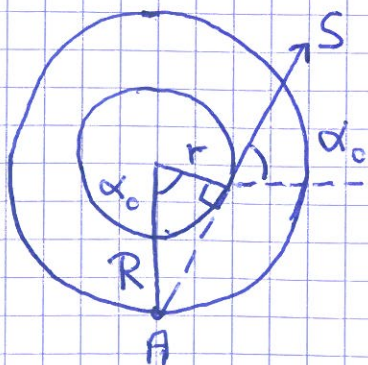
Løsn: Kun S har arm mhp kontaktpunktet A :



Liten $\alpha \Rightarrow \vec{\tau}_A$ inn i planet
 $\Rightarrow$ Rotasjon med klokka
 $\Rightarrow$ Ruller mot høyre

Stor $\alpha \Rightarrow$ Omvendt

Statisk likevekt hvis forlengelse av $\vec{S}$ gjennom A :

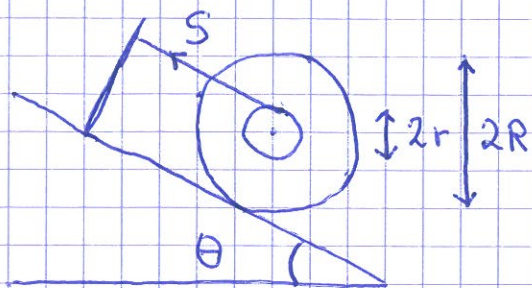


$$\cos \alpha_0 = r/R$$

Snelle i ro inntil $S \geq \frac{\mu_s Mg}{\frac{r}{R} + \mu_s \sqrt{1 - r^2/R^2}}$

(Vis dette)

Eks 2: Snelle på skråplanet



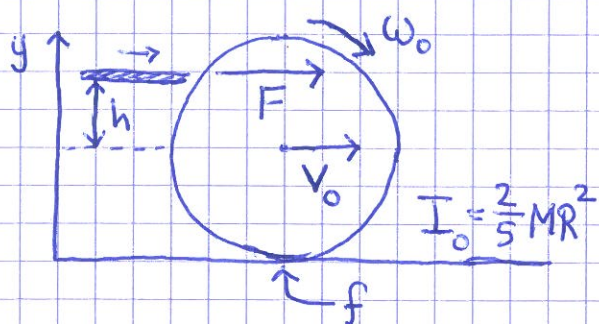
Finn vinkel θ_0 når snella begynner å gli.

Hva er S når den glir?

Hva er a når den glir?

Strategi: $N1$ langs skråplanet og $N1$, rot. om CM , $f = f_{\max} \Rightarrow \theta_0$
 $N2$ ——— " ——— og $N2$ ——— " ———, $f = \mu_k N \Rightarrow a$

Eks 3: Snooker [LL 6.7]



Kort støt:

$$N2: F \Delta t = \Delta p = M v_0$$

$$N2, \text{ rot om } CM: \tau \Delta t = \Delta L = I_0 \omega_0$$

$$\tau = F h \quad (F \gg f)$$

Stor $h \Rightarrow \omega_0 > v_0/R \Rightarrow$ skring og $\vec{f}$ mot høyre

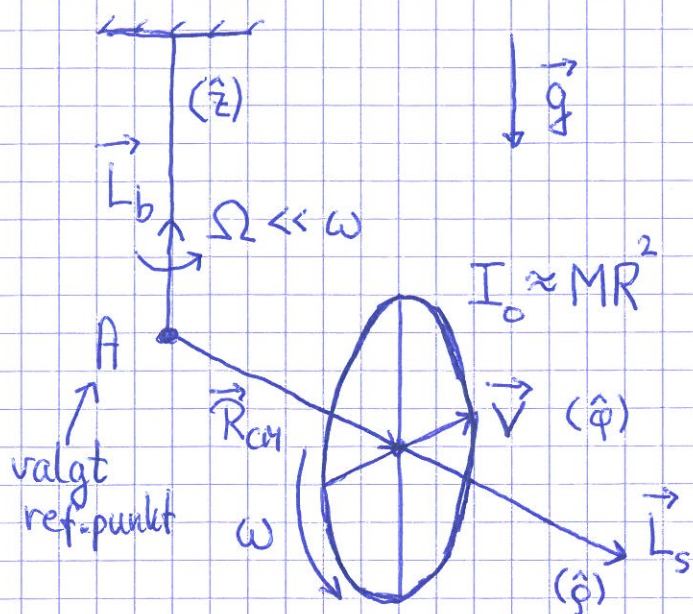
Liten $h \Rightarrow$ omvendt

$h = h_0 \Rightarrow v_0 = \omega_0 R$ og ren rulling umiddelbart

Etter hvert ren rulling uansett!

Eks 4: Presesjon [YF 10.7 ; LL 6.10]

(60)



Exp:

$$M \approx 5 \text{ kg}$$

$$R \approx 0.3 \text{ m}$$

$$R_{cm} \approx 0.2 \text{ m}$$

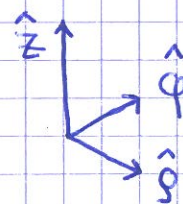
$$T_{\Omega} = \frac{2\pi}{\Omega} \approx \dots$$

$$\boxed{\omega = ?}$$

Lysn: $\vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \vec{R}_{cm} \times M\vec{V} + I_o \vec{\omega}$

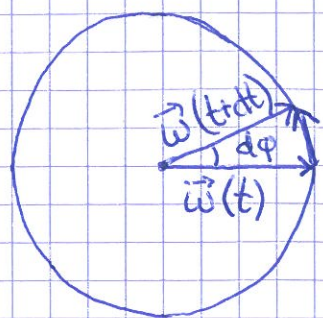
$$L_b = R_{cm} M V \ll L_s = MR^2 \omega$$

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_A &= \vec{R}_{cm} \times M\vec{g} \\ &= R_{cm} M g \hat{\phi} \end{aligned}$$



N2, rot. mhp A:

$$\vec{\tau}_A = \frac{d\vec{L}_A}{dt} \approx \frac{d\vec{L}_s}{dt} = I_o \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \left(\frac{d\vec{L}_b}{dt} \approx 0 \right)$$



$$d\vec{\omega} = \omega d\phi \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \omega \frac{d\phi}{dt} \hat{\phi} = \omega \Omega \hat{\phi}$$

(61)

$$\Rightarrow R_{cm} Mg = I_o \omega \Omega = MR^2 \omega \Omega$$

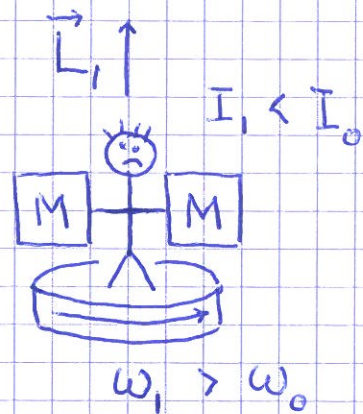
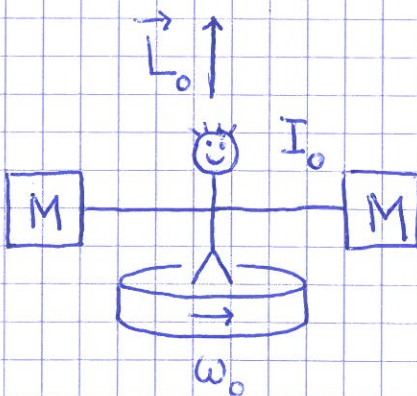
$$\Rightarrow \omega = \frac{R_{cm} g}{R^2 \Omega}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{(2\pi R)^2}{R_{cm} g T_\Omega}}}$$

$$\text{Tallverdi: } T_\omega \approx \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10^0} \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ s}$$

Eks 5: Piruett

[YF 10.6; LL 6.5]

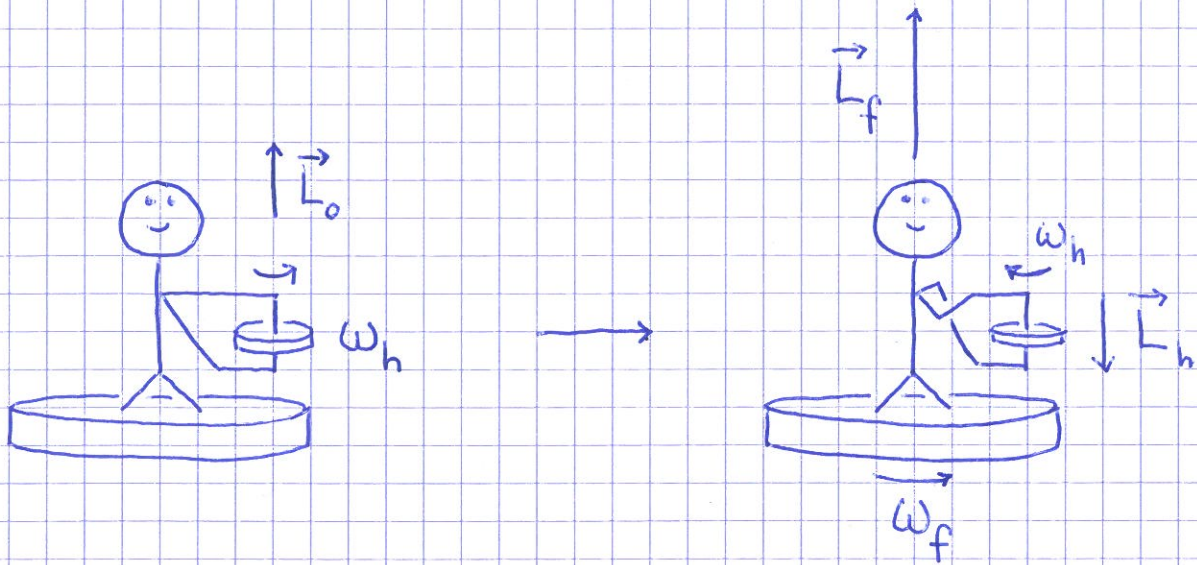


$$\vec{\tau}_{\text{ytre}} = 0 \Rightarrow \vec{L}_1 = \vec{L}_0$$

$$\Rightarrow I_1 \omega_1 = I_0 \omega_0 \Rightarrow \omega_1 = \frac{I_0}{I_1} \omega_0 > \omega_0$$

[K øker! Hvorfor/hvordan?]

Eks 6: Dreieimpulsbevarelse for roterende forelser



$$\vec{L}_{\text{ghe}} = 0 \Rightarrow \vec{L}_f + \vec{L}_h = \vec{L}_o$$

$$\vec{L}_h = -\vec{L}_o$$

$$\Rightarrow \vec{L}_f = 2\vec{L}_o$$

SVINGNINGER

[YF 14; LL 9]

63

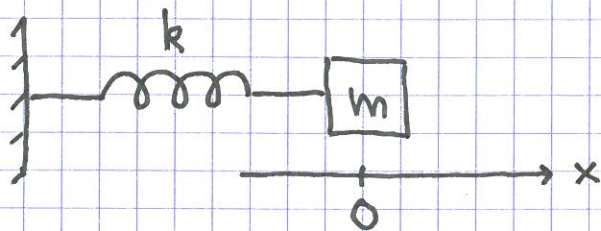
= oscillasjoner

= periodisk oppførsel omkring likevekt

Eks: masse/fjær, pendel, gitarstreng, luft i orgelpipe, atomer i molekyler og krystaller ...

Harmonisk oscilator

[YF 14.2; LL 9.1-9.3]



Likevekt ($F = 0$) med m (CM) i $x = 0$

Strukket fjær, $x > 0$:

Sammenpresset fjær, $x < 0$:

Hookes lov (ideell fjær): $|F| \sim |x|$

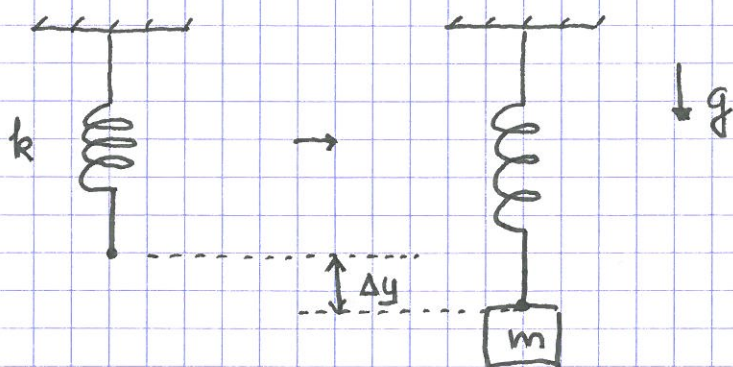
$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -k \times \hat{x}}$$

Fjærkonstanten: k

$$[k] = \text{N/m}$$

Vertikalt i tyngdefeltet:

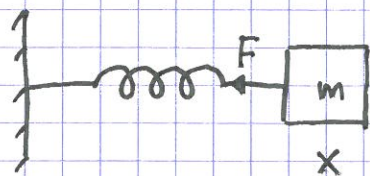
64



Likevekt:

$$k \Delta y = mg$$

$$\Rightarrow \Delta y = mg/k$$



$$\text{N2: } -kx = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\text{Innfør } \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Enkel harm. osc.
i en dimensjon

Løsning: Frie svingninger uten damping.

Ser at både $\sin \omega_0 t$ og $\cos \omega_0 t$ løser ligningen, siden
 $\frac{d^2}{dt^2}(\sin \omega_0 t) = -\omega_0^2 \sin \omega_0 t$, og tilsvarende for $\cos \omega_0 t$.

Generell løsning:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{evt} \quad x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$$

Int.konst. A, φ evt. B, C fastlegges med 2 initialbetingelser,

$$\text{f.eks: } x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

[$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ gir relasjoner
mellom A, φ og B, C]

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

65

A = amplitude = max utsving fra likevekt ; $[A] = [x]$

ω_0 = vinkel frekvens ; $[\omega_0] = s^{-1}$

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr svingning ; $[T] = s$

$f = 1/T$ = frekvens = svingninger pr tidsenhet ; $[f] = Hz = s^{-1}$

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

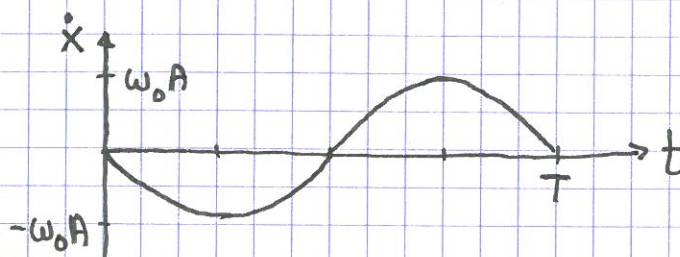
φ = fasekonstant ; $[\varphi] = 1$

Anta f.eks. $\varphi = 0$ og $A > 0$:

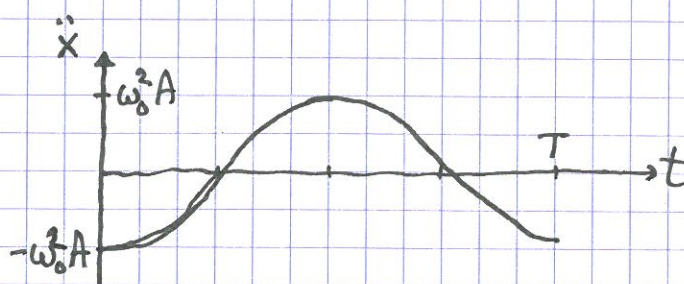
$$x(t) = A \cos \omega_0 t$$



$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\omega_0 A \sin \omega_0 t \\ &= \omega_0 A \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t \\ &= -\omega_0^2 x \\ &= \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \pi) \end{aligned}$$



Energi i harmonisk oscillator [YF 14.3; LL 9.4]

66

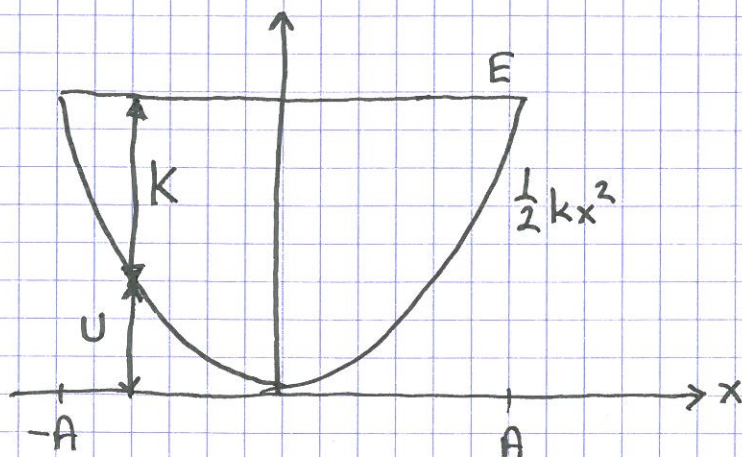
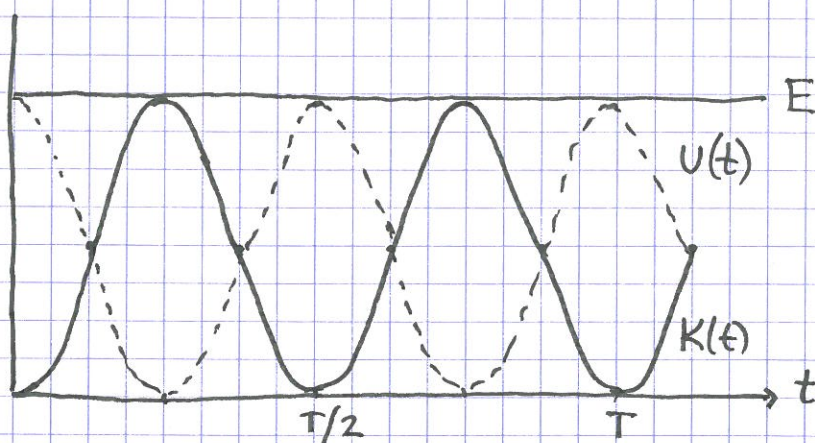
$$K(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$U = - \int_0^x F(x) dx = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2$$

$$U(t) = \frac{1}{2} k x(t)^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \omega_0 t$$

⇒ Systemet er konservativt, dvs E er bevaret (mek. energi) :

$$E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) = \frac{1}{2} k A^2 = \text{konst.}$$

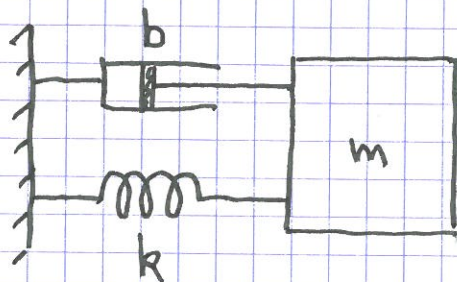


Dempet fri svingning

[YF 14.7; LL 9.7]

67

Antar $f = -b\dot{x}$, dvs friksjon i fluid (langsom bevegelse).



Netto kraft på m:

$$-kx - b\dot{x}$$

$$N2: -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

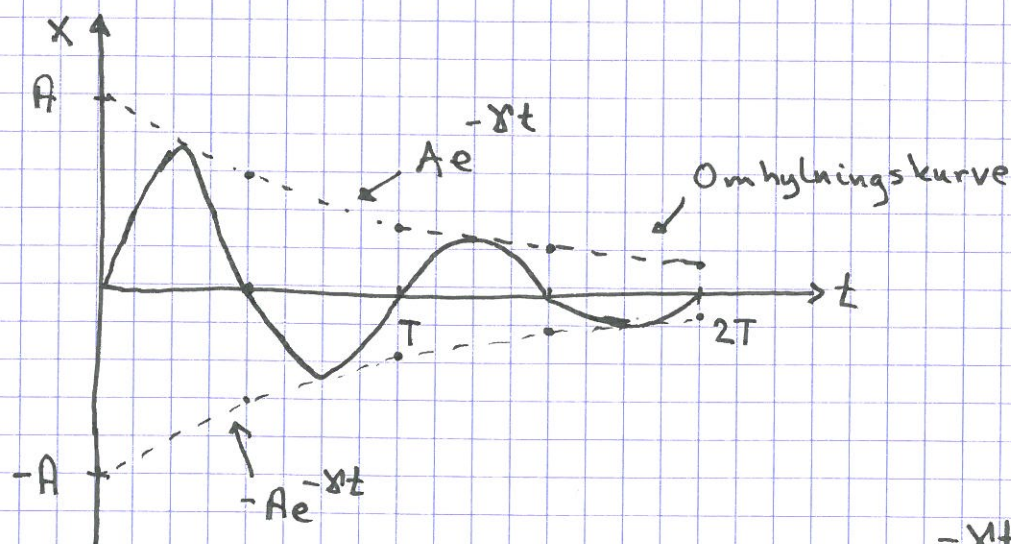
$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad ; \quad \gamma = b/2m, \quad \omega_0^2 = k/m$$

$$[\gamma] = [\omega_0] = s^{-1}$$

Løsning:

Underkritisk (svak) damping, $\gamma < \omega_0$ ($b < 2\sqrt{k \cdot m}$)

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$$



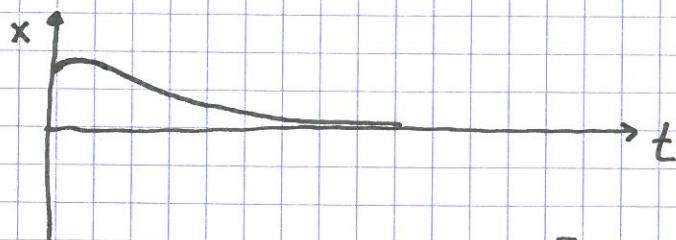
$\Rightarrow$ Amplituden $Ae^{-\gamma t}$ avtar eksponentielt med t

Overkritisk damping, $\gamma > \omega_0$:

68

$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$$

$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

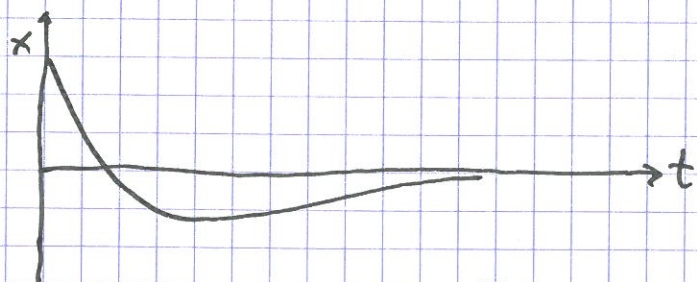


Ingen svingninger

[Her: $x(0) > 0$, $\dot{x}(0) > 0$]

Kritisk damping, $\gamma = \omega_0$:

$$x(t) = A e^{-\gamma t} + B t e^{-\gamma t}$$



[Her: $x(0) > 0$, $\dot{x}(0) < 0$]

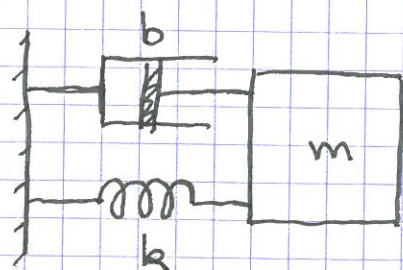
Eks: Støtdempere i (f.eks.) bil.

Mest behagelig med $\gamma \approx \omega_0$ på humpete veier

Tvingningssvingning. Resonans

[YF 14.8; LL 9.9]

06.10.14



$$F_y(t) = F_0 \cos \omega t$$

= ytre harmonisk kraft

$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

$$\gamma = b/2m$$

$$\omega_0^2 = k/m$$

Løsning:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t), \quad \text{slik at}$$

$$\ddot{x}_h + 2\gamma \dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0 \quad (\text{homogen løsn.})$$

$$\ddot{x}_p + 2\gamma \dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (\text{partikulær løsn.})$$

I starten bidrar både x_h og x_p til innsvingningsforløpet.

Etter hvert blir $t \gg 1/\gamma$ slik at $e^{-\gamma t} \rightarrow 0$ og $x_h \rightarrow 0$.

Da er $x(t) = x_p(t)$.

$$\text{Vi gjetter } x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

Innsetting av x_p , $\dot{x}_p$ og $\ddot{x}_p$ i N2 gir:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left\{\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right\}$$

Resonans: Anta svak damping, $\gamma \ll \omega_0$. Da blir $A(\omega)$ stor hvis $\omega \approx \omega_0$, dvs ytre kraft "driver" systemet med frekvens ω lik systemets egenfrekvens (resonansfrekvens) $\omega_0 = \sqrt{k/m}$:

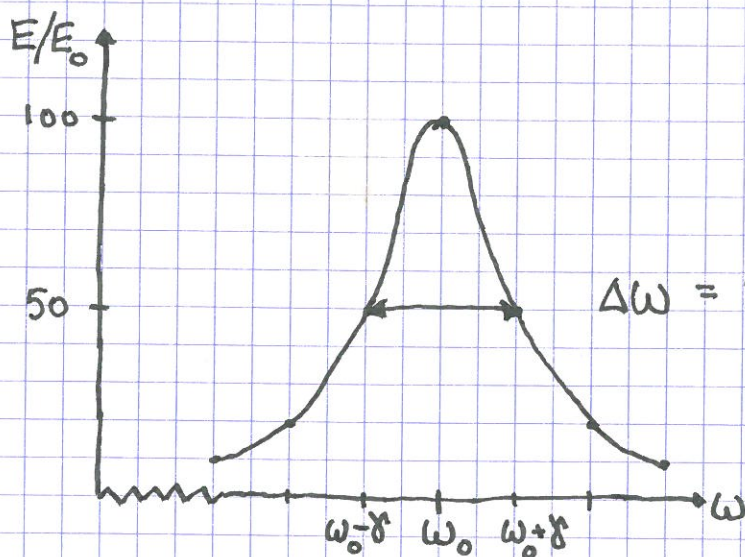
$A(\omega) \rightarrow \infty$ dersom $\gamma \rightarrow 0$ og $\omega \rightarrow \omega_0$

[Jf. Tacoma bridge, 1940]

Oscillatorens energi:

$$E \approx \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k \frac{F_0^2}{m^2} \cdot \frac{\omega_0^4 / \omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

$$= \underbrace{\frac{F_0^2}{2k}}_{E_0} \cdot \underbrace{\frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}_{\text{dimensjonsløs funksjon av } \omega}$$



Anta $\gamma = \omega_0/20$

$\Delta\omega = 2\gamma = \text{halvverdigbredden}$

Q-faktor: Mål for hvor "skarp" resonanstoppen er.

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} \quad [Q \text{ for } \underline{q}uality!]$$

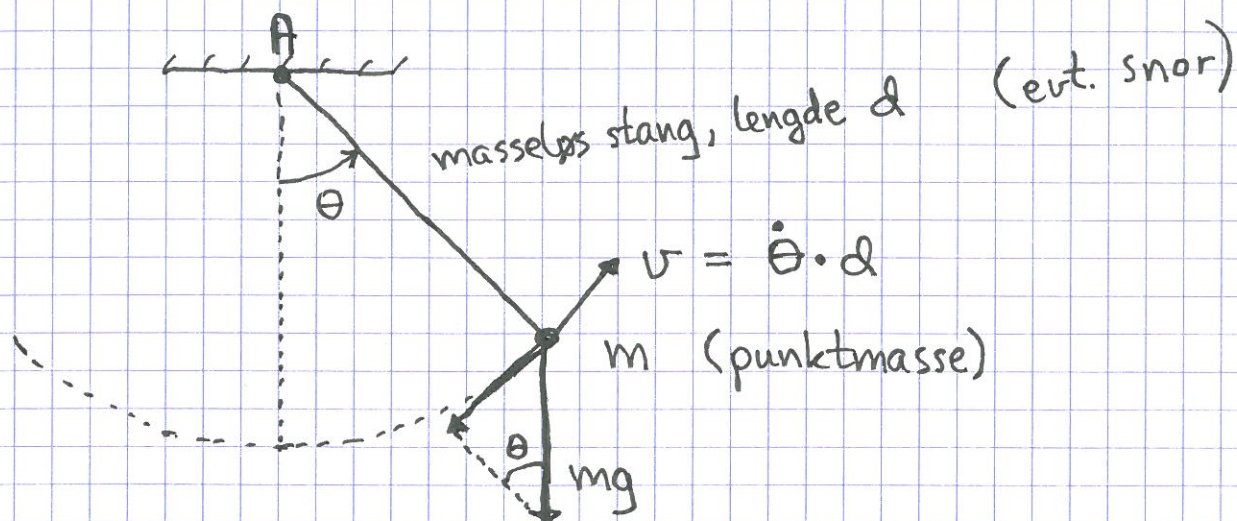
Dvs: Mindre damping $\Rightarrow$ Smalere resonans $\Rightarrow$ Større Q-verdi

[Her er $Q = 10$]

Matematisk pendel

[YF 14.5; LL 9.6]

71



N2 || sirkelbanen:

$$-mg \sin \theta = m a_{||} = m \ddot{r} = m \cdot d \cdot \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{d} \sin \theta = 0$$

Kan ikke løses analytisk, med mindre vi hele tiden har små utsving fra likevekt, dvs $|\theta| \ll 1$.

Da er $\sin \theta \approx \theta$, og vi har enkel harm. osc:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{med} \quad \omega_0 = \sqrt{g/d}$$

$$\text{Svingeperiode: } T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{d/g}$$

Større utsving gir avvik fra harm. osc.

Vi må beholde $\sin \theta$ i ligningen, som nå må løses numerisk, f.eks slik:

Anta kjente startbetingelser $\theta(0) = \theta_0$ og $v(0) = v_0$ 72

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{d} \Rightarrow d\theta = \frac{v}{d} \cdot dt \Rightarrow \Delta\theta \approx \frac{v}{d} \cdot \Delta t$$

$$\frac{dv}{dt} = a_{||} \Rightarrow dv = a_{||} \cdot dt \Rightarrow \Delta v \approx a_{||} \cdot \Delta t \stackrel{(\text{her})}{=} -g \sin \theta \cdot \Delta t$$

Dermed:

$$\theta(\Delta t) \approx \theta_0 + \frac{v_0}{d} \Delta t ; v(\Delta t) \approx v_0 - g \sin \theta_0 \cdot \Delta t$$

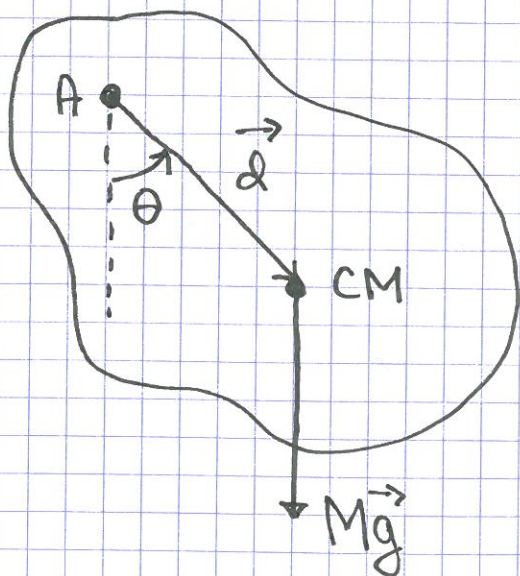
$$\theta(2\Delta t) \approx \theta(\Delta t) + \frac{v(\Delta t)}{d} \Delta t ; v(2\Delta t) \approx v(\Delta t) - g \sin \theta(\Delta t) \cdot \Delta t$$

osv. osv. [Eulermetoden]

09.10.14

Fysisk pendel

[YF 14.6 ; LL 9.6]



Stivt legeme. Masse M .
Kan svinge (friksjonsfritt) om
akse gjennom A. Tregkrets-
moment I mhp rot.aksen.

Med ~~A~~ som ref. punkt
(ref.akse) er CM i
posisjon d

Bestem svingeperioden T .

(Anta små utsving, $|\theta| \ll 1$)

Ytre krefter: $M\vec{g}$, og $\vec{F}_A$ = kraften fra akslingen på legemet. $\vec{F}_A$ er ukjent, både abs.verdi og retning. [Med matematisk pendel, s.73, er $\vec{F}_A$ lik snordraget, rettet langs snora/stanga, og dermed med null komponent normalt på snora/stanga, slik at kun tyngden bidrar langs sirkelbanen. Med fysisk pendel har $\vec{F}_A$ generelt komponenter både parallelt med $\vec{d}$ (se fig) og normalt på $\vec{d}$.]

Men: $\vec{F}_A$ har ingen arm relativt akse gjennom A, og dermed ikke noe dreiemoment mhp denne akse.

Da gir N2 for rotasjon (om fast akse gjennom A):

$$\tau = I \ddot{\theta} \quad \text{med} \quad \tau = -d \cdot Mg \cdot \sin \theta$$

[Fortegnet: $\vec{\tau} = \vec{d} \times M\vec{g}$ er rettet inn i planet, dvs tyngdens dreiemoment gir reduisert vinkelakselerasjon når vinkelen θ er ~~negativ~~ positiv, som i figuren.]

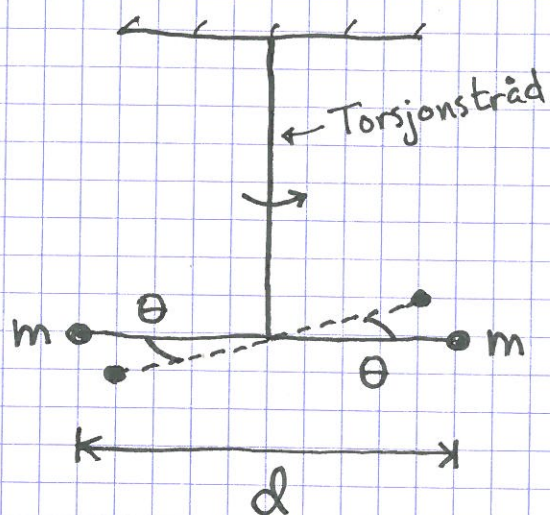
$$\Rightarrow -Mgd \sin \theta = I \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I} \theta = 0 \quad (|\theta| \ll 1)$$

Dvs: Harmonisk osc. med $\omega_0^2 = Mgd / I$

$$\Rightarrow T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{I / Mgd}$$

Steiners sats $\Rightarrow 2\pi \sqrt{(I_0 + Md^2) / Mgd}$ ($\rightarrow \infty$ når $d \rightarrow 0$, som ventet)

Torsjionspendel [YF 14.4 ; LL 9.6]



Hookes lov: $|\tau| \sim |\theta|$

Tråden motsetter seg vridning og virker på pendelen [her: stang med lengde d og to masser m i hver ende; treghetsmoment $I = 2 \cdot m \cdot (d/2)^2 = md^2/2$] med dreiemoment τ prop. med vridningen θ

$$\Rightarrow \tau = -D \cdot \theta \quad [\text{YF: } \mathcal{H} ; \text{ LL: } \Gamma]$$

$$\text{N2, rot. om trådens akse: } \tau = I \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -D \cdot \theta = I \cdot \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \quad \omega_0^2 = D/I$$

$$\Rightarrow \text{Svingeperiode: } T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{I/D}$$

[Lab: Cavendisheksperimentet]

D = torsjonskonstanten / torsjonsstivheten

$$[D] = [1/\tau] = \frac{1}{\text{N} \cdot \text{m}} = \frac{1}{\text{J}}$$