

(25)

20.09.21

Massecenter / Tyngdepunkt

= en form for massevektet middeposisjon, for

N punktmasser $m_1, m_2, \dots, m_N$ i posisjonene $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ evt. massedlementer dm (infinitesimale) i pos. $\vec{r}$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$\text{evt. } \vec{R}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

1D: tynn stang, snor etc

$$dm = \lambda \cdot dl$$

$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \text{masse pr lengdeenhet (kg/m)}$$

 dl = lengdeelement

2D: tynn plate etc

$$dm = \sigma \cdot dA$$

$$\sigma = dm/dA = \text{masse pr flateenhet (kg/m}^2\text{)}$$

 dA = flatelement

3D: kompakt kule, kloss etc

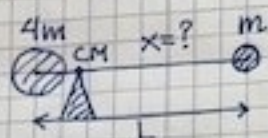
$$dm = \rho \cdot dV$$

$$\rho = dm/dV = \text{masse pr volumelement (kg/m}^3\text{)}$$

 dV = volumelement

2b) Eks. på beregning av massesenter.

Eks 1:



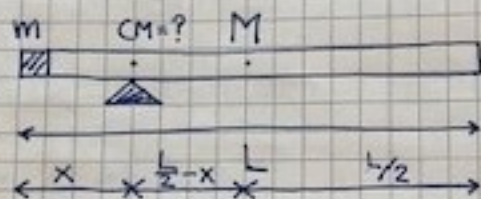
Anta f.eks. CM i $x=0$
og m i pos. x , dvs
 $4m$ i pos. $x-L$

$$\Rightarrow 0 = m \cdot x + 4m \cdot (x-L)$$

$$\Rightarrow 0 = 5mx - 4mL$$

$$\Rightarrow \underline{x = \frac{4}{5}L}$$

Eks 2: Uniform pinne/stang med "punktmasse" i enden



Pinnen med masse M har sitt CM på midten.

$$\Rightarrow m \cdot x = M \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)$$

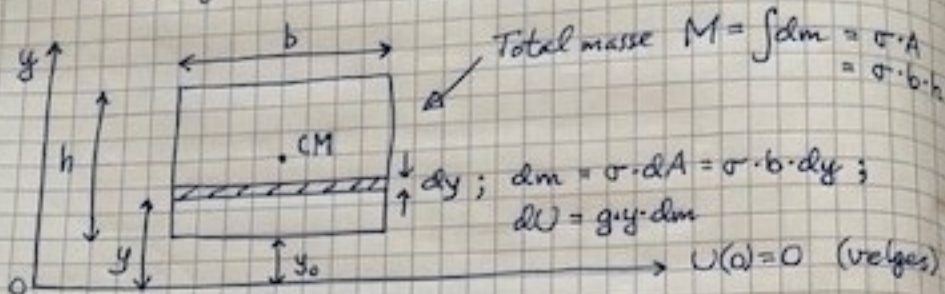
$$\Rightarrow x = \frac{M}{m} \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow \underline{x = \frac{ML/2}{m+M}}$$

Hvis $m=M$: $x = L/4$ (rimelig!)

Ser at legemet balanserer (i likevekt) på støtte rett under CM.

27) Pot. energi U i tyngdefeltet



$$U = \int dU = g \int y \cdot dm = \underline{g \cdot M \cdot Y_{cm}}$$

dvs samme som med hele M i høyden Y_{cm} .

$$\begin{aligned} \text{[Her: } U &= g \sigma b \int_{y_0}^{y_0+h} y \, dy = g \sigma b \left(\frac{1}{2} (y_0+h)^2 - \frac{1}{2} y_0^2 \right) \\ &= g \sigma b (y_0 h + \frac{1}{2} h^2) = g M (y_0 + \frac{1}{2} h) ; \text{ OK}] \end{aligned}$$

Newtons 2. lov for massesenterets bevegelse

$$\boxed{\vec{F} = M \cdot \vec{A}_{cm}}$$

$\vec{F}$ = netto ytre kraft på legemet

M = legemets masse

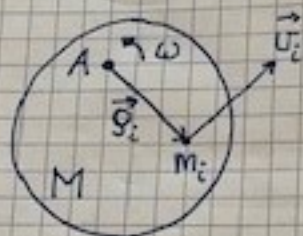
$\vec{A}_{cm} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{R}_{cm}$ = massesenterets akselerasjon

Dvs: CM beveger seg som om hele M var samlet i CM.

28) Rotasjon

Anta størt legeme som roterer om fast akse.

[F.eks. gjennom CM, men ikke nødvendigvis.]



A = rotasjonsakse, langs z-aksen

ω = vinkelhastighet

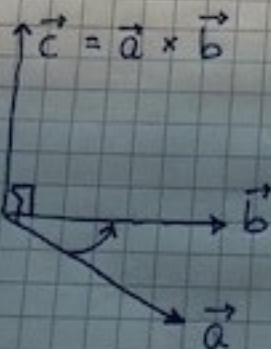
Fra før: $U_i = \omega g_i$

Vc lar vinkelhastigheten bli vektor langs rot. akse:

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \hat{z}$$

Ser da at $\vec{U}_i = \vec{\omega} \times \vec{g}_i$

Kryssprodukt:

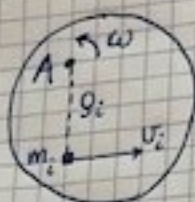


$$\vec{c} \perp \vec{a} \quad \text{og} \quad \vec{c} \perp \vec{b}$$

$$c = |\vec{c}| = a \cdot b \cdot \sin \varphi$$

Pren rotasjon om z-aksen: Vinkel mellom $\vec{\omega}$ og $\vec{g}_i$ er 90° , slik at $U_i = \omega \cdot g_i$.

(29) Rotasjonsenergi



$$\begin{aligned} K_{\text{rot}} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i r_i^2 \right\} \omega^2 \end{aligned}$$

Tregghetsmoment, mhp akse A:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Dermed:

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

For kontinuert massefordeling: $I = \int r^2 dm$

Generell bevegelse av stivt legeme er

- translasjon av CM (fart $\vec{V}$), og
- rotasjon om akse gjennom CM (vinkel fart $\vec{\omega}$)

Total kinetisk energi:

$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

I_0 = tregghetsmoment mhp akse gjennom CM