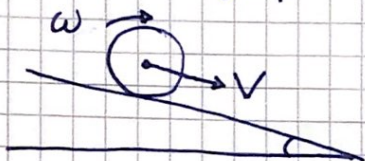


(42)

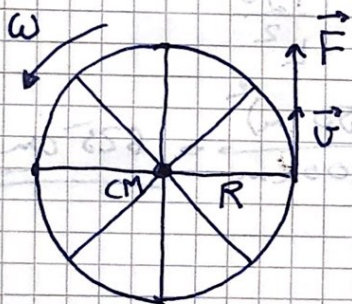
Onsdag 6/10 - 21

RotasjonsdynamikkFørst : Akse med fast orientering

F.eks. rulling på skråplan eller berg-og-dal-bane :

Aksen $\perp$ papirplanet hele tiden,
dvs fast orientering

Enkelt eksempel : Roterende hjul som gis en liten "dytt" på dekket, tangentielt til periferien.



Effekt tilført hjulet :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v = F \cdot R \cdot \omega$$

Den ytre kraftens dreiemoment :

$$\tau = F \cdot R$$

$$\text{Dermed : } P = \tau \cdot \omega$$

På den annen side :

$$P = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \right\} = \frac{1}{2} I_0 \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt} = I_0 \frac{d\omega}{dt} \cdot \omega$$

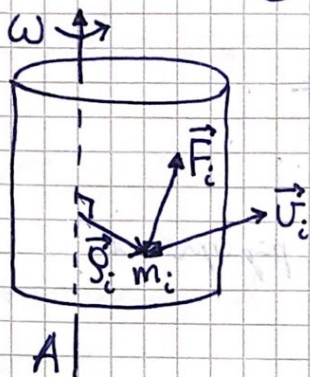
Sammenligning gir :

$$\tau = I_0 \dot{\omega}$$

(Jf. N2 for translasjon: $F = m\dot{v}$)N2 for rot. om akse med fast orientering (Her gjennom CM; derav I_0)

(43)

Generalisering:

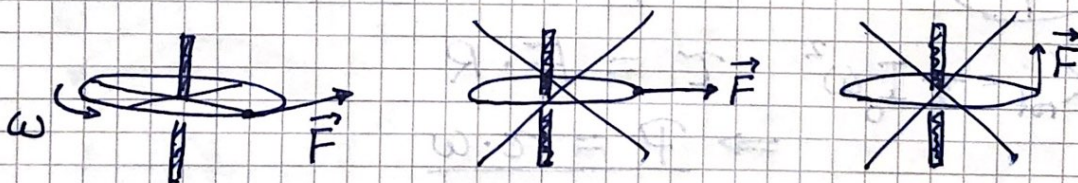


$$\begin{aligned}
 P &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{U}_i = \sum_i F_{ir} \cdot U_i \\
 &= \left\{ \sum_i F_{ir} \cdot r_i \right\} \cdot \omega \\
 &= \tau \cdot \omega
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tau = \sum_i F_{ir} r_i = \text{netto ytre dreiemoment mhp aksen A}$$

F_{ir} = komponenten av $\vec{F}_i$ langs $\vec{U}_i$

Tenk på hjulet: Må bruke kraft $\vec{F}$ tangentielt med dekket, og normalt på akslingen, for å sette det i rotasjon:



Dreiemomentet gjør et arbeid på legemet:

$$P = \tau \cdot \omega = \tau \cdot \frac{d\phi}{dt} \quad \text{og} \quad P = \frac{dW}{dt}$$

Sammenligning gir:

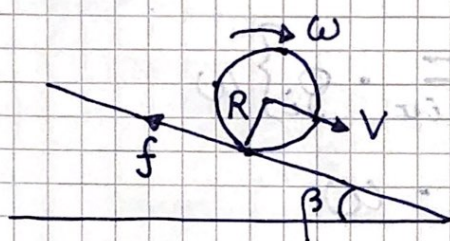
$$\boxed{dW = \tau \cdot d\phi}$$

$d\phi$ = omløpt vinkel

(Jf. arbeid ved translasjon: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$)

44

Eks 1: Ren rulling på skråplan



$$I_o = c \cdot MR^2$$

$$\omega = V/R; \quad \dot{\omega} = \dot{V}/R$$

N2 || skråplanet: $Mg \sin \beta = f = M\dot{V}$

N2 rot. om CM: $\tau = I_o \dot{\omega}$

Bare $\vec{f}$ har en arm mhp aksen gjennom CM; kreftene $\vec{N}$ og $M\vec{g}$ går (eller: har forlengelseslinje) gjennom CM, og har dermed null arm.

$$\Rightarrow \tau = f \cdot R, \quad \text{slik at: } f \cdot R = c \cdot MR^2 \cdot \dot{V}/R$$

$$\Rightarrow f = c \cdot M \cdot \dot{V}$$

Vi setter inn dette for f i "N2, ||" og får

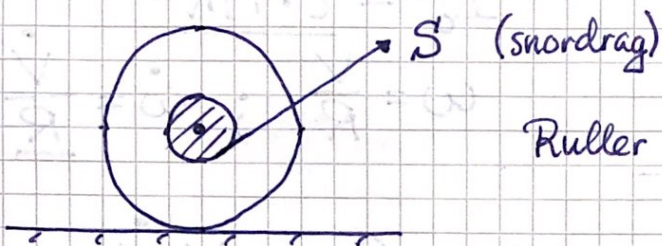
$$Mg \sin \beta - c M \dot{V} = M\dot{V}$$

$$\Rightarrow (1+c)\dot{V} = g \sin \beta$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\dot{V} = \frac{g \sin \beta}{1+c}}}$$

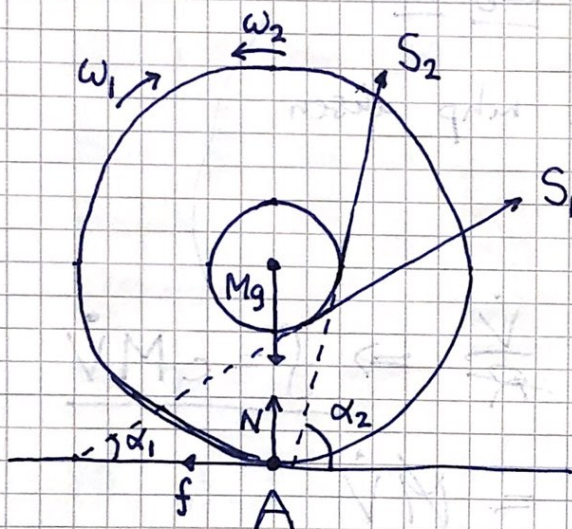
dvs det samme som vi fant med utgangspunkt i energibevarelse.

45) Eks 2 : Trådsnelle



Ruller snella mot høyre eller venstre?

Vi velger kontaktlinja som akse A :

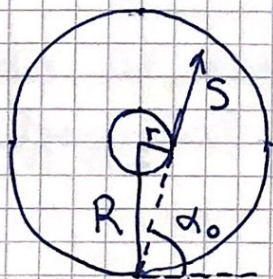


Mg , N og f har null arm mhp akse A.

Hvis forlengelsen av S går til venstre for A, virker dreiemomentet til S slik at snella roterer med klokka
 $\Rightarrow$ Ruller mot høyre med kraft S_1 og vinkel α_1

Og omvendt : S_2 gir rotasjon mot klokka og rulling mot venstre

Og hvis forlengelsen av S går akkurat gjennom A, blir det null dreiemoment, og snella ligger i ro.

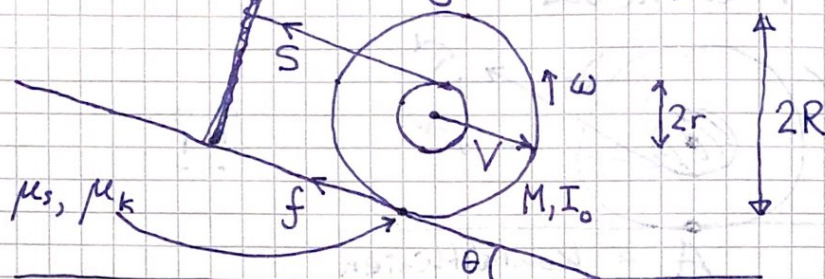


$$\underline{\underline{\cos \alpha_0 = r/R}}$$

46

Eks 3: Baklengssnelle på skråplan

08.10.21



$$I_0 = c \cdot MR^2$$

- a) Ved hvilken hellingvinkel θ_0 begynner snella å "slure" nedover?
 b) Hvis $\theta > \theta_0$, hva blir snordraget S og akselerasjonen $\dot{V}$?

- a) Friksjonen f hindrer snella å slure nedover. Max vinkel θ_0 må tilsvare at $f = f_{\max} = \mu_s \cdot N$.

$$\begin{array}{l} \text{N1 || skråplanet: } Mg \sin \theta_0 - \mu_s N - S = 0 \\ \text{N1 } \perp \text{ " : } Mg \cos \theta_0 - N = 0 \\ \text{N1 rot. om CM: } S \cdot r - \mu_s N \cdot R = 0 \end{array} \left. \begin{array}{l} 4 \text{ lign. og} \\ 4 \text{ ukjente:} \\ f, N, S, \theta_0 \end{array} \right\}$$

$$S = \mu_s NR/r \Rightarrow Mg \sin \theta_0 = \mu_s N (1 + R/r)$$

$$\text{og } Mg \cos \theta_0 = N$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\tan \theta_0 = \mu_s (1 + R/r)}}$$

- b) Nå er $f = \mu_k N = \mu_k Mg \cos \theta$ (N1 $\perp$ skråplanet)

$$\text{N2 || skråplanet: } Mg \sin \theta - \mu_k Mg \cos \theta - S = M \dot{V}$$

$$\text{N2 rot. om CM: } Sr - \mu_k MgR \cos \theta = I_0 \dot{\omega} = I_0 \dot{V}/r$$

Merk at $V = \omega r$ og $\dot{V} = \dot{\omega} r$: En omdreining vikler av en lengde $2\pi r$ av snora, som blir forflytningen av CM når omlopt vinkel er 2π .

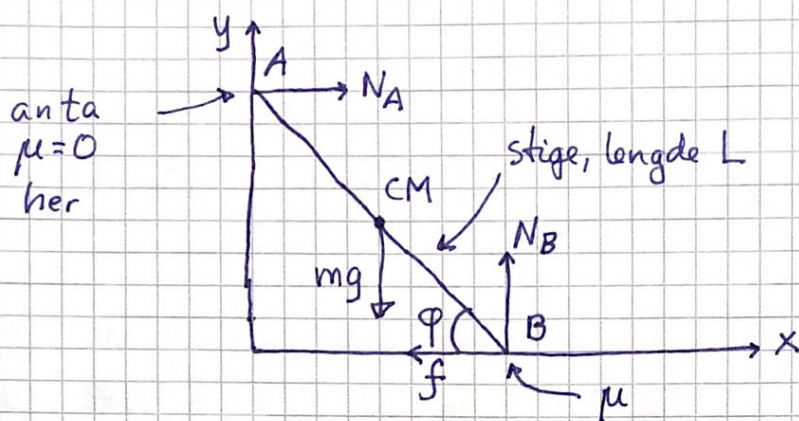
$$\text{N2 rot om CM gir } S = (cMR^2/r^2) \dot{V} + (\mu_k MgR/r) \cos \theta, \text{ som innsatt i}$$

$$\text{N2 || skråplanet gir } Mg (\sin \theta - \mu_k \cos \theta - \mu_k \frac{R}{r} \cos \theta) = M \dot{V} (1 + cR^2/r^2)$$

$$\text{som gir } \dot{V} = g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta \cdot (1 + R/r)) / (1 + cR^2/r^2)$$

$$\text{og } S = \mu_k Mg \cos \theta \cdot \left(\frac{1 + R/r}{1 + cR^2/r^2} - 1 \right)$$

47 Eks 4 : Stige mot glatt vegg



Hvor stor må φ minst være for at stigen ikke skal gli?

- Stigen står i ro hvis $\sum F_x = \sum F_y = \sum \tau = 0$
- Statisk friksjon i B : $f \leq \mu \cdot N_B$
- Minste mulige φ må tilsvare $f = f_{\max} = \mu N_B$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f = N_A \Rightarrow \mu N_B = N_A$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_B = mg$$

Velger akse $\perp$ papirplanet i B :

$$\sum \tau_B = 0 \Rightarrow mg \frac{L}{2} \cos \varphi - N_A L \sin \varphi = 0$$

$$N_A = \mu N_B = \mu mg$$

$$\Rightarrow mg \frac{L}{2} \cos \varphi = \mu mg L \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \tan \varphi = \frac{1}{2\mu} ; \underline{\varphi_{\min} = \arctan \left(\frac{1}{2\mu} \right)}$$

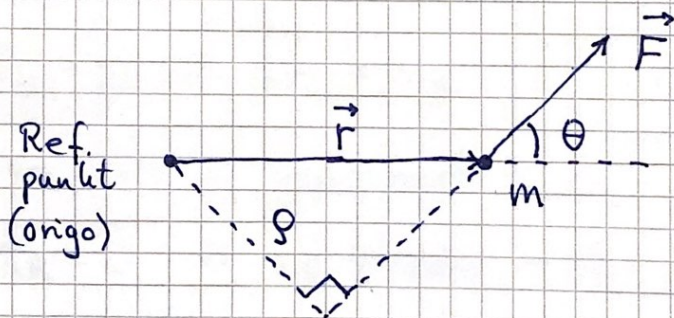
(48)

Tredimensjonal rotasjonsdynamikk

Når aksen har fast orientering, er beskrivelsen på sett og vis endimensjonal.

En generell beskrivelse innebærer at dreiemomentet er en vektor $\vec{\tau}$, og vi får behov for en ny fysisk størrelse, dreieimpulsen $\vec{L}$.

Både $\vec{\tau}$ og $\vec{L}$ må beregnes relativt et (fritt valgt!) referansepunkt, som vi for enkelhets skyld plasserer i origo.

Dreiemoment $\vec{\tau}$ 

Kraftens dreiemoment på m :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Absoluttverdi: $\tau = |\vec{\tau}| = r \cdot F \cdot \sin \theta = \rho \cdot F$

$\rho = r \cdot \sin \theta$ = kraftens arm =
avstand fra ref pkt. til
kraftens forlengelseslinje

Retning: $\vec{\tau} \perp \vec{r}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{F}$

(49)

Høyrehåndsregel (HHR) for kryssproduktet:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

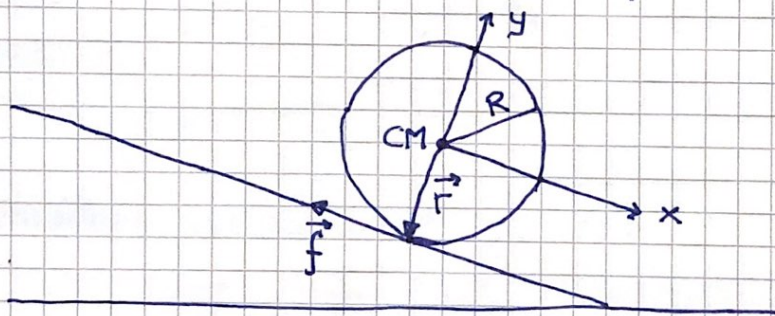
- 4 fingre langs $\vec{a}$
- Disse bøyes til de peker langs $\vec{b}$
- Da peker tommelen langs $\vec{c}$

I fig. forrige side: $\vec{\tau}$ ut av planetMed flere ytre krefter $\vec{F}_i$ på et stivt legeme:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

= netto dreiemoment på legemet

Eks 1: Rullende kule på skråplan



Med CM som ref.pkt.:

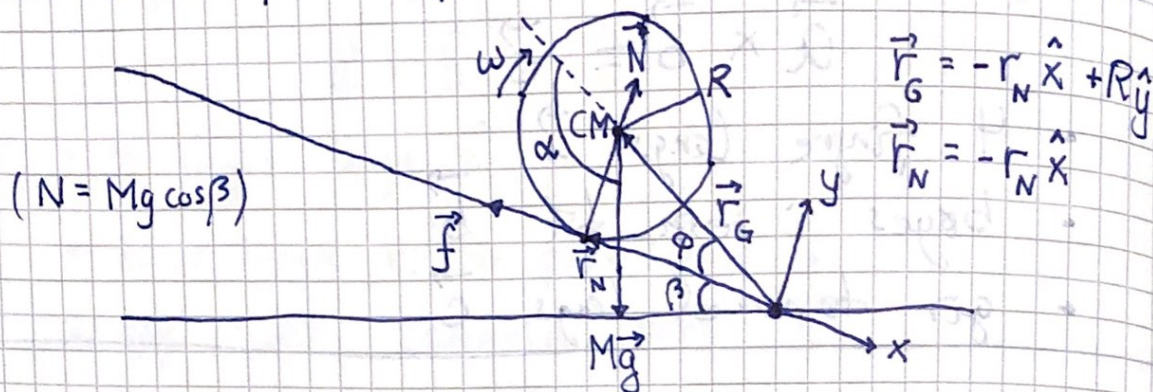
$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{r} \times \vec{f} = (-R \hat{y}) \times (-f \hat{x}) \\ &= Rf (\hat{y} \times \hat{x}) = \underline{\underline{-Rf \hat{z}}} \end{aligned}$$

HHR gir $\vec{\tau}$ inn i planet.

Her flytter ref.punktet seg.

(50)

Med fast ref.pkt., f.eks. nederst på skråplanet:



$$(N = Mg \cos \beta)$$

Nå har $\vec{f}$ null dreiemoment, siden $\vec{r}_f$ er parallell med $\vec{f}$ ($\tau_f = |\vec{r}_f \times \vec{f}| = r_f \cdot f \cdot \sin 0 = 0$)

Men nå har både $\vec{N}$ og $M\vec{g}$ dreiemoment:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_N &= \vec{r}_N \times \vec{N} = (-r_N \hat{x}) \times (N \hat{y}) = -r_N N \hat{z} \\ &\text{(dus inn i planet)} = -r_N Mg \cos \beta \cdot \hat{z} \end{aligned}$$

Denne kanselleres av dreiemomentet til tyngdens komponent $\perp$ skråplanet:

$$(-r_N \hat{x} + R \hat{y}) \times (-Mg \cos \beta \hat{y}) = r_N Mg \cos \beta \hat{z}$$

Netto dreiemoment skyldes dermed kun tyngdens komponent $\parallel$ skråplanet:

$$\vec{\tau} = (-r_N \hat{x} + R \hat{y}) \times (Mg \sin \beta \hat{x}) = \underline{\underline{-RMg \sin \beta \hat{z}}}$$

HHR for $\vec{\tau}$ og "dreieretning":

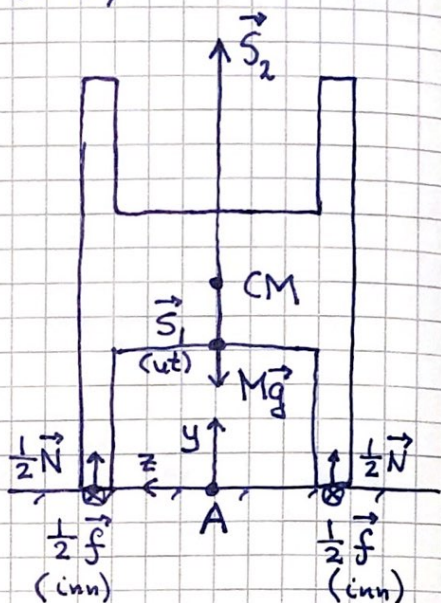
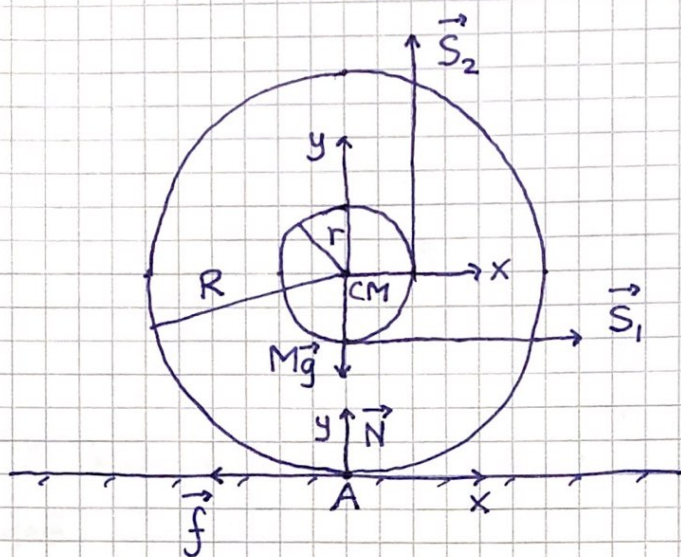
- La tommelen peke langs $\vec{\tau}$
- De 4 andre fingrene bøyes, og peker da ut dreieretningen

$\Rightarrow \vec{\tau}_G$ ønsker/prøver å dreie mot klokka; $\vec{\tau}_N$ med klokka

(51)

Eks 2: Trådsnella

(se s. 45)



Med A som ref.pkt:

$$\vec{\tau}_G = 0 \quad (\vec{r}_G = R\hat{y}; \quad M\vec{g} = -Mg\hat{y} \Rightarrow \theta_G = \pi)$$

$$\vec{\tau}_N = 0 \quad (\text{de to kreftene } \frac{1}{2}\vec{N} \text{ gir like store men motsatt rettede bidrag, hvor inn i og ut av planet})$$

$$\vec{\tau}_f = 0 \quad (\text{de to } \frac{1}{2}\vec{f} \text{ gir dreiemoment hvor opp og ned})$$

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_1 &= \vec{r}_1 \times \vec{S}_1 = (R-r)\hat{y} \times S_1\hat{x} \\ &= (R-r) \cdot S_1 \cdot (-\hat{z}) \quad (\text{inn}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_2 &= \vec{r}_2 \times \vec{S}_2 = [r\hat{x} + R\hat{y}] \times S_2\hat{y} \\ &= r\hat{x} \times S_2\hat{y} = rS_2\hat{z} \quad (\text{ut}) \end{aligned}$$

 τ_1 prøver å dreie snella med klokka τ_2 ——— " ——— mot ———