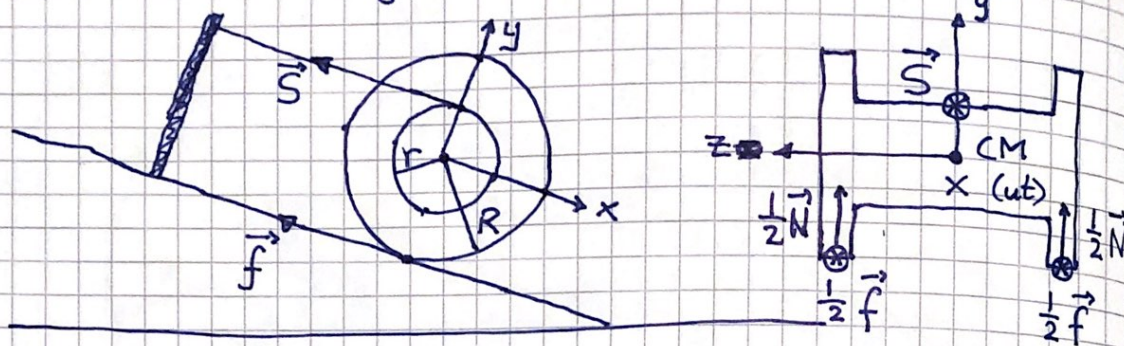


(52)

Eks 3: Baklengssnella



Med CM som ref. pkt:

$$\vec{r}_s = r \hat{y}, \quad \vec{S} = -S \hat{x} \Rightarrow \vec{\tau}_s = (r \hat{y}) \times (-S \hat{x}) = r S \hat{z}$$

$$\vec{r}_f = \pm \frac{b}{2} \hat{z} - R \hat{y}, \quad \vec{f} = 2 \cdot \frac{1}{2} \vec{f} = 2 \cdot \frac{1}{2} f \cdot (-\hat{x})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{\tau}_f &= \left(\frac{b}{2} \hat{z} - R \hat{y} \right) \times \left(-\frac{1}{2} f \hat{x} \right) + \left(-\frac{b}{2} \hat{z} - R \hat{y} \right) \times \left(-\frac{1}{2} f \hat{x} \right) \\ &= R f \hat{y} \times \hat{x} = \underline{-R f \hat{z}} \end{aligned}$$

Totalt ytre dreiemoment på snella:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_s + \vec{\tau}_f = (r S - R f) \hat{z}$$

Hva med $M\vec{g}$ og $\vec{N}$?

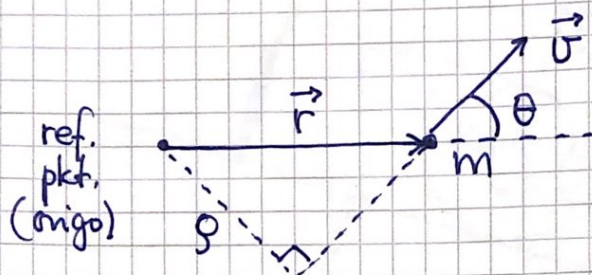
$$\vec{\tau}_G = 0 \quad \text{da} \quad \vec{r}_G = 0 \quad (M\vec{g} \text{ angriper i CM})$$

$$\vec{r}_N = \vec{r}_f = \pm \frac{b}{2} \hat{z} - R \hat{y}, \quad \vec{N} = 2 \cdot \frac{1}{2} \vec{N} = 2 \cdot \frac{1}{2} N \cdot \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_N = \left(\frac{b}{2} \hat{z} - R \hat{y} \right) \times \frac{N}{2} \hat{y} + \left(-\frac{b}{2} \hat{z} - R \hat{y} \right) \times \frac{N}{2} \hat{y} = 0$$

$$(\text{da } \hat{y} \times \hat{y} = 0)$$

(53)

Dreieimpuls

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

= massens impuls

Massens dreieimpuls:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Absoluttverdi: $L = r \cdot p \cdot \sin \theta = g \cdot p$

Retning: $\vec{L} \perp \vec{r}$ og $\vec{L} \perp \vec{p}$

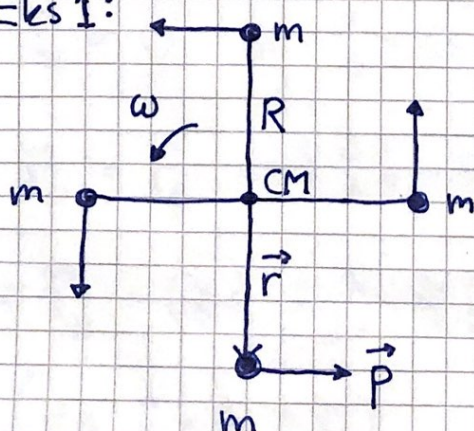
For system med flere masser:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

og med kontinuerlig massefordeling:

$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times d\vec{p} = \int \vec{r} \times \vec{v} \cdot dm$$

Eks 1:



(Stenger med neglisjerbar masse.)

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^4 \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

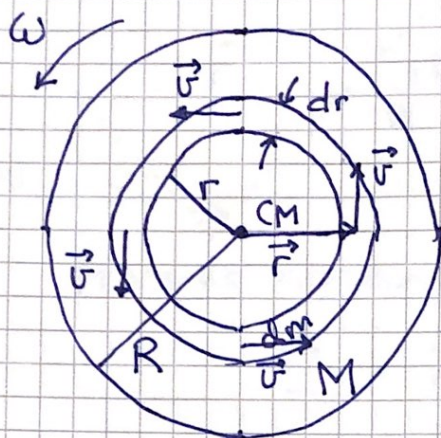
Alle 4 $\vec{L}_i$ peker ut av planet.
 $p_i = mv = m\omega R$; $r_i = R$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = 4mR^2 \omega}}$$

Samtidig er $I_o = 4mR^2$, slik at
 $L = I_o \omega$ og $\vec{L} = I_o \vec{\omega}$

54

Eks 2: Slipestein



Tynn ring med radius r ,
tykkelse dr , fart $v = \omega r$
og masse $dm = M \cdot 2\pi r dr / \pi R^2$
har dreieimpuls $d\vec{L}$ ut av
planet, med absoluttverdi

$$dL = r v dm$$

$$= r \omega r M 2\pi r dr / \pi R^2$$

Da er total dreieimpuls $\vec{L}$ ut av planet, med

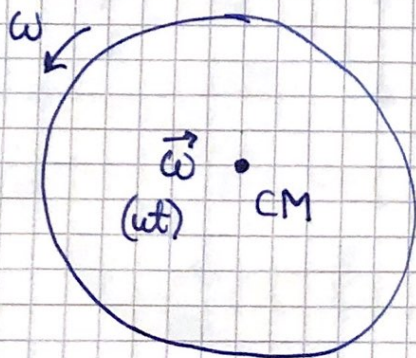
$$L = |\vec{L}| = \int dL = \frac{2M\omega}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} MR^2 \omega$$

ders $L = I_0 \omega$ og $\vec{L} = I_0 \vec{\omega}$

Mer generelt, for et stivt legeme som roterer
om en z -akse gjennom CM:

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm = \int r \omega \hat{z} dm$$

$$= \left(\int r^2 dm \right) \omega \hat{z} = \underline{I_0 \vec{\omega}}$$

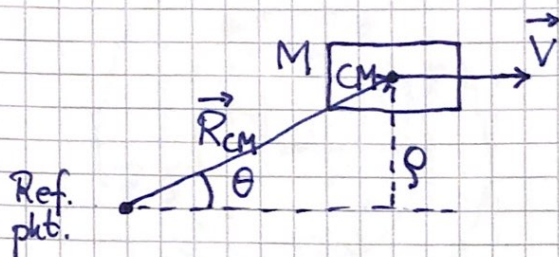


$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$$

55

Banedreieimpuls

Kan ha dreieimpuls uten at noe egentlig roterer:



$$\vec{L} = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} ; \text{ retning inn i planet}$$

$$L = R_{CM} \cdot MV \cdot \sin\theta = \underline{g \cdot MV}$$

$\vec{L}$ knyttet til translasjon av CM kalles banedreieimpuls.

Legg merke til at $\vec{L}$ ikke endrer seg ovenfor dersom $\vec{V}$ er konstant. R_{CM} øker, men θ blir mindre, og slik at lengden

$$g = R_{CM} \sin\theta$$

er konstant.

(56)

Total dreieimpuls for et stivt legeme

For "noenlunde symmetriske" (*) legemer er

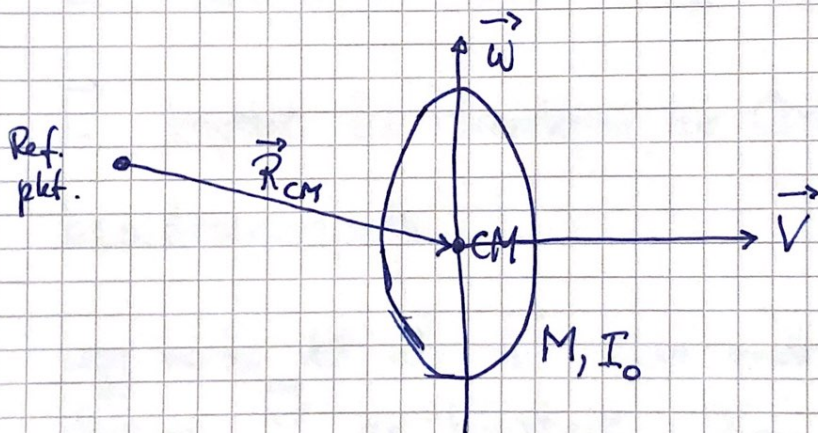
$$\vec{L} = \vec{L}_s + \vec{L}_b$$

med indre dreieimpuls (spinn) pga rotasjon om CM,

$$\vec{L}_s = I_o \vec{\omega}$$

og banedreieimpuls pga translasjon av CM,

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M \vec{V}$$



(*) Rotasjonsaksen må være en såkalt 2-tallig rotasjonsakse, dvs legemet ser uendret ut etter en rotasjon på 180° .

(57)

Newton's 2. lov for rotasjon

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Bevis:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \underbrace{\vec{v} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}\end{aligned}$$

Her er:

 $\vec{\tau}$ = netto ytre dreiemoment på legemet $\vec{L}$ = legemets totale dreieimpulsIf. N2 for translasjon: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ med $\vec{F}$ = netto ytre kraft på legemet $\vec{p}$ = legemets impulsKriterier for statisk likevekt

Et stivt legeme forblir i ro, med $\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$, bare dersom netto ytre kraft $\vec{F}$ og netto ytre dreiemoment $\vec{\tau}$ begge er lik null.

(58)

Bevaringslover

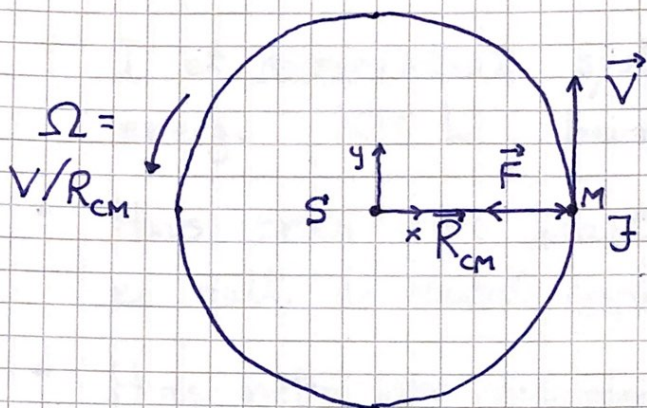
- I et isolert system (dvs ingen ytre krefter) er total energi, total impuls og total dreieimpuls bevart.
- I et konservativt system er total mekanisk energi $K + U$ bevart.
- Hvis netto ytre kraft $\vec{F}$ på et system er null, er total impuls $\vec{p}$ bevart.
- Hvis netto ytre dreiemoment $\vec{\tau}$ på et system er null, er total dreieimpuls $\vec{L}$ bevart.

59

Eksempler, rotasjonsdynamikk

Eks 1: Jordklodens dreieimpuls

Antar sirkelbane, med sola i origo.



$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{\tau} = \vec{R}_{CM} \times \vec{F} = 0$$

$\Rightarrow \vec{L}$ er konstant

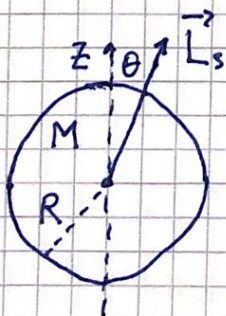
Banedreieimpuls:

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M \vec{V} = R_{CM} M V \hat{z} = R_{CM}^2 M \Omega \hat{z}$$

$$R_{CM} \approx 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}, \quad M \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad \Omega = \frac{2\pi}{3600 \cdot 24 \cdot 365 \text{ s}}$$

$$\Rightarrow L_b \approx 3 \cdot 10^{40} \text{ Js}$$

Indre dreieimpuls (spinn):



$$\theta \approx 23.5^\circ$$

$$\vec{L}_s = I_o \vec{\omega}$$

$$I_o \approx \frac{1}{3} M R^2$$

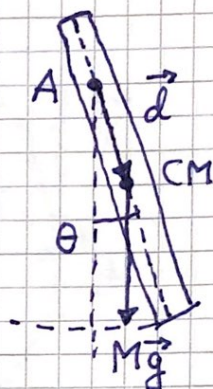
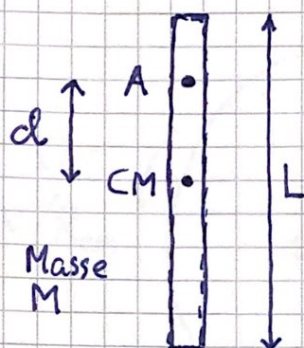
$$R \approx 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad \omega = \frac{2\pi}{3600 \cdot 24 \text{ s}}$$

$$\Rightarrow L_s \approx 6 \cdot 10^{33} \text{ Js}; \quad \text{dvs } L_s \ll L_b; \quad \text{dvs } L \approx L_b$$

60

Eks 2: Fysisk pendel

Hva blir svingetida (perioden) for f.eks. ei tynn stang som er hengt opp i tyngdefeltet?



A = fast rot.akse $\perp$ papirplanet

N2 for rot. om A: $\tau_A = I_A \frac{d\omega}{dt} = I_A \frac{d^2\theta}{dt^2}$

$\vec{\tau}_A = \vec{d} \times M\vec{g}$; vektor inn i planet når stangas utsving er som i figuren ($\theta > 0$); ut av planet for utsving mot venstre ($\theta < 0$)

$$\tau_A = -|\vec{\tau}_A| = -d \cdot Mg \cdot \sin \theta$$

(fordi $\vec{\tau}_A$ har samme retning som $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$)

$$\Rightarrow -Mgd \sin \theta = I_A \ddot{\theta}$$

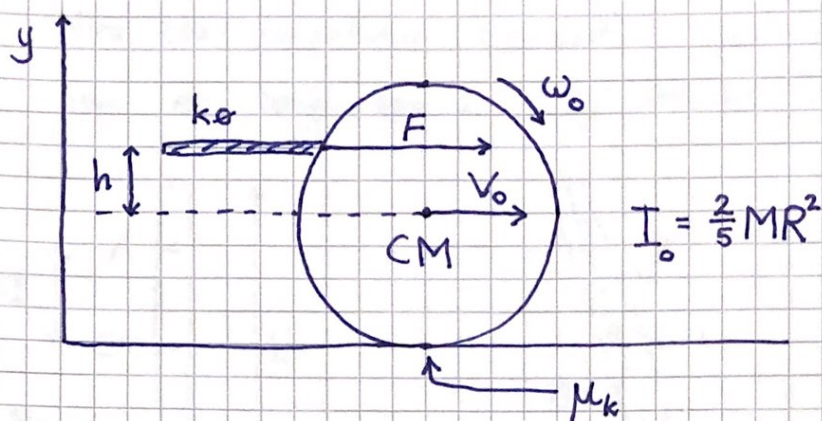
$$I_A = \frac{1}{12} ML^2 + Md^2 \quad (\text{Steiners sats})$$

Anta små utsving, slik at $\sin \theta \approx \theta$:

$$I_A \ddot{\theta} + Mgd \cdot \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I_A} \theta = 0$$

Enkel harmonisk oscillator, med vinkelfrekvens $\sqrt{Mgd/I_A}$ og periode $T = 2\pi \cdot \sqrt{I_A/Mgd} = 2\pi \sqrt{(L^2/12 + d^2)/gd}$

⑥ Eks 3: Snooker



Anta stor kraft F i kortvarig støt (varighet Δt), horisontalt og sentralt, i høyde h over linja gjennom CM. Hvilken h -verdi gir ren rulling umiddelbart?

Ren rulling: $V_0 = \omega_0 R$

N2, translasjon: $F = \Delta p / \Delta t \Rightarrow F \cdot \Delta t = M V_0$

(Vi kan neglisjere friksjonskraften f i løpet av støtet fordi $F \gg f$.)

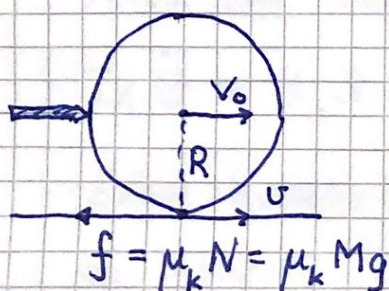
N2, rot. om CM: $\tau = \Delta L / \Delta t \Rightarrow F \cdot h \cdot \Delta t = \Delta L = I_0 \omega_0$

Kombinasjon av disse to gir $h = \frac{\frac{2}{5}MR^2 \omega_0}{M \omega_0 R} = \underline{\underline{\frac{2}{5}R}}$

$h > \frac{2}{5}R \Rightarrow \omega_0 > V_0/R \Rightarrow$ toppspinn

$h < \frac{2}{5}R \Rightarrow \omega_0 < V_0/R \Rightarrow$ underskru

Hvis underskru; f.eks. $h=0 \Rightarrow \omega_0=0$



N2, trans: $A = f / M$

N2, rot. om CM: $\dot{\omega} = f \cdot R / I_0$

$\Rightarrow$ ren rulling etter hvert

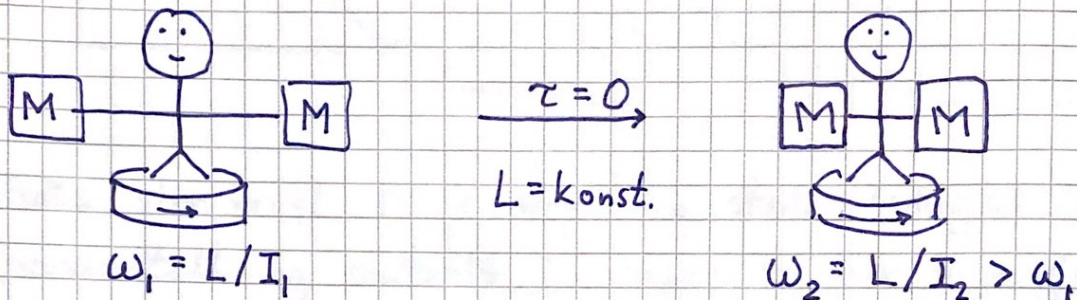
(62)

Eks 4 : Piruett

Prinsipp: $\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{L}} = 0$

$$\Rightarrow L = I\omega = \text{konstant}$$

Hvis I reduseres, øker ω



Kinetisk energi:

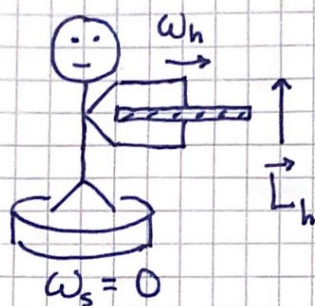
$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} L \omega_1$$

$$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} L \omega_2 > K_1$$

Armmusklene gjør arbeid på de to massene og gir økt rotasjonsenergi.

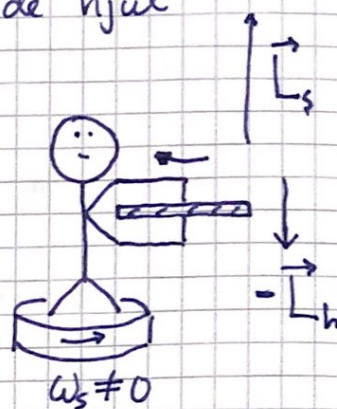
(63)

Eks 5: Person med roterende hjul



$$\vec{L} = \vec{L}_h$$

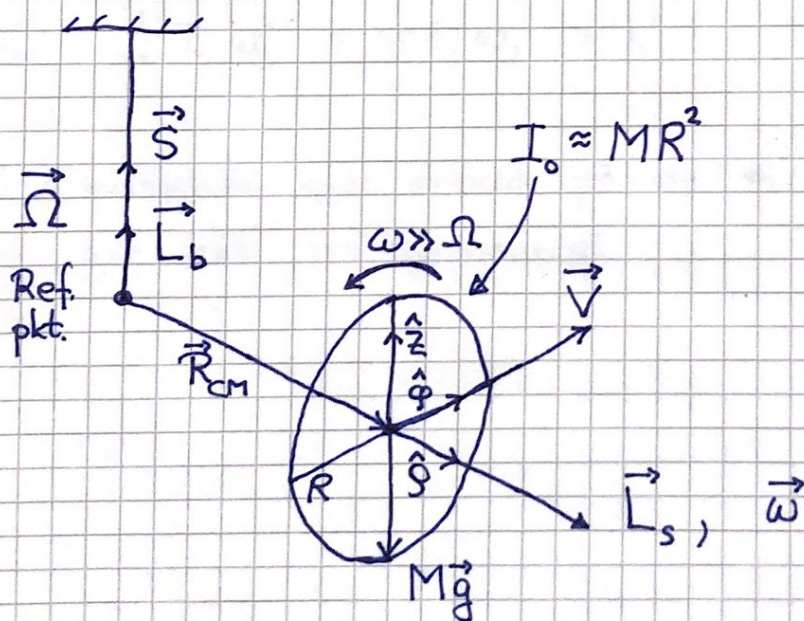
Snur hjulet
 $\vec{\tau}_{\text{ytre}} = 0$
 $\vec{L} = \text{konst.}$



$$\vec{L} = \vec{L}_s - \vec{L}_h$$

$$\Rightarrow \vec{L}_s = 2\vec{L}_h ; \omega_s \neq 0$$

Eks 6: Presesjon



Tallverdier: $M = 5 \text{ kg}$, $R = 30 \text{ cm}$, $R_{cm} = 20 \text{ cm}$

Finn sammenhengen mellom ω og Ω .

64

Bruker N_2 for rotasjon, med ref.pkt. der snora er festet i hjulets aksling.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} ; \quad \vec{L} = \vec{L}_s + \vec{L}_b$$

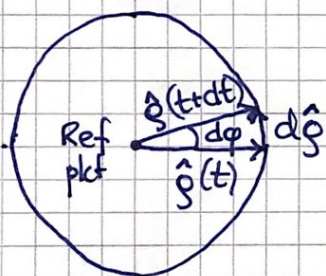
$$\vec{L}_b = \vec{R}_{cm} \times M\vec{V} = R_{cm} M V \hat{z} = R_{cm}^2 M \Omega \hat{z}$$

$$\vec{L}_s = I_o \vec{\omega} = MR^2 \omega \hat{\phi}$$

$$\omega \gg \Omega \Rightarrow L_s \gg L_b \Rightarrow \vec{L} \approx \vec{L}_s$$

$$\vec{\tau} = \vec{R}_{cm} \times M\vec{g} = R_{cm} M g \hat{\phi}$$

$$\dot{\vec{L}} = MR^2 \omega \frac{d\hat{\phi}}{dt}$$



$\hat{g}$ roterer om z-aksen med vinkelfart Ω . Fra figuren har vi

$$d\hat{g} = \underbrace{|\hat{g}| \cdot d\phi}_{= \text{buelengden}} \cdot \hat{\phi} = 1 \cdot d\phi \cdot \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{g}}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \hat{\phi} = \Omega \hat{\phi}$$

Dermed: $R_{cm} M g = MR^2 \omega \Omega$

$$\Rightarrow \underline{\omega \cdot \Omega = R_{cm} g / R^2}$$

$$(\text{evt. } T_\omega \cdot T_\Omega = 4\pi^2 R^2 / R_{cm} g)$$

Med $R = 0.3 \text{ m}$, $R_{cm} = 0.2 \text{ m}$ og $g \approx 10 \text{ m/s}^2$:

$$T_\omega \cdot T_\Omega = (2\pi \cdot 0.3)^2 / (0.2 \cdot 10) \text{ s}^2 \approx 2 \text{ s}^2$$