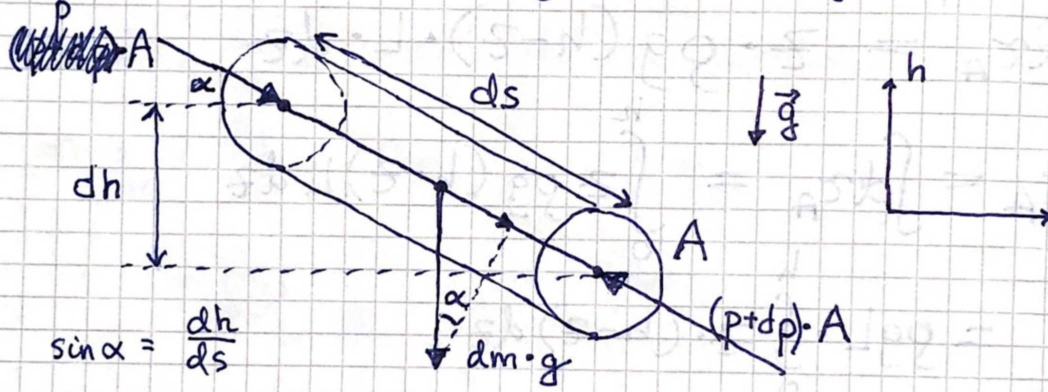
(82) 08.11.21

Bernoullis lov (1738)

Beskriver sammenhengen mellom trykk p, hastighet v og høyde h langs en strømlinje i en ideell væske (dvs: inkompressibel og ikke-viskøs).

Følger direkte fra Newtons 2. lov, eventuelt fra energibetraktninger. Det er som kjent to sider av samme sak! Her skal vi utlede Bernoullis lov med begge metoder.

1) Newtons 2. lov langs en strømlinje



$\sin\alpha = \frac{dh}{ds}$

Ser på et lite (infinitesimalt) væskevolum

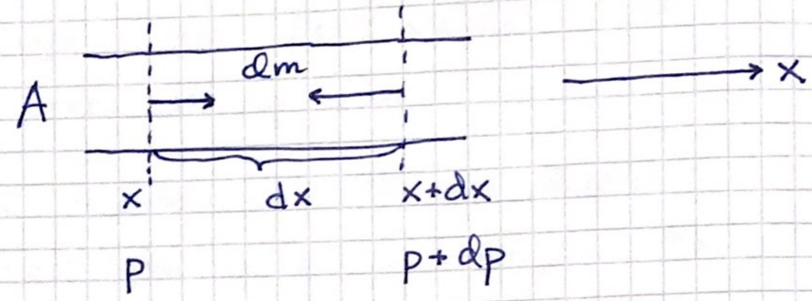
$dV = ds \cdot A$ (masse $dm = \rho \cdot ds \cdot A$)

omkring en strømlinje som danner en vinkel α med horisontalen. Krefter langs strømlinjen er:

- tyngdekraftens komponent $-dm \cdot g \cdot \sin\alpha = -\rho g\, dh \cdot A$
- netto trykk-kraft fra ~~det~~ den omgivende væsken
$-(p+dp)\cdot A + p \cdot A = -dp \cdot A$

Kreftenes fortegn:

Trykk-kreftene: Anta $\alpha = 0$, dvs horisontal strømlinje.
Da er dette eneste bidrag.



Hvis $dp > 0$: Nettokraft mot venstre, dvs i negativ x-retning, dvs $a = dv/dt < 0$

$\Rightarrow$ N2 må bli $\quad -dp \cdot A = dm \cdot dv/dt$

Med $dm = \rho\, dV = \rho \cdot dx \cdot A$ får vi

$$-dp \cdot A = \frac{\rho \cdot dx \cdot A \cdot dv}{dt}$$

dvs $\quad -dp = \rho \cdot v \cdot dv$

Tyngdekraften: Når h angir høyden i tyngdefeltet, er $dh > 0$ oppover og $dh < 0$ nedover.
Derfor negativt fortegn og

$$-\rho g \cdot dh \cdot A$$

som uttrykk for tyngdekraftens komponent langs strømlinjen. I figuren s. 82:
Hvis vi velger positiv retning langs strømlinjen på skrå nedover mot høyre, er $dh < 0$. Da blir $-\rho g\, dh\, A$ en positiv kraft, som stemmer.

Alt i alt blir N2 for væskeelementet:

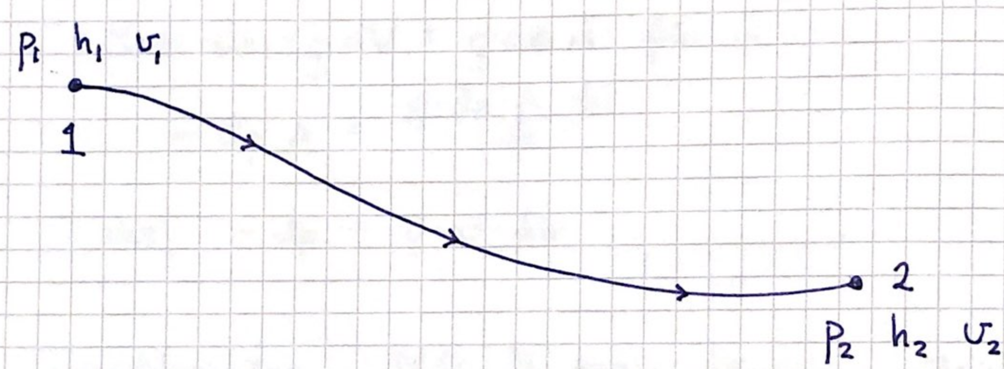
$$-dp \cdot A - \rho g\, dh \cdot A = dm \cdot a = \rho \cdot ds \cdot A \cdot \frac{dv}{dt}$$
$$= \rho \cdot v \cdot dv \cdot A$$

$$\Rightarrow \quad -dp - \rho g\, dh = \rho v\, dv$$

$$\Rightarrow \quad dp + \rho g\, dh + \rho v\, dv = 0$$

som er Bernoullis lov på "differensiell form", dvs for et infinitesimalt væskevolum.

Dette lille væskevolumet vil følge den aktuelle strømlinjen, ved laminær strømning:



Da må trykk, høyde og hastighet hele veien endre seg i samsvar med dette, og <u>total</u> endring i p, h og v fra posisjon 1 til 2 må oppfylle

$$\int_{p_1}^{p_2} dp + \rho g \int_{h_1}^{h_2} dh + \rho \int_{v_1}^{v_2} v\, dv = 0$$

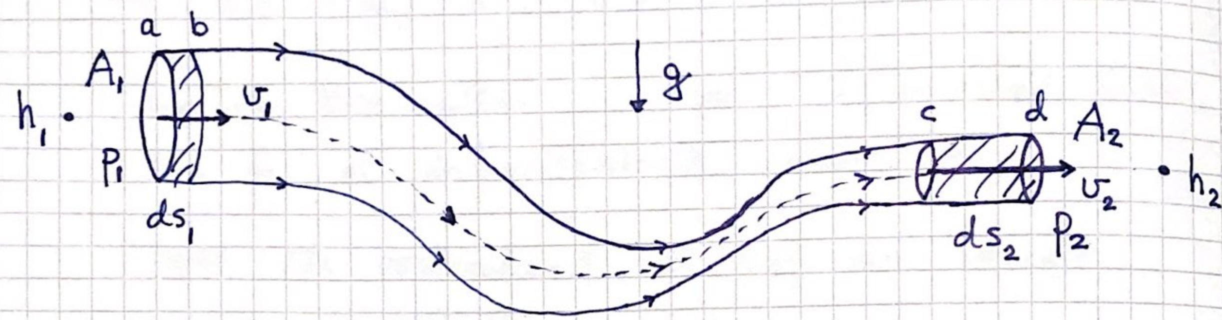
dvs $\quad p_2 - p_1 + \rho g (h_2 - h_1) + \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2) = 0$

dvs $\quad p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2$

Med andre ord, kombinasjonen

$$\left.\begin{array}{c} p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 \\ \text{er konstant langs en strømlinje} \end{array}\right\} \underline{\text{Bernoullis lov}}$$

2) Energibevarelse langs en strømlinje



Vi følger en gitt væskemasse, avgrenset av en "strømlinjebunt", som ved tid t fyller volumet mellom a og c, og som ved tid $t + dt$ fyller volumet mellom b og d. Strømningsfarten ved posisjon 1 er $v_1 = ds_1/dt$, og ved posisjon 2 er den $v_2 = ds_2/dt$. Kontinuitetsligningen (dvs massebevarelse) gir lik masse $dm = \rho \cdot dV_1 = \rho \cdot A_1 \cdot ds_1$ mellom a og b som $dm = \rho \cdot dV_2 = \rho \cdot A_2 \cdot ds_2$ mellom c og d.

Da har den gitte massen (mellom a og c ved tid t) endret sin kinetiske energi med

$$dK = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot \left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

i løpet av tiden dt. Ifølge arbeid-energi-teoremet må dette tilsvare netto ytre arbeid dW som omgivelsene har utført på den gitte massen på tiden dt.

(86) Endringen i denne massens potensielle energi i tyngdefeltet er

$$dU = dm \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$$

Dette skyldes at tyngdekraften har utført arbeidet $dW_g = -dU$ på væsken, dvs

$$dW_g = -dm \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$$

Trykk-kreftene fra omgivende væske utfører også arbeid på den gitte væsken:

Ved pos. 1 dytter omgivelsene massen dm lengden ds_1 med kraften $p_1 \cdot A_1$, slik at et <u>positivt</u> arbeid

$$dW_1 = p_1 A_1 ds_1$$

utføres på den gitte væsken.

Ved pos. 2 er det massen dm som dytter omgivende væske lengden ds_2 med kraften $p_2 \cdot A_2$, dvs væsken gjør positivt arbeid $p_2 \cdot A_2 \cdot ds_2$ på omgivelsene, dvs det gjøres et <u>negativt</u> arbeid

$$dW_2 = -p_2 \cdot A_2 \cdot ds_2$$

på den gitte væsken. Netto "trykk-arbeid" på gitt væske blir

$$dW_p = dW_1 + dW_2 = p_1 A_1 ds_1 - p_2 A_2 ds_2$$

$$= A_1 ds_1 (p_1 - p_2)$$

siden $dV_1 = dV_2$, dvs $A_1 ds_1 = A_2 ds_2$.

87 Dermed:

$$dW = dK$$

$$\Rightarrow dW_g + dW_p = dK$$

$$\Rightarrow -dm\cdot g\cdot(h_2-h_1) + A_1\cdot ds_1\cdot(p_1-p_2) = \frac{1}{2}dm\,(v_2^2-v_1^2)$$

Her er $dm = \rho\cdot dV = \rho A_1 ds_1$ slik at

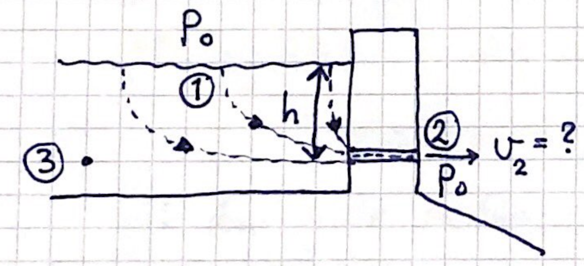
$$-\rho A_1 ds_1\, g\,(h_2-h_1) + A_1 ds_1 (p_1-p_2) = \frac{1}{2}\rho A_1 ds_1 (v_2^2-v_1^2)$$

$$\Rightarrow -\rho g (h_2-h_1) + (p_1-p_2) = \frac{1}{2}\rho (v_2^2-v_1^2)$$

$$\Rightarrow \underline{p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2}$$

som er Bernoullis lov, igjen!

Eks: Hull i demningen



---- strømlinjer

Fra før: $p_3 = p_0 + \rho g h$

Posisjon 1, på overflaten: $p_1 = p_0$, $h_1 = h$, $v_1 = 0$

Pos. 2, like utenfor hullet: $p_2 = p_0$, $h_2 = 0$, v_2

$$\Rightarrow p_0 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow \underline{\underline{v_2 = \sqrt{2gh}}}$$

Dvs, som fritt fall fra høyde h, og vannets fart mot turbinbladene i kraftstasjonen, hvis rørene er store og med glatte vegger.