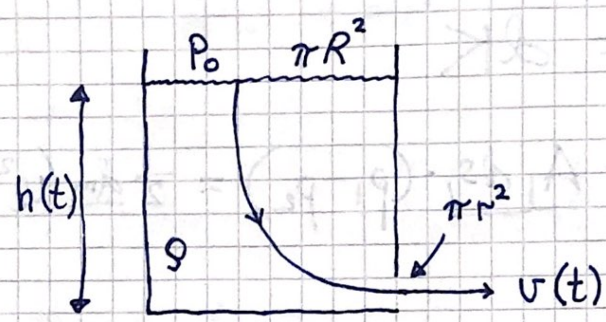
Eks: Tømming av bøtte med lite hull nederst



$h(0) = H$

$h(\tau) = 0$

Bestem tiden τ det tar å tømme bøtta.

Løsning: Med $r \ll R$ antar vi (i første omgang) at farten $V \approx 0$ på overflaten, hele tiden. Som i forrige eks:
(Dvs: Vi ser bort fra kin. energi ved overflaten)

$$p_0 + \rho g h(t) = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2(t) \Rightarrow v(t) = \sqrt{2g\,h(t)}$$

Massebevarelse gir:

Volumstrøm ved overflaten = Volumstrøm ut av hullet

$$\Rightarrow \quad -\pi R^2 \cdot \frac{dh}{dt} = \pi r^2 \cdot v = \pi r^2 \cdot \sqrt{2gh}$$

$$\Rightarrow \quad \int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\sqrt{2g}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \int_0^\tau dt$$

$$\Rightarrow \quad -2\sqrt{H} = -\sqrt{2g}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot \tau \Rightarrow \underline{\underline{\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}} \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^2}}$$

Talleks: 10 L med f.eks $R = 1$ dm og $H = 10/\pi$ dm; hull med $r = 1$ cm:

$$\tau = \sqrt{\frac{20/\pi \text{ dm}}{98.1 \text{ dm/s}^2}} \cdot \left(\frac{10}{1}\right)^2 \text{ s} \approx \underline{\underline{25\text{ s}}}$$

89

Hvor stor feil gjorde vi når vi neglisjerte overflatens kinetiske energi $\frac{1}{2}\rho(dh/dt)^2$ i Bernoullis ligning?
La oss se; vi får da

$$p_0 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho(dh/dt)^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2$$

Her kan dh/dt erstattes med $v \cdot r^2/R^2$ (se s. 88):

$$\rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 (r^4/R^4) = \frac{1}{2}\rho v^2$$

dvs

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1-(r/R)^4}}$$

dvs samme ligning for $h(t)$ som s. 88, bare med ekstrafaktoren $1-(r/R)^4$. Vi får

$$\int_H^0 \frac{dh\sqrt{1-(r/R)^4}}{\sqrt{h}} = -\sqrt{2g}\,(r/R)^2 \int_0^\tau dt$$

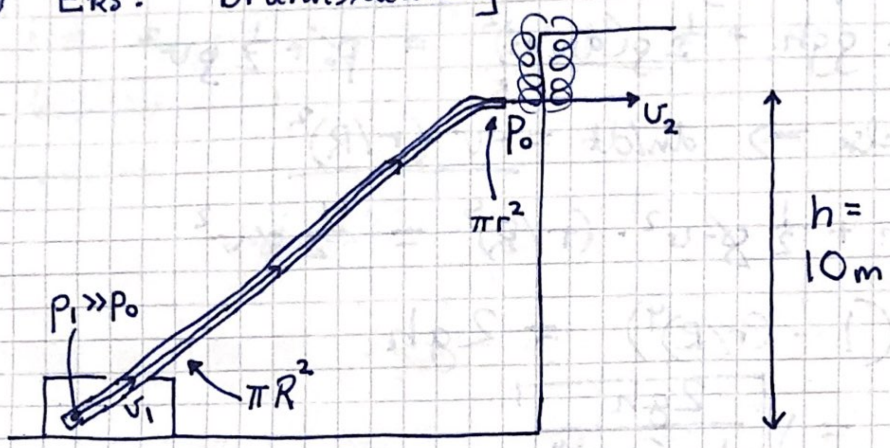
og

$$\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^4}$$

Med tallene s. 88 er $\sqrt{1-(r/R)^4} = \sqrt{1-0.0001} \simeq 0.99995$.

Altså gjorde vi en forsvinnende liten feil på s. 88.

(90) Eks: Brannslukking



For gitt p_1, R og r, bestem v_1 og v_2.

Løsning: $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_0 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_2^2$ (Bernoulli)

Lik volumstrøm $\Rightarrow$ $v_1 \cdot \pi R^2 = v_2 \cdot \pi r^2 \Rightarrow v_1 = v_2 \cdot (r/R)^2$

Dermed: $p_1 - p_0 - \rho g h = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho v_2^2 (1 - r^4/R^4)$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0 - \rho g h)}{\rho\,(1 - r^4/R^4)}}}} \quad ; \quad v_1 = v_2 \cdot r^2/R^2$$

Med tall som i openstax Ex 14.7:

$\Delta p = p_1 - p_0 = 1.62 \cdot 10^6$ Pa

$\rho g h = 1.01 \cdot 10^5$ Pa

$r/R = 1.5\,\mathrm{cm}/3.2\,\mathrm{cm}$

$\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$

$\Rightarrow v_2 = 56.5\ \mathrm{m/s}$; $v_1 = 12.4\ \mathrm{m/s}$