

Elektriske felt

Vi skal arbeide med

- Å definere begrepet elektrisk felt
- Å skille begrepene elektrisk felt og elektrisk kraft
- Å beregne det elektriske feltet rundt mange ladninger



Vi definerer begrepet *elektrisk felt* ved å se på kreftene som virker mellom to ladde kuler.



© 2012 Pearson Education, Inc.

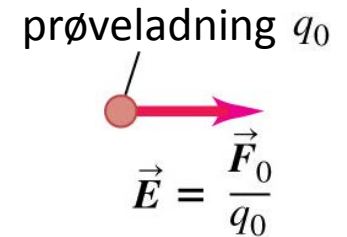
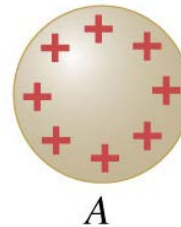
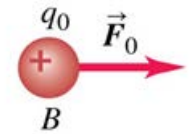
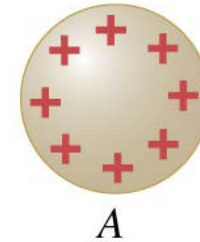
Kraften \vec{F}_0 virker på ladningen B og den motsatt rettede like store kraften $-\vec{F}_0$ virker på ladning A.

Den ladde partikkelen A endrer egenskaper til mediet rundt seg.

Endringen i P er der fremdeles når vi fjerner B.

Vi sier at rundt en ladd partikkel er det et elektrisk felt. Det elektriske feltet i P var der selv når det ikke var noen ladning i P.

Vi kan se *det elektriske feltet i P* ved å plassere en liten prøveladning der og undersøke kreftene som virker på den.



Den elektriske kraften på en ladd partikkel skyldes det elektriske feltet fra andre ladde partikler.

Prøveladningen skal være en liten ladning.

Vi definerer det elektriske feltet: $\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0}$

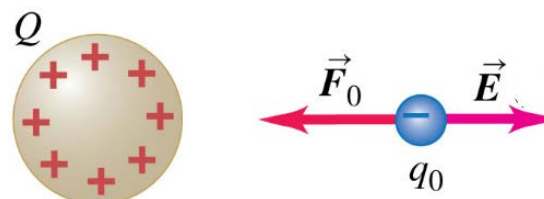
Enhet: N/C

Kraft på ladningen q_0 i det elektriske feltet er da: $\vec{F}_0 = q_0 \vec{E}$

q_0 kan være positiv eller negativ.



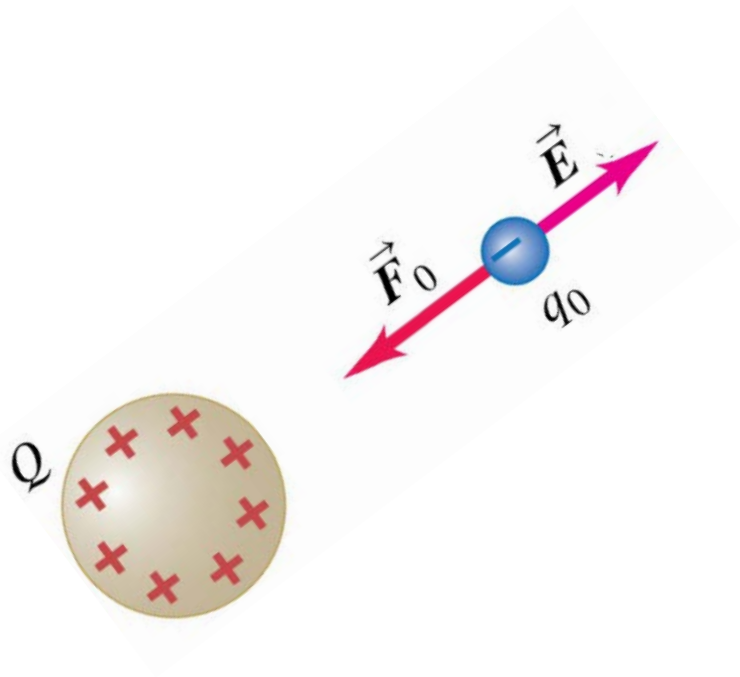
Feltet og kraften har samme retning når q_0 er positiv.



Feltet og kraften har motsatt retning når q_0 er negativ.

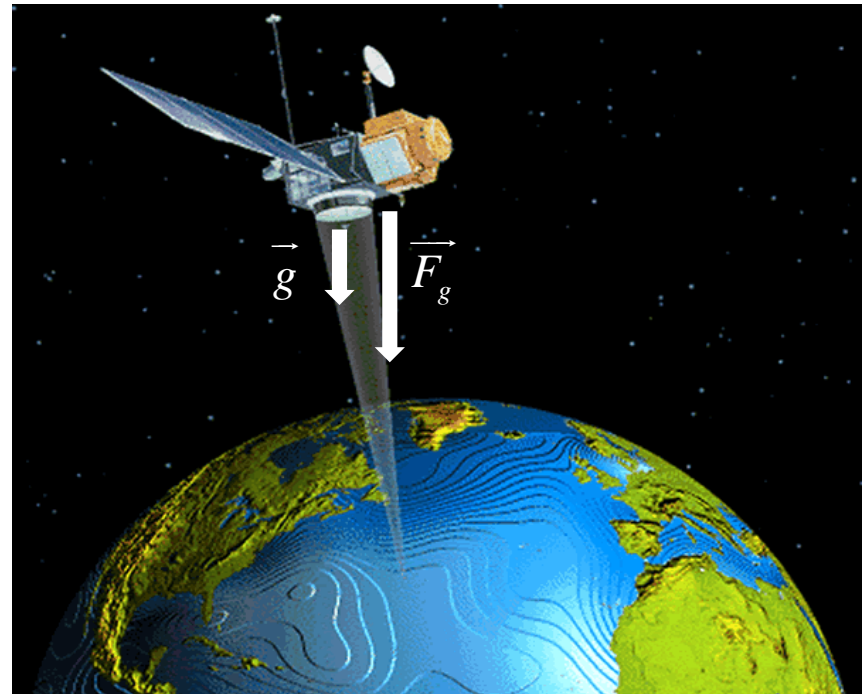
Elektrisk felt:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0}$$



Gravitasjonsfelt:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m_0}$$



Det elektriske feltet rundt en punktladning

Vi markerer et punkt S.

Punktet P er et vilkårlig punkt i avstand r fra S.

Enhetsvektoren \hat{r} peker fra S mot P slik at $\vec{r} = r \cdot \hat{r}$

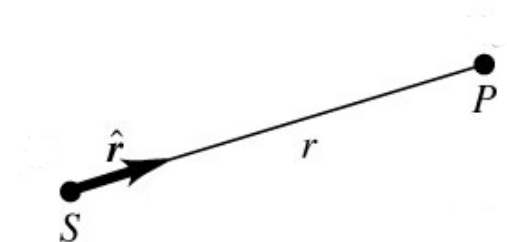


Det elektriske feltet rundt en punktladning

Vi markerer et punkt S.

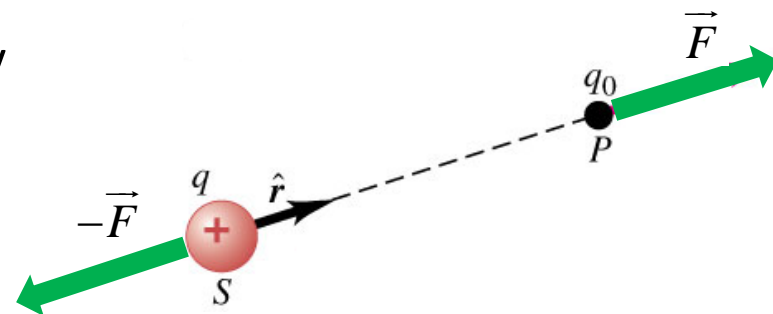
Punktet P er et vilkårlig punkt i avstand r fra S.

Enhetsvektoren \hat{r} peker fra S mot P slik at $\vec{r} = r \cdot \hat{r}$

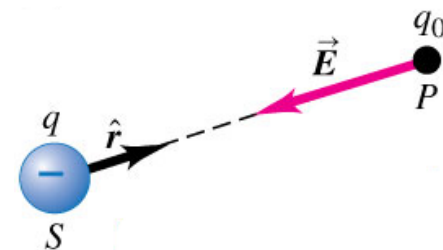


Vi plasserer en positiv ladning i S og en positiv prøveladning i P.

Rundt en positiv ladning: $\vec{E} \parallel \hat{r}$



Rundt en negativ ladning: $\vec{E} \parallel -\hat{r}$

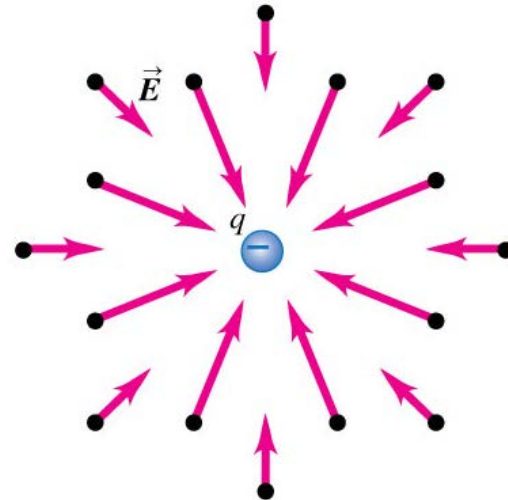
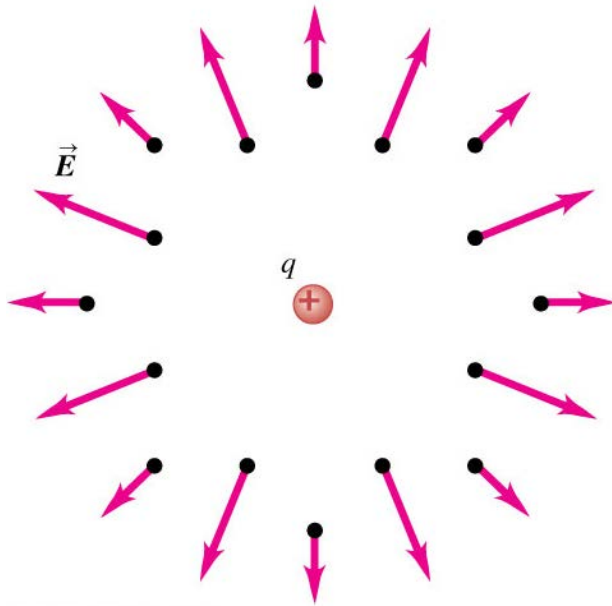


Vi definerte det elektriske feltet: $\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0}$

Coulombs lov: $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|qq_0|}{r^2}$

Det elektriske feltet rundt en punktladning, q :
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Slik at feltets retning *er ut fra en positiv ladning og inn mot en negativ ladning*.

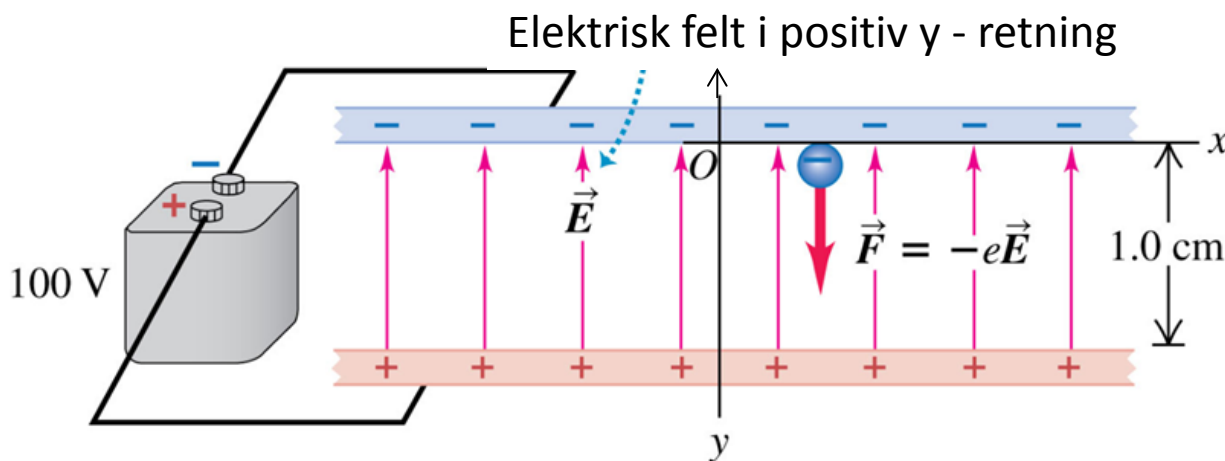


Eksempel. Homogent elektrisk felt

En kan lage et homogent elektrisk felt mellom to "uendelig" store parallelle plater som en kobler til en spenningskilde slik at den ene platen blir negativ og den andre positiv.

Vi har to parallelle elektrisk ledende plater som er koplet til en spenningskilde på 100V. Mellom platene er det da et elektrisk felt, $E = 1,00 \cdot 10^4 \text{ N / C}$.

- Et elektron med ladning $-e = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ og masse $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ forlater den øverste platen. Hva er akselerasjonen?
- Hva blir farten til elektronet når det treffer den positive platen?



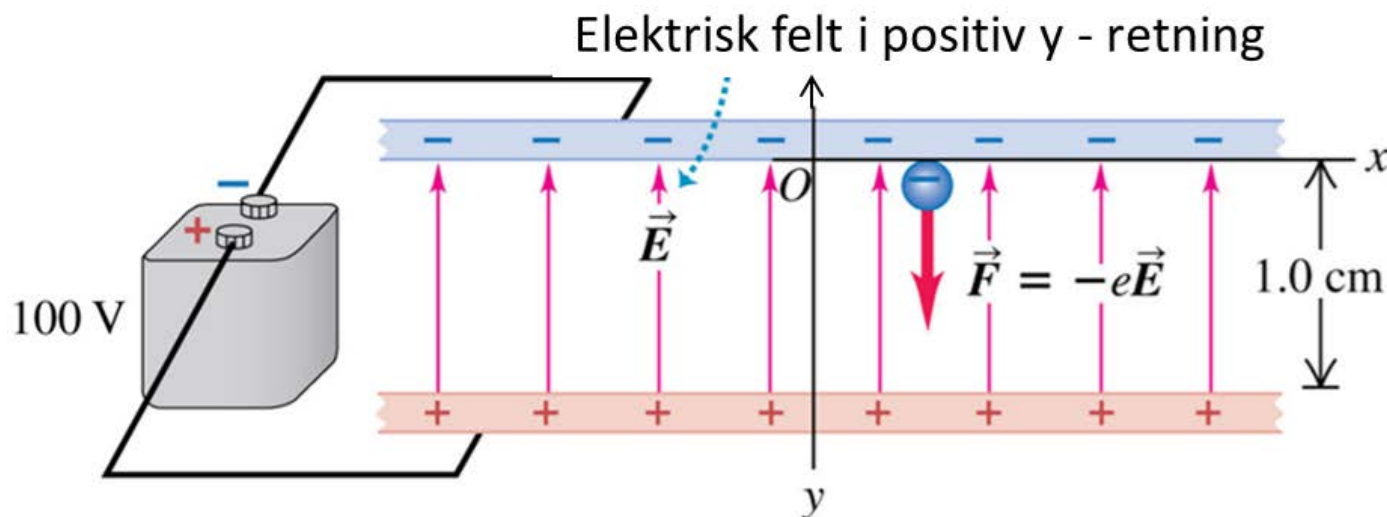
Løsning

- a) Krafta på elektronet er nedover, altså motsatt rettet feltet fordi elektronet har negativ ladning.

Feltet er konstant og da er også krafta er konstant. Akselerasjonen er konstant og bestemmes av Newtons 2. lov.

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-eE}{m} = \frac{(-1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(1,00 \cdot 10^4 \text{ N / C})}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} \Rightarrow \underline{\underline{a = -1,76 \cdot 10^{15} \text{ m / s}^2}}$$

Akselerasjon i negativ y – retning.



Løsning

- a) Krafta på elektronet er nedover, altså motsatt rettet feltet fordi elektronet har negativ ladning.

Feltet er konstant og da er også krafta er konstant. Akselerasjonen er konstant og bestemmes av Newtons 2. lov.

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-eE}{m} = \frac{(-1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(1,00 \cdot 10^4 \text{ N / C})}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} \Rightarrow \underline{\underline{a = -1,76 \cdot 10^{15} \text{ m / s}^2}}$$

Akselerasjon i negativ y – retning.

- b) Elektronet starter i ro og akselerasjonen er konstant. $s = 1,0 \text{ cm}$.

Vi har bevegelseslikningene for konstant akselerasjon:

$$v = v_0 + at \quad \text{og} \quad s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v_0 = 0 \Rightarrow v = at \quad \text{og} \quad s = \frac{1}{2} at^2 \quad \text{Vi eliminerer tida og får: } |v| = \sqrt{2as}$$

Farten når elektronet treffer plata er i negativ y – retning:

$$\underline{\underline{|v| = \sqrt{2(-1,76 \cdot 10^{15} \text{ m / s}^2)(-1,0 \cdot 10^{-2} \text{ m})} = 5,9 \cdot 10^6 \text{ m / s}}}$$

Superposisjon av elektriske felt

Vi summerer elektriske felt på samme måte som vi summerte elektriske krefter.

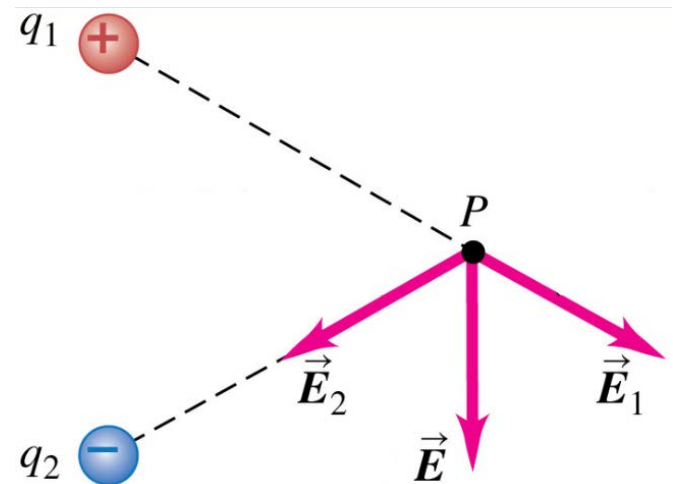
En prøveladning i nærheten av mange andre ladninger vil bli påvirket av en total kraft: $\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = q_0 \vec{E}_1 + q_0 \vec{E}_2 + q_0 \vec{E}_3 \dots$

Det totale elektriske feltet som prøveladningen befinner seg i er:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 \dots$$

Det totale elektriske feltet i P er vektorsummen av de elektriske feltene fra alle punktladningene i nærheten.

Når ladningene blir jevnt fordelt langs en linje, over en flate eller i et volum, går summen over til integraler.

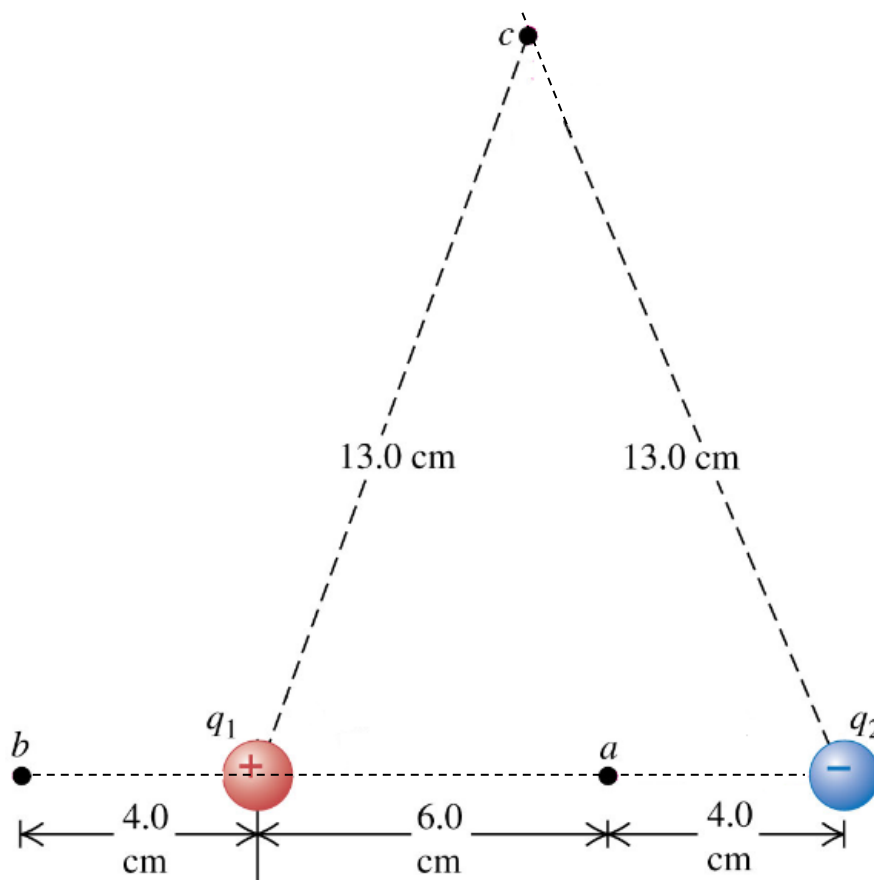


Eksempel. Elektrisk dipol.

En elektrisk dipol består av to like store punktladninger, men den ene er negativ og den andre er positiv. I dette eksemplet er ladningene $q_1 = 12 \text{ nC}$ og $q_2 = -12 \text{ nC}$. Avstanden mellom dem er $0,100 \text{ m}$. Se figur nedenfor.

Finn de elektriske feltene fra q_1 og fra q_2 og det totale feltene

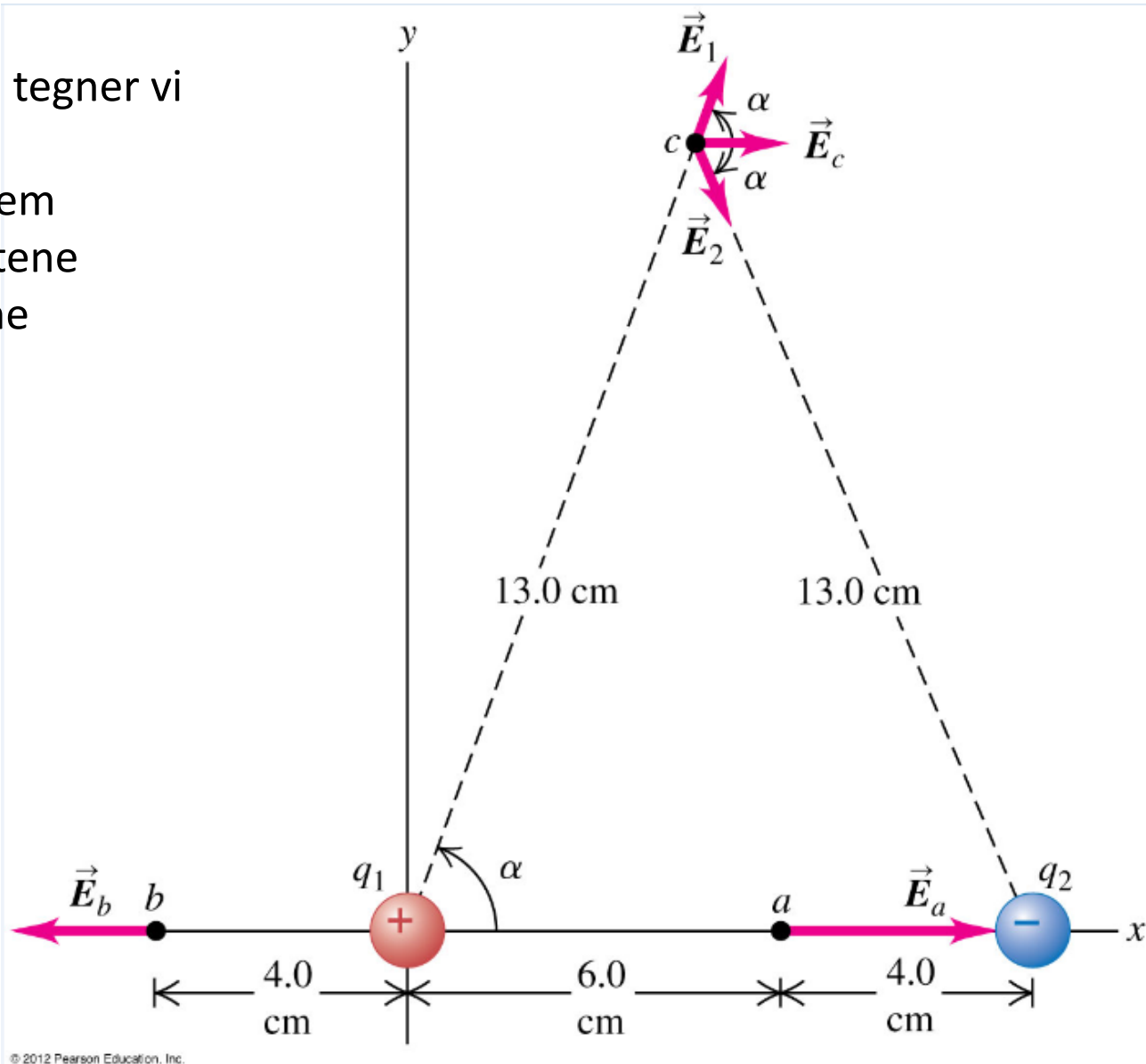
- a) i punkt a
- b) i punkt b
- c) i punkt c.



Løsning

Før vi starter å regne tegner vi inn på figuren:

1. et koordinatsystem
2. de elektriske feltene i de tre punktene



a) Vi beregner feltene fra hver av ladningene:

$$\text{Fra } q_1 \text{ i a: } E_{1a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1|}{r^2} = (9,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2) \frac{12 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{(0,060\text{m})^2} = 3,0 \cdot 10^4 \text{ N / C}$$

$$\text{Fra } q_2 \text{ i a: } E_{2a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_2|}{r^2} = (9,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2) \frac{12 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{(0,040\text{m})^2} = 6,8 \cdot 10^4 \text{ N / C}$$

Begge feltene er i positiv x – retning:

$$\underline{\underline{\vec{E}_a}} = E_{1a} \hat{i} + E_{2a} \hat{i} = (3,0 + 6,8) \cdot 10^4 \text{ N / C} \hat{i} = \underline{\underline{(9,8 \cdot 10^4 \text{ N / C}) \hat{i}}}$$

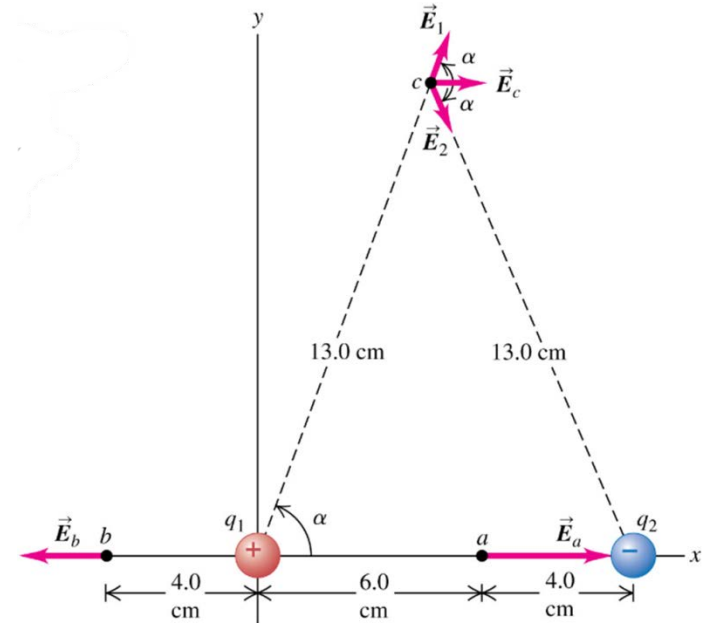
$$\text{b) Fra } q_1 \text{ i b: } E_{1b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1|}{r^2} = (9,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2) \frac{12 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{(0,040\text{m})^2} = 6,8 \cdot 10^4 \text{ N / C}$$

$$\text{Fra } q_2 \text{ i b: } E_{2b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_2|}{r^2} = (9,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2) \frac{12 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{(0,14\text{m})^2} = 0,55 \cdot 10^4 \text{ N / C}$$

Feltet fra ladning 1 er i negativ x – retning og fra ladning 2 i positiv x – retning:

$$\underline{\underline{\vec{E}_b}} = -E_{1b} \hat{i} + E_{2b} \hat{i} = (-6,8 + 0,55) \cdot 10^4 \text{ N / C} \hat{i} = \underline{\underline{(-6,2 \cdot 10^4 \text{ N / C}) \hat{i}}}$$

- c) Vi ser på symmetrien i punkt c.
 Avstanden fra de to ladningene er
 den samme, dermed størrelsene av
 feltene fra de to ladningene de samme.



$$E_{1c} = E_{2c} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1|}{r^2} = (9,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2) \frac{12 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{(0,130\text{m})^2} = 6,39 \cdot 10^4 \text{ N / C}$$

De to feltene har samme x – komponent, begge i positiv retning.

$$E_{1cx} = E_{2cx} = E_{1c} \cos \alpha = (6,39 \cdot 10^3 \text{ N / C}) \cdot \frac{5}{13} = 2,46 \cdot 10^3 \text{ N / C}$$

De har også samme y – komponent, men i motsatt retning.

Elektrisk felt i c:

$$\underline{\underline{\vec{E}_c}} = 2(2,46 \cdot 10^3 \text{ N / C})\hat{i} = \underline{\underline{(4,9 \cdot 10^3 \text{ N / C})\hat{i}}}$$

Løsningsstrategi:

1. Tegn en figur med ladningene, merk av om de er positive og negative.
2. Gjør symmetribetraktninger.
3. Tegn inn et koordinatsystem.
4. Tegn inn de elektriske feltene fra alle ladningene i punktene det spørres om.
5. Hvis ladningsfordelingen er punktladninger, summeres de elektriske feltene vektorielt.
6. Hvis ladningsfordelingen er kontinuerlig, defineres et lite element med ladning dq . Finn det elektriske feltet i P fra dette elementet og integrer over hele ladningsfordelingen.

Eksempel. Feltet fra en ladd ring.

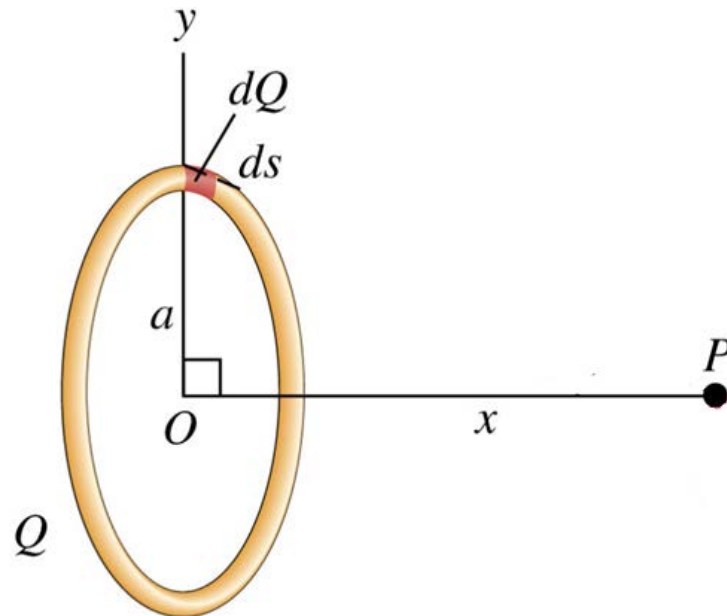
En positiv ladning Q er jevnt fordelt på en metallring med radius a . Finn et uttrykk for det elektriske feltet på rotasjonsaksen i en avstand x fra sentrum av ringen.

Eksempel. Feltet fra en ledd ring.

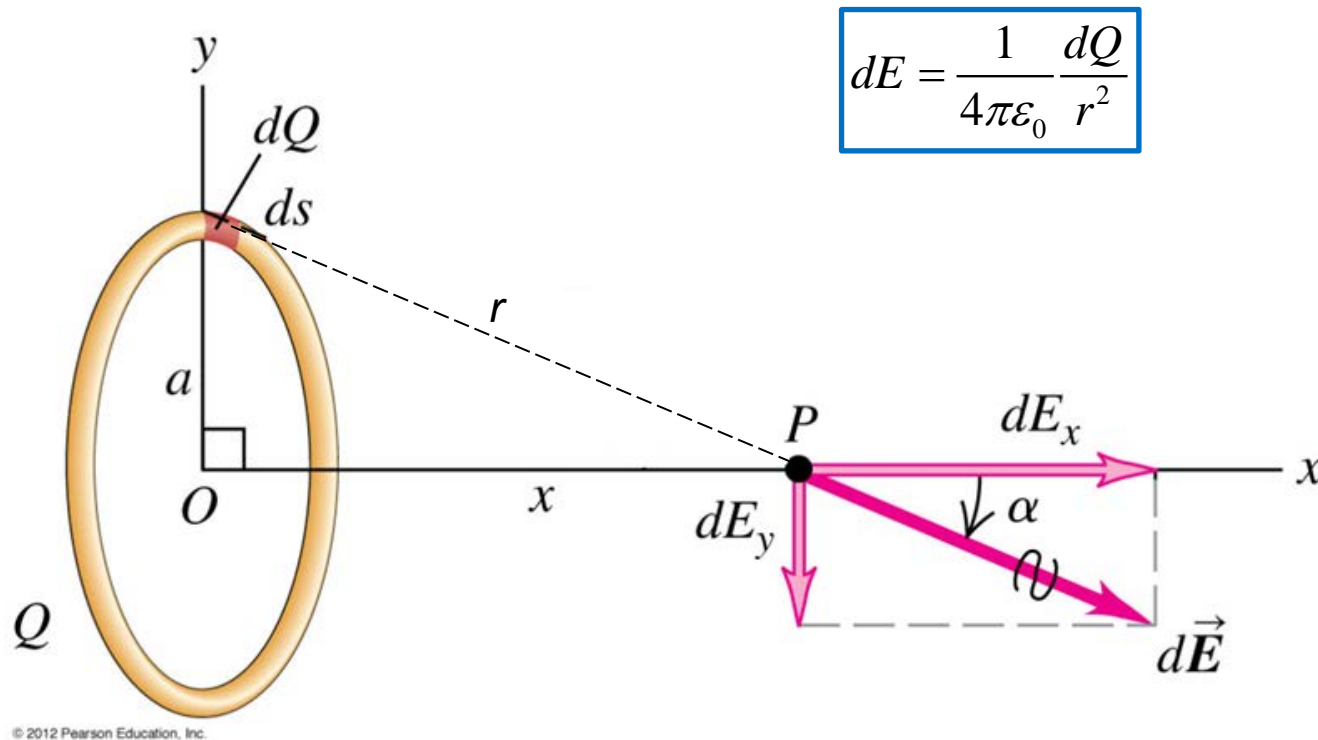
En positiv ladning Q er jevnt fordelt på en metallring med radius a . Finn et uttrykk for det elektriske feltet på rotasjonsaksen i en avstand x fra sentrum av ringen.

Løsning

Vi tegner ringen, merker av et lite element med ladning dQ et koordinatsystem og punktet P i avstand x .

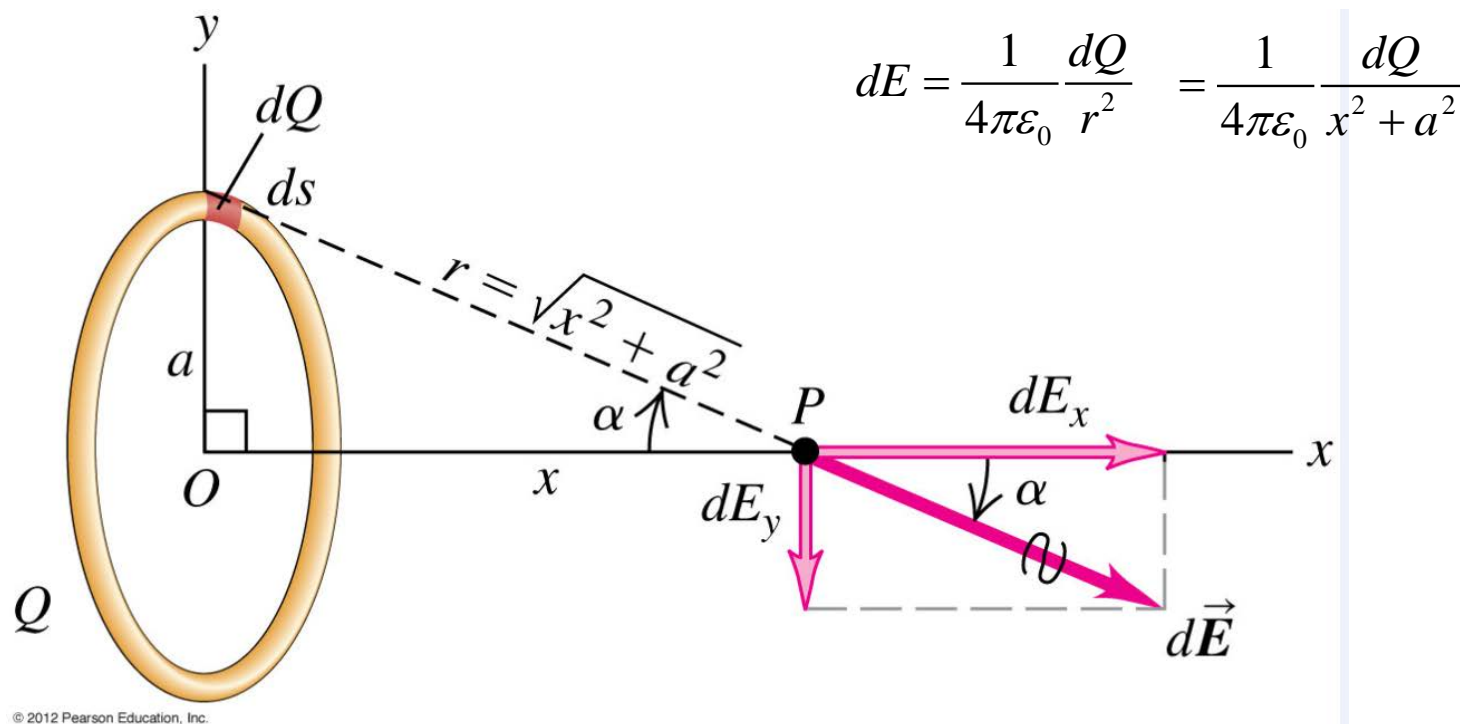


Vi tegner inn det elektriske feltet fra elementet ds og dekomponerer i x- og y – retning.



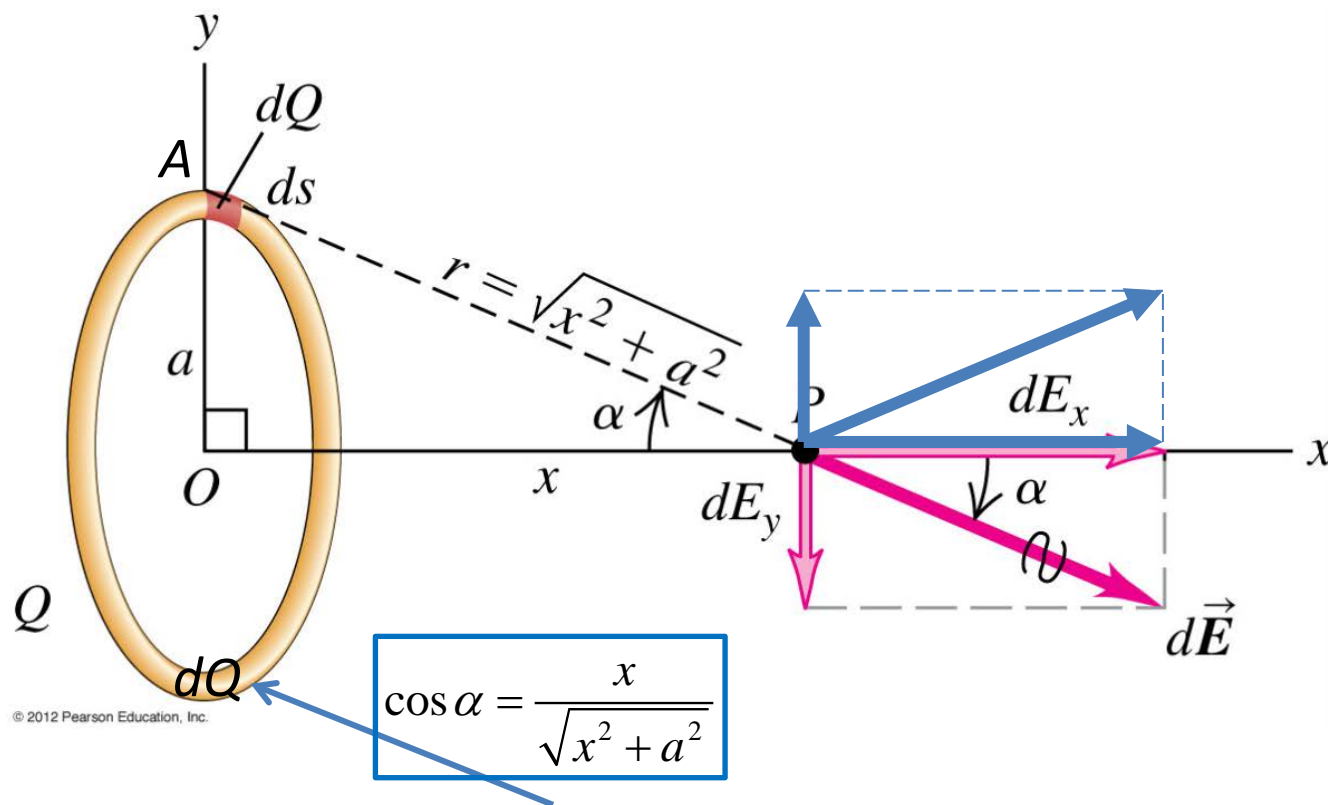
Vi tegner inn det elektriske feltet fra elementet ds og dekomponerer i x- og y – retning.

Avstanden fra ladningselementet til punktet P finner vi med Pytagoras.



Symmetribetraktninger:

Ladningselementene dQ i $y = a$ og $y = -a$ bidrar med like store elektriske felt i P. x – komponentene i samme retning, y – komponentene utslukker hverandre. Totalt rundt hele ringen blir det ikke noe felt i y – retning.



Det elektriske feltet i punktet P fra ladningselementet dQ : $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{x^2 + a^2}$

x – komponenten til feltet:

$$dE_x = dE \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{x^2 + a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} ds$$

Ladning pr
lengdeenhet er
 $\lambda \Rightarrow dQ = \lambda ds$

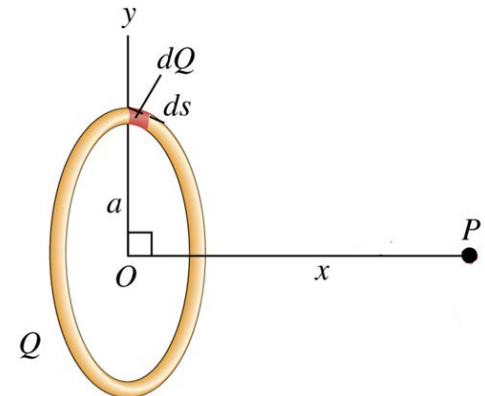
Vi finner det totale feltet i P ved å integrere rundt hele ringen, fra 0 til $2\pi a$

$$E_x = \int_0^{2\pi a} dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi a} ds$$

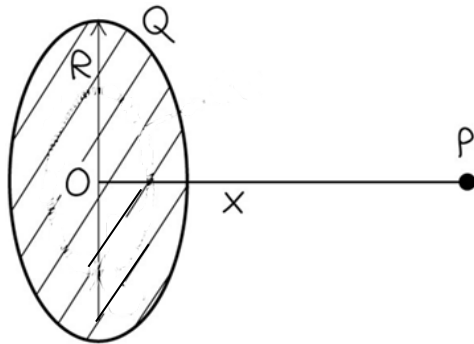
Uttrykket er konstant i forhold til ds .

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} (2\pi a)$$

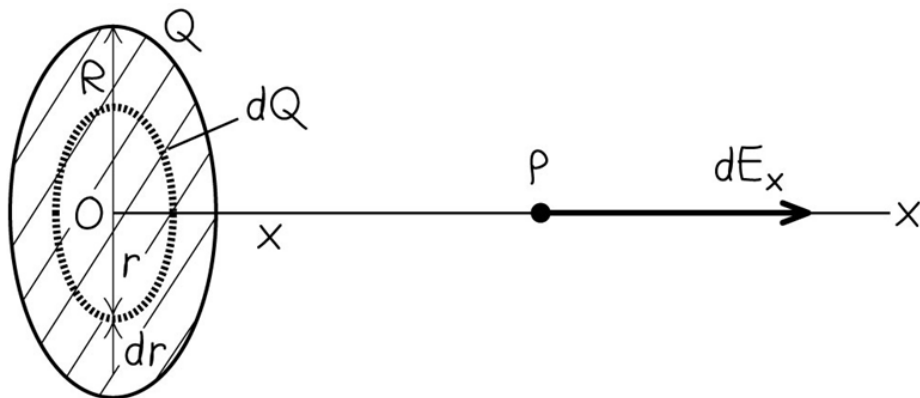
Det elektriske feltet i P er: $\underline{\underline{\vec{E} = E_x \hat{i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i}}}$



Eksempel. Elektrisk felt fra en skive med jevnt fordelt ladning. En sirkulær skive med radius R av et ikke – ledende materiale har en jevnt fordelt positiv ladningsfordeling, σ . Se figuren. Finn det elektriske feltet i et vilkårlig punkt på positiv x – aksen.



Løsning



Pga symmetri, vil feltet i P ha retning langs x – akse. For positiv ladning er retningen som vist på figuren.

Vi fant feltet fra en ring, og deler flaten opp i uendelig tynne ringer med indre radius r og ytre radius $r + dr$.

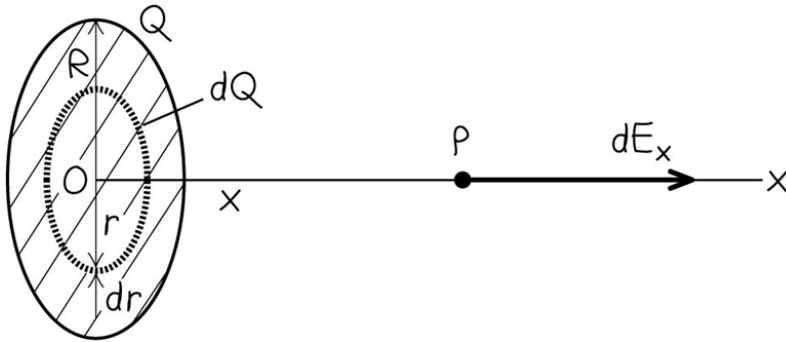
Arealet til ringen er da tilnærmet: $dA = 2\pi r dr$

Ladning på ringen:

$$dQ = \sigma dA = 2\pi\sigma r dr$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Innsatt i uttrykket for feltet fra en ring: $dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\sigma r x dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$



Fra forrige side:

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\sigma r x dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

Vi integrerer over hele arealet fra $r = 0$ til $r = R$:

$$E_x = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{(r x dr)}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{4\epsilon_0} \int_0^R \frac{2r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

Ny variabel:

$$t = x^2 + r^2$$

Vi får:
$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{(R^2 / x^2) + 1}} \right]$$

Stor skive, $R \gg x$ gir
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

For ei stor uniformt ladd skive, vil feltet være normalt på skiva og den er uavhengig av avstanden fra skiva.

$$E_x = \frac{\sigma x}{4\epsilon_0} \int_0^R \frac{2rdr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

Vi overser konstantene og grensene først og løser integralet: $h = \int \frac{2rdr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$

Substitusjon: $t = x^2 + r^2$ gir: $\frac{dt}{dr} = 2r \Rightarrow dr = \frac{dt}{2r}$

Innsatt i integralet: $h = \int \frac{dt}{t^{3/2}} = \int t^{-3/2} dt = -2t^{-1/2} + C$

Uttrykt med variabelen r : $h = \frac{-2}{x^2 + r^2} + C$

Innsatt i uttrykket for det elektriske feltet: $E_x = \frac{\sigma x}{4\epsilon_0} \left[\frac{-2}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right]_0^R$

$$E_x = \frac{\sigma x}{4\epsilon_0} \left(\frac{-2}{\sqrt{x^2 + R^2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2}} \right) = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{R^2}{x^2}}} \right) \Rightarrow E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 / x^2}} \right)$$

Eksempel. To uendelig store flateladninger.

På side 9 så vi på et elektron i et det vi sa var et homogent felt mellom to ladde flater. Finn det elektriske feltet mellom platene og på over- og undersiden.



Løsning



$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Det elektriske feltet mellom platene: $\underline{\underline{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{j}}}$

Over og under flatene er det ideelt sett ikke noe felt.