

Program for lærerutdanning

Løsningsforslag – Eksamensoppgave i FY6017 Elektromagnetisme

Eksamensdato:	7.januar 2015
Eksamenstid (fra-til):	kl.09.00 – 14.00
Tillatte hjelpemidler:	Grafisk kalkulator Formelvedlegg (vedlagt oppgaveteksten)

Vurderingskriterier

Ved vurderingen vektlegges din evne til å

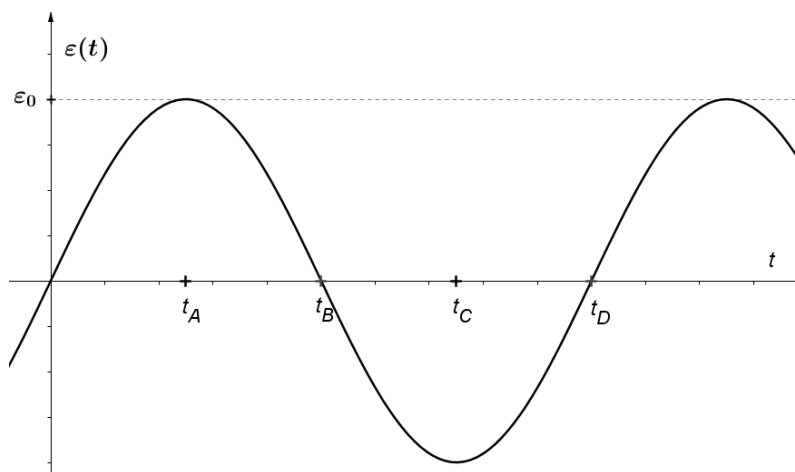
- gjøre greie for fysiske fenomener
- gjøre greie for kvalitative vurderinger
- vise regneferdighet
- vise eksperimentelle ferdigheter
- presentere besvarelsen

Prosentene på hver oppgave indikerer hvor mye den teller i det endelige resultatet for hele denne eksamensoppgaven.

I forhold til endelig karakter i emnet FY6017 teller denne eksamensoppgaven 80%, mens Midtsemestereksamen teller 20 %.

Oppgave 1 (Vekt 25%)

- a) En ledersløyfe med areal A roterer med konstant vinkelfart ω_0 i et homogent magnetfelt med flukstetthet B . Figur 1 viser den elektromotoriske spenningen $\varepsilon(t)$ som blir induisert som funksjon av tiden. ε_0 er maksimalverdien av den induerte spenningen.



Figur 1

1. Skisser hvordan den magnetiske fluksen varierer innenfor det samme tidsrommet. Vis spesielt tydelig hva situasjonen er i tidspunktene som er angitt i figur 1.
2. Rotasjonshastigheten blir doblet. Uttrykk amplituden og vinkelfarten til den nye elektromagnetiske spenningen som blir induert ved ω_0 og ε_0 .

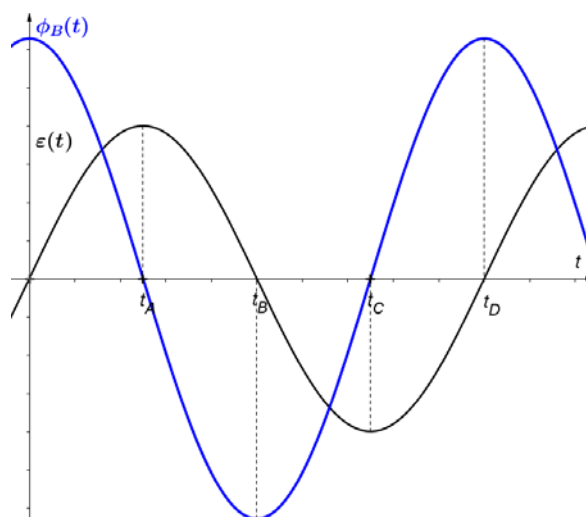
Løsning:

1. Faradays induksjonslov gir sammenhengen:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

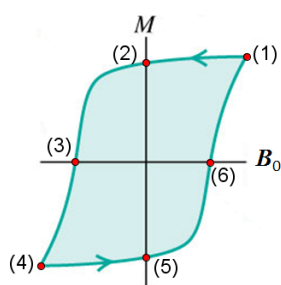
Dvs. at emsen har sin største verdi når fluksen avtar raskest (ved tid t_A). Når fluksen har et ekstremalpunkt, er den deriverte, og dermed emsen, lik 0. Det skjer ved tid t_B og t_D .

Ved tida t_C har fluksen sin største stigning, og dermed emsen sin største negative verdi.

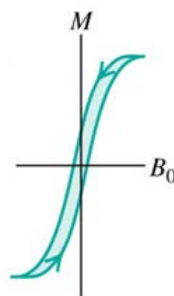


2. Dersom rotasjonshastigheten blir doblet, blir den nye vinkelfarten $\omega = 2\omega_0$. Siden endringene nå skjer dobbelt så fort, vil den maksimale deriverte bli dobbelt så stor. Dvs. amplituden til den nye emsen blir $\varepsilon_{maks} = 2\varepsilon_0$.

b) Figur 2 og figur 3 viser hysteresekurver for to ulike magnetiske materialer



Figur 2



Figur 3

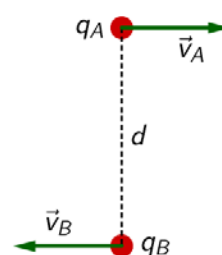
1. Forklar hvorfor hysteresekurver oppstår og hva som er situasjonen i de nummererte punktene i figur 2.
2. Hvilke teknologiske anvendelser kan de to materialene egne seg til? Begrunn svaret.

Løsning:

1. Punkt 1: En stor, ytre magnetisk flukstetthet B_0 i positiv retning må til for at materialet skal få en maksimal positiv magnetisering M .
Punkt 2: Det ytre magnetfeltet er fjernet, $B_0 = 0$, men magnetiseringen av materialet endrer seg svært lite.
Punkt 3: En viss ytre magnetisk flukstetthet i negativ retning har sørget for at magnetiseringen av materialet er null.
Punkt 4: En stor, ytre magnetisk flukstetthet B_0 i negativ retning må til for at materialet skal få en maksimal magnetisering i negativ retning.
Punkt 5: Det ytre magnetfeltet er fjernet, $B_0 = 0$, men magnetiseringen av materialet endrer seg svært lite.
Punkt 6: En viss ytre magnetisk flukstetthet i positiv retning har sørget for at magnetiseringen av materialet igjen er null.
2. Siden materialet i figur 1 i stor grad beholder magnetiseringen når det ytre feltet er fjernet, vil det fungere bra som en permanentmagnet.
I materialet i figur 2, vil magnetiseringen i stor grad følge det ytre magnetfeltet (magnetisk «bløtt» materiale.)

c) To punktladninger, q_A og q_B passerer hverandre i avstand d . q_A er positiv og q_B er negativ. Hastighetene, \vec{v}_A og \vec{v}_B er parallelle, men motsatt rettet. Se figur 4.

1. Finn den magnetiske flukstettheten \vec{B} (verdi og retning) i posisjonen til q_B på grunn av ladning q_A .



Figur 4

2. Finn forholdet mellom den elektriske kraften og den magnetiske kraften som virker på ladning q_B fra q_A . Kommenter.

Løsning:

1. Magnetfeltet fra en ladning i fart er gitt ved $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$

Dvs. at i dette tilfellet må \vec{B} ha retning inn i papirplanet (fra høyrehåndsregelen for vektorprodukt).

I posisjonen gitt i figur 4 er $\vec{v}_A \perp \hat{r}$ og vi får dermed

$$B = \frac{\mu_0 q_A v_A}{4\pi d^2}$$

2. Elektrisk kraft er gitt av Coulombs lov: $F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{d^2}$.

Siden ladningene har motsatt fortegn, er retningen til F_E på ladning q_B oppover i figur 4.

Den magnetiske kraften er gitt ved $\vec{F}_M = q_B \vec{v}_B \times \vec{B}$. Fra 1. har vi at \vec{B} har retning vinkelrett inn i papirplanet og at verdien er gitt ved $B = \frac{\mu_0 q_A v_A}{4\pi d^2}$. Dermed blir verdien av den magnetiske kraften

$$F_M = q_B v_B \frac{\mu_0 q_A v_A}{4\pi d^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_A q_B v_A v_B}{d^2}$$

Forholdet mellom kreftene blir

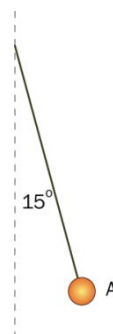
$$\frac{F_E}{F_M} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{d^2}}{\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_A q_B v_A v_B}{d^2}} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0 v_A v_B}$$

$$\text{Vet at } c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}, \quad \text{dvs.} \quad \frac{F_E}{F_M} = \frac{c^2}{v_A v_B}$$

Siden $v_A, v_B < c$, vil den elektriske kraften alltid være større enn den magnetiske.

- d) En kule A med masse $m = 2,0 \text{ g}$ henger i ro i en ikke-ledende og masseløs snor i et horisontalt, homogent elektrisk felt. Kula har ladning $q = 3,0 \cdot 10^{-7} \text{ C}$. Snora danner 15° med loddlinjen. Se figur 5. Alle ladninger i denne oppgaven regnes som punktladninger.

1. Finn størrelsen og retningen til den elektriske feltstyrken i det homogene elektriske feltet.

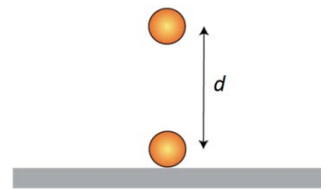


Figur 5

To kuler med lik ladning q og lik masse m , holdes i vertikal avstand d .

Se figur 6. Den nederste kula holdes i ro, mens den øverste kula slippes.

Kula flyker da oppover og når en maksimal høyde $h_{maks} \gg d$.



Figur 6

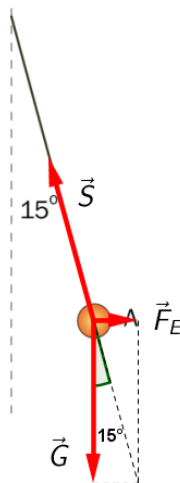
2. Vis at den maksimale høyden kula kan få, h_{maks} , kan bestemmes ut fra likningen

$$h_{maks}^2 + Bh_{maks} + C = 0$$

der B og C er konstanter. Hva blir uttrykkene for B og C ?

Løsning:

1. Figuren under viser kreftene som virker på kule A



Ut fra dette ser vi at $\tan 15^\circ = \frac{F_E}{G}$

Dermed får vi $F_E = G \tan 15^\circ \Leftrightarrow qE = mg \tan 15^\circ$

$$E = \frac{mg}{q} \tan 15^\circ = \frac{2,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \tan 15^\circ}{3,0 \cdot 10^{-7} \text{ C}} = 17524 \text{ N/C}$$

Dvs. det elektriske feltet har verdien $E = 18 \text{ kN/C}$

Siden kule A har positiv ladning, har den elektriske kraften og det elektriske feltet samme retning. Dvs. det elektriske feltet har retning mot høyre i figuren.

2. Den maksimale høyden inntreffer der all elektrisk potensiell energi har gått over til gravitasjonell potensiell energi og litt resterende elektrisk potensiell energi. Dvs.

$$E_{p,start} = (E_{p,E} + E_{p,g})_{topp}$$

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d} = mgh_{maks} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 h_{maks}}$$

$$mgh_{maks}^2 - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d} \cdot h_{maks} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} = 0$$

$$h_{maks}^2 - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 dm g} \cdot h_{maks} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m g} = 0$$

$$\Rightarrow B = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 dm g} \quad \wedge \quad C = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m g}$$

Oppgave 2 (Vekt 25%)

En uendelig lang, massiv, rett og ledende sylinder har radius R_1 og uniform flateladningstetthet σ .

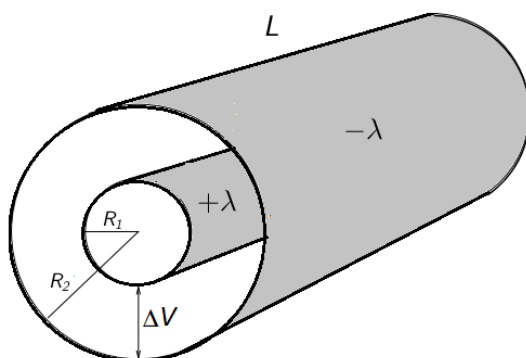
- a) Bruk Gauss lov til å vise at det elektriske feltet i en vilkårlig avstand r utenfor sylindren er gitt ved

$$E(r) = \frac{R_1 \sigma}{r \epsilon_0}, \quad r > R_1$$

- b) Finn sylindrens linjeladningstetthet λ uttrykt ved hjelp av σ og R_1 , og vis at det elektriske feltet utenfor sylindren er det samme som det ville ha vært om all ladning var plassert langs aksens til sylindren.

Sylindren plasseres nå inne i et tynt, like langt metallrør. Sentrum i røret og sylindren er det samme og de støttes av et ikke ledende materiale. Se figur 7.

Metallrøret har radius R_2 . Metallrøret har negativ linjeladningstetthet $-\lambda$. Sylindren har positiv linjeladningstetthet $+\lambda$. $L \gg R_2$, så vi ser bort fra randeffekter.



Figur 7

- c) Finn det elektriske feltet for $r > R_2$ og skisser $E(r)$ for alle $r \geq 0$. Hvilken retning har feltet i området mellom sylindren og røret?
- d) Bruk resultatene over til å finne det elektriske potensialet for alle $r \geq 0$. Anta at $V=0$ uendelig langt borte fra sylindren. Skisser $V(r)$ for alle $r \geq 0$.
- e) Hvordan ville svarene i c) og d) endre seg dersom ladningene var motsatte, dvs. $+\lambda$ på det ytre røret og $-\lambda$ på den indre sylindren?

Løsning:

- a) Vet at det elektriske feltet er rettet radielt utover fra en positiv ladning. Dvs. $E = E(r)$.

Gauss lov:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0}$$

Velger en sylinder som Gauss-flate. Da vil $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ overalt på den krumme flaten og dermed $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA$. Siden $E = E(r)$, vil E være konstant overalt på sylinderflata. På tverrendene vil $\vec{E} \perp d\vec{A}$ og dermed blir $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$ der. Alt i alt gjør dette at

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = E \cdot 2\pi r L = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad E = \frac{Q_{encl}}{2\pi r L \epsilon_0}$$

Flateladningstettheten er gitt ved

$$\sigma = \frac{Q_{tot}}{2\pi R_1 L} \quad \Leftrightarrow \quad Q_{tot} = 2\pi R_1 L \sigma$$

All ladning befinner seg innenfor Gaussflaten, dvs. $Q_{encl} = Q_{tot}$. Setter inn og får

$$E = \frac{Q_{encl}}{2\pi r L \epsilon_0} = \frac{2\pi R_1 L \sigma}{2\pi r L \epsilon_0} = \frac{R_1}{r} \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

- b) Linjeladningstettheten: $\lambda = \frac{Q_{tot}}{L}$ Flateladningstetthet: $\sigma = \frac{Q_{tot}}{A} = \frac{Q_{tot}}{2\pi R_1 L}$

Ved å kombinere disse får vi at $\lambda L = \sigma 2\pi R_1 L \Rightarrow \lambda = \sigma 2\pi R_1 \Leftrightarrow \sigma = \frac{\lambda}{2\pi R_1}$

Innsatt i uttrykket for det elektriske feltet

$$E = \frac{R_1}{r} \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{R_1 \cdot \frac{\lambda}{2\pi R_1}}{r \epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

Dersom all ladning hadde vært plassert på akse til sylindere, ville gaussflaten omslutte akkurat like mye ladning forutsatt $r > R_1$. Gauss lov vil i dette tilfelle på samme måte som i a) gi

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = E \cdot 2\pi r L = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0} \quad \text{der} \quad Q_{encl} = L \cdot \lambda$$

Dermed

$$E \cdot 2\pi r L = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

- c) Når $r > R_2$ er $Q_{\text{encl}} = 0$. Dermed er $E(r > R_2) = 0$.

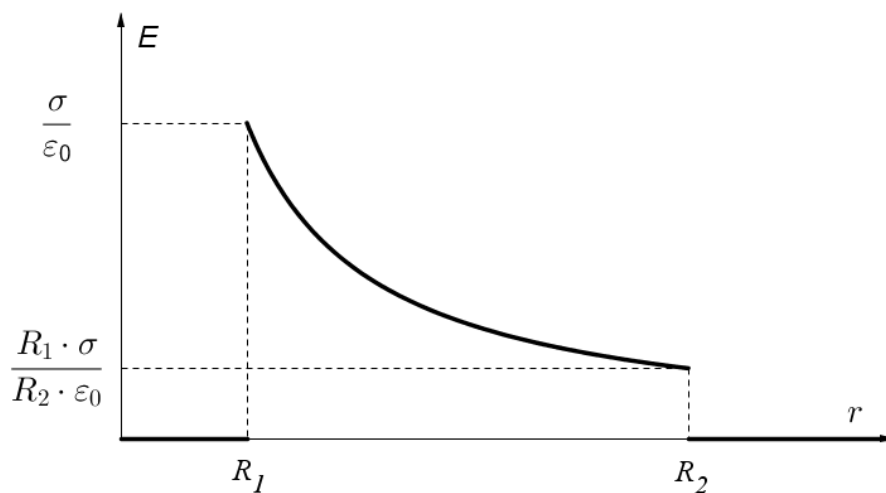
Kun ladning innenfor gaussflaten påvirker det elektriske feltet. Dermed blir det elektriske feltet i området mellom R_1 og R_2 det samme som det var uten den ytre røret.

$$E(R_1 < r < R_2) = \frac{R_1 \sigma}{r \epsilon_0} \quad \text{Retning: Radielt utover siden den indre sylindren er positivt ladd}$$

Siden den indre sylindren er massiv og ledende, vet vi at all ladning befinner seg på overflaten og at det elektriske feltet er 0 inni sylindren. Dvs.

$$r < R_1 \Rightarrow E = 0$$

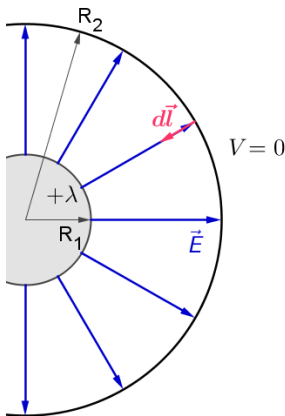
Grafisk:



- d) For $r > R_2$ er $E = 0 \Rightarrow V = \text{konstant}$

Siden $V = 0$ uendelig langt borte, må $V = 0$ for alle $r > R_2$.

For $R_1 < r < R_2$:



Elektrisk potensiale $V(a) - V(b) = \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$\Rightarrow V(r) - V(R_2) = \int_{R_2}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_2}^r E(r) \cdot dl \cos 180^\circ = \int_{R_2}^r \frac{R_1 \sigma}{\epsilon_0 r} \cdot (-dr)$$

$$V(r) - 0 = -\frac{R_1 \sigma}{\epsilon_0} \int_{R_2}^r \frac{dr}{r} = -\frac{R_1 \sigma}{\epsilon_0} \ln \left(\frac{r}{R_2} \right)$$

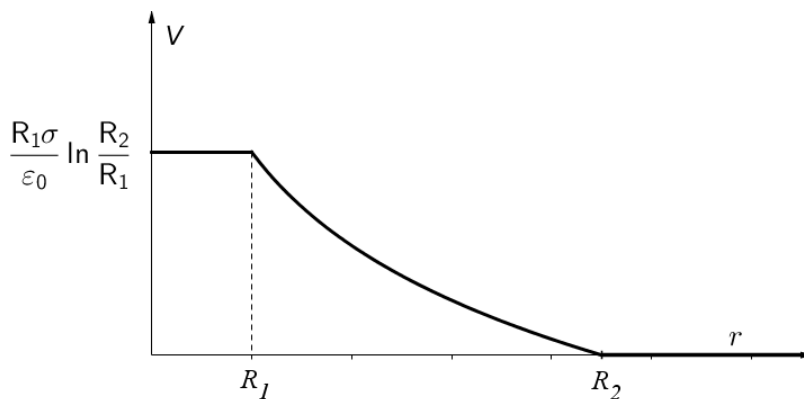
$$V(r) = \frac{R_1 \sigma}{\epsilon_0} \ln \left(\frac{R_2}{r} \right)$$

Dermed får vi for $r = R_1$
$$V(R_1) = \frac{R_1 \sigma}{\epsilon_0} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

Siden den indre sylindren er av massivt ledende materiale, er $E = 0$ for $r < R_1$. Da må det elektriske potensialet være konstant innenfor dette området. Dvs.

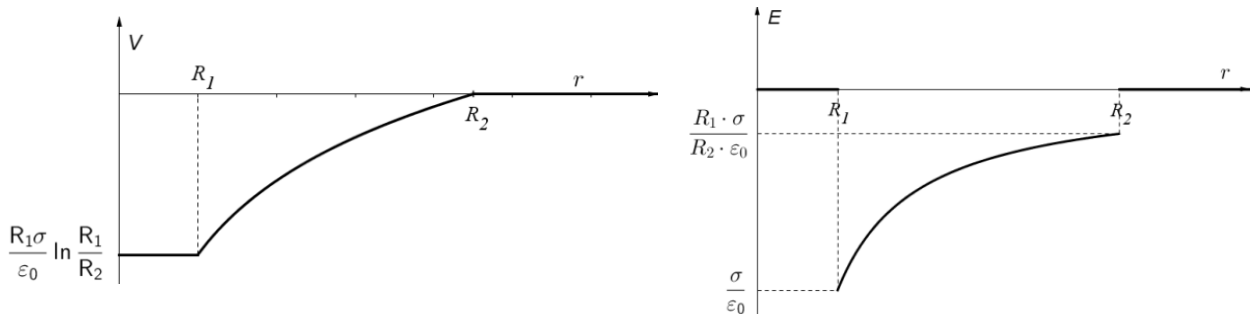
$r < R_1$:
$$V(r) = \frac{R_1 \sigma}{\epsilon_0} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

Grafisk:



- e) Dersom den indre sylindren har negativ ladning og den ytre positiv, vil det elektriske feltet ha retning innover mot sentrum i sylindren. Inni den indre sylindren og utenfor begge, vil fortsatt det elektriske feltet være 0. I området mellom sylindren og røret vil det elektriske feltet følge samme forløp som i c), men med motsatt fortegn (eller som nevnt, retning). Hvis potensialet fortsatt skal være 0 uendelig langt borte, må potensialet inni røret og sylindren være negativt. Men siden det bare er retningen til, og ikke verdien av, det elektriske feltet som endrer seg, er det bare fortegnet til potensialet som endres.

I $V(a) - V(b) = \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l}$ vil $\vec{E} \parallel d\vec{l}$, og dermed får vi ikke med faktoren $\cos 180^\circ$. Dermed ser vi at potensialet får motsatt fortegn.



Oppgave 3 (Vekt 25%)

- a) Bruk Amperes lov til å vise at magnetfeltet rundt en lang rett leder som fører strømmen I er gitt ved

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- b) I mange tilfeller plasseres den strømførende lederen i senterlinjen i en hul leder som fører en like stor strøm i motsatt retning. Hva er poenget med det?

Løsning:

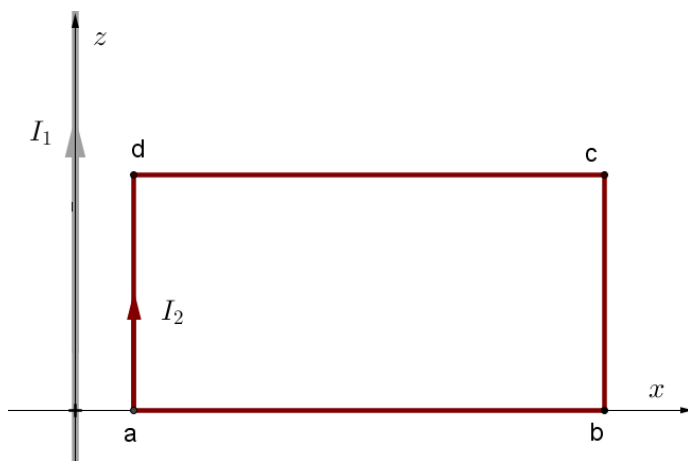
- a) Amperes lov: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{encl}$

Vi vet at $B = B(r)$ og dermed blir $d\vec{l} \parallel \vec{B}$ dersom vi lar integrasjonssløyfa være en sirkel rundt lederen. $I_{encl} = I$ og dermed får vi

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = B \oint dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- b) Poenget med en like stor og motsatt rettet strøm, er at $I_{encl} = 0$, og dermed blir $B = 0$ utenfor kableen.

En rektangulær ledersløyfe $abcd$ ligger i xz -planet og fører strømmen I_2 . Kortsidene i rektangelet har lengde L og langsidenes lengde $2L$. Utenfor sløyfa fører en lang rett leder strømmen I_1 i positiv z -retning. Se figur 8.

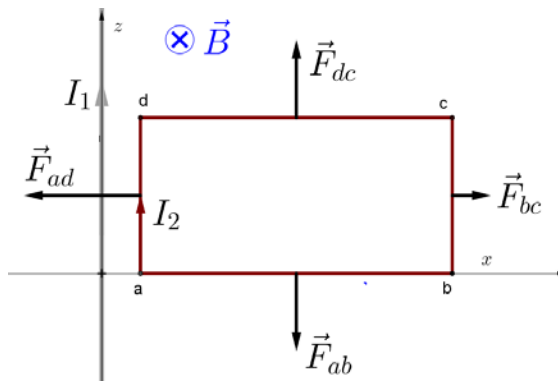


Figur 8

- c) Bestem summen av kreftene på ledersløyfa? Hva er det magnetiske dreiemomentet?

Løsning:

- c) Den magnetiske kraften på en strømførende leder i et magnetfelt er gitt ved $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$. Retningen for kraften på hver side av sløyfa blir dermed som vist i figuren under



Her er $\vec{B} \perp d\vec{l}$ for alle delene av ledersløyfa. \vec{F}_{dc} vil være like stor, men motsatt rettet av \vec{F}_{ab} . Disse kreftene vil dermed kansellere hverandre.

Siden lederstykket ad er nærmest den lange, rette lederen, vil \vec{F}_{ad} være større enn \vec{F}_{bc} . Summen av kreftene vil ha retning i negativ x-retning.

Verdier:

$$F_{ad} = I_2 L B_{ad} = I_2 L \cdot \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi a}$$

$$F_{bc} = I_2 L B_{bc} = I_2 L \cdot \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi b}$$

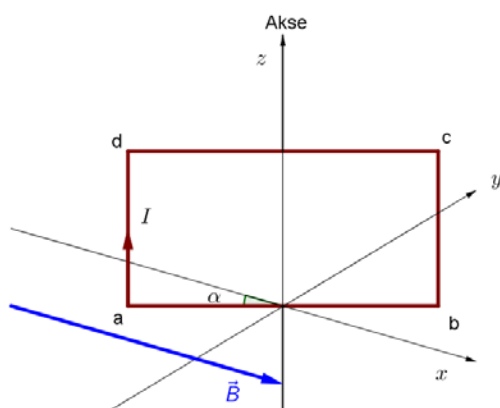
Summen av kreftene:

$$\Sigma F = F_{bc} - F_{ad} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \quad \text{med retning i negativ x-retning.}$$

Siden alle kreftene ligger i sløyfeplanet, kan ingen av dem dreie sløyfa. Dvs. det magnetiske dreiemomentet er 0.

(Med formel: $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = I \vec{A} \times \vec{B}$ og $\tau = IAB \sin \angle(\vec{A}, \vec{B})$. Her er $\vec{A} \parallel \vec{B}$, og dermed blir $\sin \angle(\vec{A}, \vec{B}) = 0$, og dermed blir $\tau = 0$.)

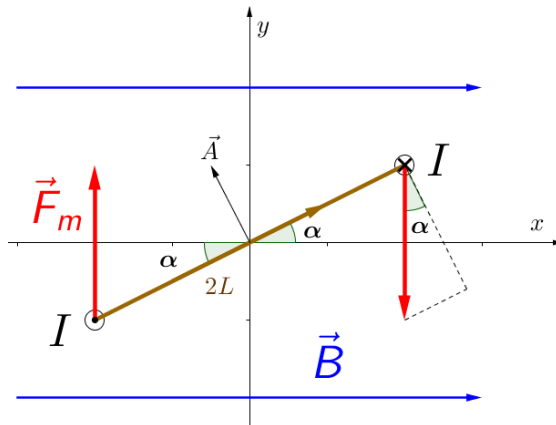
Ledersløyfa plasseres i et homogent magnetfelt med retning i positiv x-retning. Planet ledersløyfa ligger i dreies om z-aksen gjennom midtpunktene på langsidene, slik at sløyfeplanet danner vinkelen α med xz-planet. Se figur 9.



Figur 9

- d) Hva vil skje med ledersløyfa når den slippes fra posisjonen vist i figur 9? Tegn tydelig figur sett i retning ned på xy-planet og forklar hvilke krefter og dreiemoment som virker på sløyfa.

Sløyfa med kreftene som virker sett ovenfra ned på xy-planet



Dvs. sløyfa vil dreies med klokka i figuren over.

Dreiemoment:

$$\tau = 2 \cdot L F_m \cos \alpha = 2 L I L B \cos \alpha = A I B \cos \alpha = \mu B \cos \alpha$$

Dersom vi heller uttrykker dreiemomentet med $\phi = \angle(\vec{A}, \vec{B})$ får vi $\tau = \mu B \sin \phi$.

Retning for dreiemomentet er gitt av høyrehåndsregelen for $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$. Da får vi at $\vec{\tau}$ har retning inn i papirplanet.

- e) I hvilken stilling er dreiemomentet størst? I hvilken stilling har ledersløyfa størst potensiell energi?

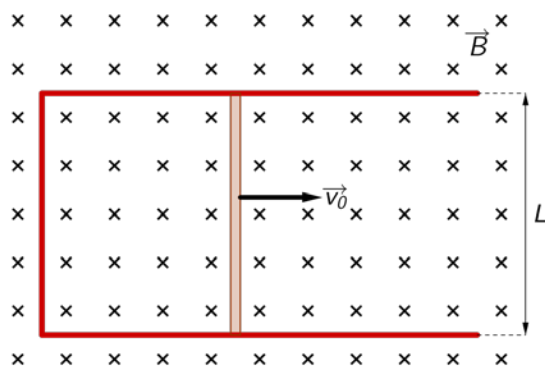
Løsning:

Dreiemomentet er størst når den magnetiske kraften står vinkelrett på planet ledersløyfa ligger i. Da er $\vec{A} \perp \vec{B}$ og $\sin \phi$ har sin største verdi. I vårt tilfelle skjer det når ledersløyfa ligger i xz-planet.

Ledersløyfa har sin største potensielle energi når dreiemomentet er null, men vi har ustabil likevekt. Det skjer når $\phi = \angle(\vec{A}, \vec{B}) = 180^\circ$, dvs. når sløyfa ligger i yz-planet med \vec{A} i motsatt retning av \vec{B} i figuren over.

Oppgave 4 (Vekt 25%)

Figur 10 viser en U-formet elektrisk leder som ligger horisontalt i et homogent magnetisk felt der \vec{B} har retning vinkelrett på planet lederen ligger i. En metallstav ligger oppå lederen. Metallstaven er i elektrisk kontakt med lederen og kan gli uten friksjon.



Figur 10

Verdien av den magnetiske flukstettheten er B . Resistansen i ledersløyfa antar vi er konstant lik R . Lengden av metallstaven er L og massen m . Metallstaven får et dytt slik at den beveger seg med utgangsfarten v_0 mot høyre.

Vi ser først på situasjonen i det øyeblikket der staven har farten v_0 .

- Bestem verdi og retning til strømmen som blir induisert i kretsen.
- Hvorfor vil det oppstå en magnetisk kraft på staven? Bestem verdi og retning til denne kraften.

Løsning:

- Siden den magnetiske fluksen innenfor ledersløyfa endres, induseres det en elektromotorisk spenning. Faradays induksjonslov

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Her er $d\Phi(t) = B \cdot dA = B \cdot L \cdot ds$ dvs. $|\varepsilon(t)| = \frac{d\Phi}{dt} = BL \frac{ds}{dt} = BLv_0$

Indusert strøm

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BLv_0}{R}$$

Siden den magnetiske fluksen øker, vil den induserte strømmen sette opp et magnetfelt med motsatt retning av det opprinnelige. Da må strømmen ha retning mot klokka.

- b) Siden strøm er ladninger i bevegelse, og ladninger i bevegelse i et magnetfelt utsettes for en magnetisk kraft, vil det virke en kraft på staven

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \quad \text{eller} \quad \vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

Ladningene har retning oppover staven, magnetfeltet har retning inn i papirplanet. Kraften som oppstår har derfor retning mot venstre på figuren.

Siden alle størrelsene står normalt på hverandre får vi

$$F = ILB = \frac{BLv_0}{R} \cdot LB = \frac{B^2 L^2 v_0}{R}$$

Etter hvert som tiden går, vil farten til metallstaven endre seg. Vi forutsetter at $v = v_0$ når $t = 0$.

- c) Bruk Newtons 2.lov til å vise at farten er gitt ved $v(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$.
Bestem uttrykket for τ . Vis at τ har enhet sekund.

- d) Skisser grafen til $v(t)$. Hvor langt vil metallstaven skli før den stopper?

Løsning:

- c) Newtons 2.lov: $\Sigma F = ma$

I dette tilfellet virker kun den magnetiske kraften og den virker mot bevegelsesretningen som vi definerer som positiv retning.

$$\begin{aligned} -F_m &= m \cdot v'(t) \\ \Rightarrow -\frac{B^2 L^2}{R} \cdot v(t) &= m \cdot v'(t) \\ \Leftrightarrow v'(t) + \frac{B^2 L^2}{mR} \cdot v(t) &= 0 \end{aligned}$$

Dette er en 1.ordens diff.likning som løses ved å multiplisere med den integrerende faktoren

$$\left(v'(t) + \frac{B^2 L^2}{mR} \cdot v(t) \right) \cdot e^{\frac{B^2 L^2}{mR} t} = 0$$

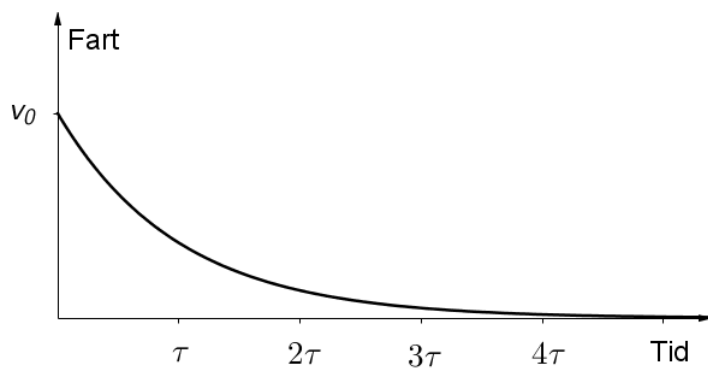
$$\left(v(t) \cdot e^{\frac{B^2 L^2}{mR} t} \right)' = 0$$

$$v(t) \cdot e^{\frac{B^2 L^2}{mR} t} = C$$

$$v(t) = C \cdot e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t} \quad v(0) = v_0 \Rightarrow C = v_0 \Rightarrow v(t) = v_0 e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t} \quad \Rightarrow \tau = \frac{mR}{B^2 L^2}$$

Enhet:
$$[\tau] = \frac{\text{kg} \cdot \Omega}{\text{T}^2 \text{m}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{V}}{\text{A}}}{\left(\frac{\text{N}}{\text{Am}}\right)^2 \text{m}^2} = \frac{\text{kgVA}}{\text{N}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{Nm} \cdot \text{C}}{\text{C}} \cdot \frac{\text{C}}{\text{s}}}{\text{N}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{N} \cdot \text{s}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{s}} = \text{s}$$

d) Grafisk



Tilbakelagt strekning = arealet under fartsgrafen

$$s = \int_0^{\infty} v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} dt = v_0 \left[-\tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^{\infty} = v_0 (0 + \tau) = v_0 \tau = \frac{v_0 m R}{B^2 L^2}$$