

Program for lærerutdanning

Eksamensoppgave i FY6017 Elektromagnetisme

Faglig kontakt under eksamen: Astrid Johansen

Tlf.: 918 22 404

Eksamensdato: 16.12.2016

Eksamenstid (fra-til): kl.09.00 – 14.00

Tillatte hjelpemidler: Grafisk kalkulator
Formelvedlegg (vedlagt oppgaveteksten)

Annen informasjon: Vurderingskriterier: se s.2

Målform/språk: Bokmål

Antall sider (uten forside):

Antall sider vedlegg:

- s. Vedlegg 1: Noen konstanter, enheter og fysiske størrelser
- s. Vedlegg 2: Noen formler i fysikk
- s. Vedlegg 3: Noen formler i matematikk

Kontrollert av:

Dato

Sign

Vurderingskriterier

Ved vurderingen vektlegges din evne til å

- gjøre greie for fysiske fenomener
- gjøre greie for kvalitative vurderinger
- vise regneferdighet
- vise eksperimentelle ferdigheter
- presentere besvarelsen

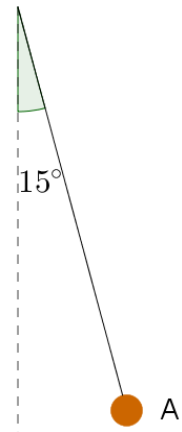
Prosentene på hver oppgave indikerer hvor mye den teller i det endelige resultatet for hele denne eksamensoppgaven.

Oppgave 1 (Vekt 15 %) Punktladninger og krefter

En kule A med masse $m = 5,0 \text{ g}$ henger i ro i en ikke-ledende og masseløs snor i et horisontalt, homogent elektrisk felt. Kula har ladning $q = +3,0 \cdot 10^{-7} \text{ C}$. Snora danner 15° med loddlinjen. Se figur til venstre.

Kula kan betraktes som en punktladning.

- Tegn kreftene som virker på kula. Hvor stort er snordraget?
- Finn størrelsen og retningen til den elektriske feltstyrken i det homogene elektriske feltet.



Det elektriske feltet skyldes en stor vertikal negativt ladd plate som befinner seg $0,50 \text{ m}$ til høyre for kule A. Plutselig ryker snora.

- Hvor langt under den opprinnelige posisjonen vil kula treffe plata?

Løsning:

- Ut fra Newtons 1.lov og geometrien i problemet, ser vi at

$$S = \frac{G}{\cos 15^\circ} = \frac{5,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{\cos 15^\circ} = 0,051 \text{ N}$$

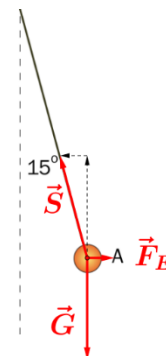
- Med samme betingelser som i a) ser vi at

$$F_E = G \tan 15^\circ$$

I tillegg vet vi at $F_E = qE$

Dermed

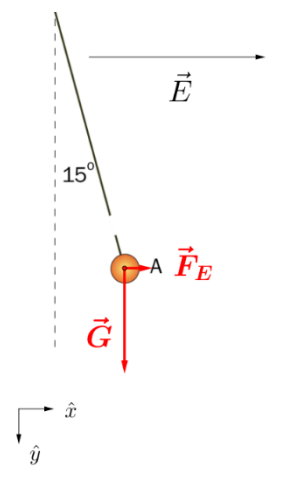
$$E = \frac{G \tan 15^\circ}{q} = \frac{5,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot \tan 15^\circ}{3,0 \cdot 10^{-7} \text{ C}} = 44 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$



- Når snora ryker, forsvinner snordraget. Siden både G og den elektriske kraften F_E er konstante, får kula en konstant akselerasjon gitt av vektorsummen av de to kreftene. Dermed vil kula akselereres retlinjet i samme retning som snora hadde i utgangspunktet. Altså ser vi at vi får den samme geometrien

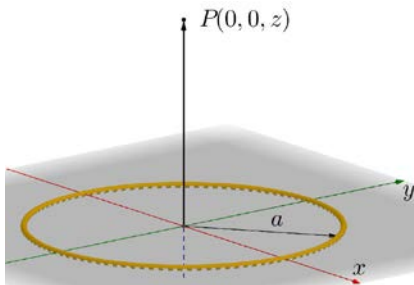
$$\frac{s_x}{s_y} = \tan 15^\circ \Leftrightarrow s_y = \frac{s_x}{\tan 15^\circ} = \frac{0,50 \text{ m}}{\tan 15^\circ} = 1,9 \text{ m}$$

Alternativt kan man finne falltiden akselerasjonen i x -retning gir og bruke denne til å beregne strekningen i y -retning.



Oppgave 2 (Vekt 10%) Potensial og elektrisk felt

En sirkulær leder med radius a har total ladning $+Q$ og uniform linjeladning λ . Et punkt P er plassert på akse gjennom sentrum av lederen i avstand z fra planet lederen ligger i. Se figuren under.



- a) Vis at det elektriske potensialet i P er

$$V(z) = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}} \quad \text{forutsatt at } V(z \rightarrow \infty) = 0$$

Vurder hva dette resultatet gir for store og små verdier av z .

- b) Hva er det elektriske feltet i P ? Angi både verdi og retning. Forklar hvordan dette kan bestemmes på to ulike måter. (Men det holder med en utregning.)

Løsning:

- a) Generelt er potensialet fra et ladningselement gitt ved $dV = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r}$

I dette tilfellet vil alle ladningselementene ha samme avstand til punktet P

$$r = \sqrt{a^2 + z^2}$$

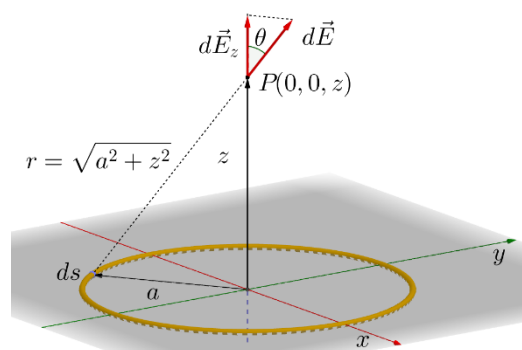
Ladningen til et ladningselement er $dQ = \lambda ds$ der $\lambda = \frac{Q}{2\pi a}$. Samlet potensiale i P :

$$V = \int_s \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_s \lambda ds = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_s ds = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot 2\pi a = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}} \quad \text{qed}$$

- b) Det elektriske feltet i P kan enten beregnes ved å summere bidragene til feltet fra alle ladningselementene på ringen:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{dQ}{r^2} \hat{r}$$

Siden elektrisk felt er en vektor, må vi i dette tilfellet se på vektorsummen. Av symmetrigrunner vil x - og y -komponentene



kanselleres, og vi sitter igjen bare med z-komponenten. Her ser vi at

$$dE_z = dE \cdot \cos \theta = dE \cdot \frac{z}{r}$$

Dermed får vi

$$\begin{aligned} E_z &= \int dE \cdot \frac{z}{r} = \frac{z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int dQ = \frac{z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int \lambda ds = \frac{z\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int ds \\ &= \frac{z\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot 2\pi a = \frac{\lambda a z}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad \text{Dvs.} \quad \vec{E} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}$$

En enklere måte er å bruke potensialgradienten $\vec{E} = -\nabla V$. I dette tilfellet er $V = V(z)$, og dermed blir

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

Fra a) har vi at $V(z) = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}}$ og dermed blir

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\lambda a}{2\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}} \right) = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left((a^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) (a^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2z \\ &= -\frac{\lambda a z}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Altså blir det elektriske feltet i P $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}$

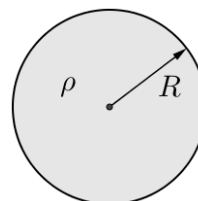
Men altså: en av disse utregningene er tilstrekkelig!

Oppgave 3 (Vekt 15%) Gauss lov

Vi ser på ei massiv isolerende kule med radius R . Kula har romladningstetthet

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right)$$

der $\rho_0 = \frac{3Q}{\pi R^3}$ er en positiv konstant.



- Vis at den totale ladningen på kula er Q .
- Bruk Gauss lov til å finne det elektriske feltet $\vec{E}(r)$ for alle r .
- For hvilken verdi av r er det elektriske feltet størst?

Løsning:

a) Total ladning på kula: $Q = \int_{\text{kule}} \rho(r) dV$

Sammenheng mellom r og V : $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \Leftrightarrow dV = 4\pi r^2 dr$

Dermed får vi

$$\begin{aligned} Q &= \int_{\text{kule}} \rho(r) dV = \int_0^R \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= 4\pi \rho_0 \int_0^R \left(r^2 - \frac{1}{R} r^3\right) dr = 4\pi \rho_0 \left[\frac{1}{3} r^3 - \frac{1}{4R} r^4 \right]_0^R = 4\pi \rho_0 \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{4} \right) = \frac{\pi \rho_0 R^3}{3} \end{aligned}$$

b) Bruker konsentriske kuleflater som integrasjonsflater i Gauss lov.

Dersom $r > R$ omslutter integrasjonsflata hele ladningen på kula, dvs.

$$\oint_{\text{flata}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Her er $\vec{E} = E(r) \hat{r}$ sånn at $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ og $E(r)$ = konstant for en gitt r . Dermed blir integralet

$$E(r) \oint_{\text{flata}} dA = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Dersom $r < R$, må vi finne hvor mye ladning som er omsluttet av integrasjonsflata:

$$Q_{\text{encl}} = \int_V \rho(r) dV = \int_0^r \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi \rho_0 \int_0^r \left(r^2 - \frac{1}{R} r^3\right) dr = 4\pi \rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R} \right)$$

Gauss lov:

$$\oint_{\text{flata}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi \rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R} \right) \Leftrightarrow E(r) = \frac{\rho_0 r}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{r}{4R} \right)$$

Med vektorer og totalladning: $\vec{E}(r) = \frac{3Q}{\pi R^3} \cdot \frac{r}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{r}{4R} \right) \hat{r}$

c) Største verdi av E må enten være for $r < R$ eller for $r = R$, siden det elektriske feltet avtar kvadratisk utenfor kula.

Ekstremalverdi $\Leftrightarrow \frac{dE}{dr} = 0$

$$\frac{dE}{dr} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} - \frac{2\rho_0 r}{4\epsilon_0 R} = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}R$$

Sjekker verdien:

$$E\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{3Q}{\pi R^3} \cdot \frac{2R}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{2R}{3 \cdot 4R} \right) = \frac{Q}{3\pi \epsilon_0 R^2}$$

På overflata: $E(R) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2}$

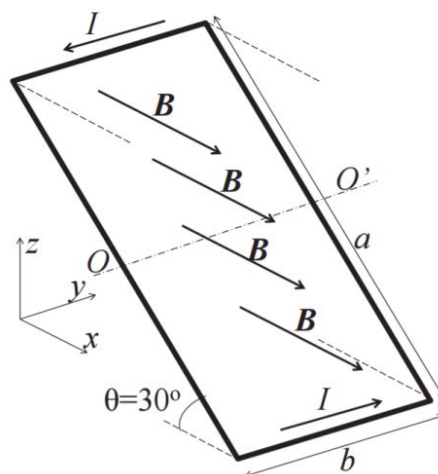
Dvs. at det elektriske feltet har sin største verdi når $r = \frac{2}{3}R$.

Oppgave 4 (Vekt 15 %) Magnetisk fluks og krefter

En plan rektangulær strømsløyfe har sidekanter a og b og er orientert 30° med x -aksen. Figuren ved siden av viser strømsløyfa og i tillegg positive koordinatreninger.

Sidene er $a = 0,200 \text{ m}$ og $b = 0,100 \text{ m}$.

Sløyfa fører en konstant strøm $I = 5,00 \text{ A}$ i retning mot klokka (sett ovenfra), og er plassert i et uniformt magnetisk felt der $B = 1,50 \text{ T}$ i positiv x -retning.



- Regn ut den magnetiske fluksen gjennom sløyfa.
- Tegn inn kreftene som gir et dreiemoment på sløyfa, og beregn dreiemomentet (både verdi og retning).

Strømsløyfa dreies om aksene OO' fra stillingen i figuren til posisjonen der $\theta = 0^\circ$, dvs. at ledersløyfa ligger i xy -planet.

- Øker eller minker den potensielle energien til ledersløyfa? Begrunn.

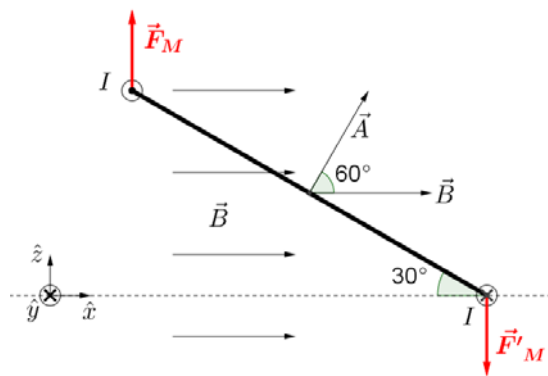
Løsning:

- Magnetisk fluks gjennom sløyfa

$$\begin{aligned}\Phi_B &= \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \oint B \cos \angle(\vec{B}, \vec{A}) dA = B \cos 60^\circ \cdot A \\ &= 1,50 \text{ T} \cdot 0,5 \cdot 0,200 \text{ m} \cdot 0,100 \text{ m} \\ &= 15,0 \cdot 10^{-3} \text{ Tm}^2\end{aligned}$$

- Kreftene som dreier strømsløyfa:

$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$ gir at den magnetiske kraften virker i positiv z -retning på øvre tverrdel av sløyfa og i negativ z -retning på nedre tverrdel av sløyfa. Krefter på de to langkantene vil virke i motsatte y -retninger og ikke bidra til dreiemomentet.



$$\tau = 2 \cdot F_M \sin 60^\circ \cdot \frac{a}{2} = IabB \sin 60^\circ = 5,00 \text{ A} \cdot 0,200 \text{ m} \cdot 0,100 \text{ m} \cdot 1,50 \text{ T} \cdot \sin 60^\circ = 0,130 \text{ Nm}$$

Dreiemomentet vil dreie ledersløyfa med klokka, dvs. at $\vec{\tau}$ har retning i negativ y -retning.

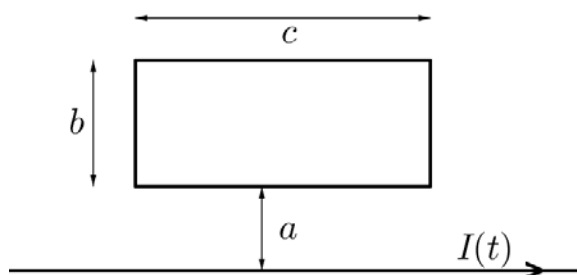
- Hvis sløyfa dreies slik at den ligger i xy -planet, må vi bruke en ytre kraft mot det magnetiske feltet. Da øker den potensielle energien.

Oppgave 5 (Vekt 15%)

- a) Vis at magnetfeltet i avstand r rundt en lang, rett leder som fører strømmen I er gitt ved

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

I avstand a fra lederen i a) er det en rektangulær ledersløyfe med sidekanter b og c som vist i figuren under.



I lederen går det en strøm som varierer med tida som angitt under

$$I(t) = \begin{cases} ktI_0 & \text{når } 0 < t < 1/k \\ I_0 & \text{når } t \geq 1/k \end{cases} \quad \text{der } k \text{ er et positivt, konstant tall}$$

- b) Hvorfor induseres det en strøm i ledersløyfa og hvilken retning har den? Forklar.
c) Bestem den induserte emsen $\varepsilon(t)$.

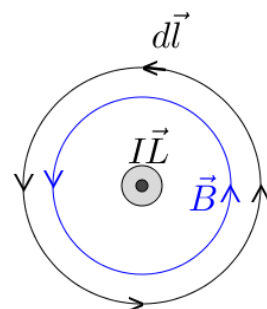
Løsning:

- a) Bruker Ampères lov $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encl}}$

Legger en sirkulær integrasjonskurve rundt tverrsnittet av lederen med positiv integrasjonsretning i samme retning som retningen til magnetfeltet. Siden $B = B(r)$ og $d\vec{l} \parallel \vec{B}$, får vi

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) \oint dl = B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

med retning som angitt i figuren.



- b) Siden den varierende strømmen gir et varierende magnetfelt innenfor strømsløyfa, endres den magnetiske fluksen i sløyfa og de vil det ut fra Faradays lov induseres en elektromotorisk spenning som igjen er opphavet til en indusert strøm.
Her øker strømmen, og dermed øker den magnetiske fluksen i strømsløyfa. I følge Lenz lov vil den induserte strømmen forårsake et magnetfelt som virker mot endringen. I dette tilfellet gir strømmen fra lederen et magnetfelt med retning opp av papiplanet inne i lederen. Den induserte strømmen vil da ha retning motsatt av dette, altså opp av papiplanet. Da må den induserte strømmen ha retning med klokka.

c) Faradays induksjonslov: $\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -A \frac{dB}{dt}$

Fra a) har vi at magnetfeltet rundt den strømførende lederen er $B(t, r) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}$. Dvs. at

fluksen også varierer med r og vi må integrere for å finne samlet fluks:

$$\Phi_B = \int_{\text{sløyfa}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Her er $\vec{B} \parallel d\vec{A}$ og $dA = c dr$. Dermed får vi

$$\Phi_B = \int_{\text{sløyfa}} B dA = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{c dr}{r} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right)$$

Emsen blir

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right) \right) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right) \cdot I'(t)$$

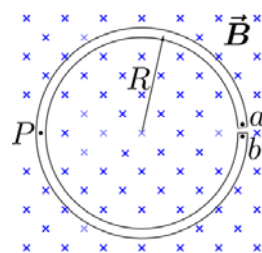
Innsatt for strømmen:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 \alpha I_0}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right), & 0 < t < 1/k \\ 0, & t \geq 1/k \end{cases}$$

Negativt fortegn vil her si at emsen gir opphav til et magnetfelt i motsatt retning av det påtrykte.

Oppgave 6 (Vekt 10%) Elektromotorisk spenning

Figuren ved siden av viser en sirkulær leder i et uniformt magnetfelt B med retning inn i papiplanet. Punktene a og b er ikke i elektrisk kontakt, men ligger så nært hverandre at lederen kan betraktes som en hel sirkel. $R = 15,0$ cm og magnetfeltet øker med $0,400$ T/s. Vi ser på et elektron som befinner seg i punktet P .



- Hvorfor virker det en elektrisk kraft på elektronet? Hvor stor er den og hvilken retning har den?
- Berغن potensialforskjellen mellom a og b . (Du kan se bort fra den lille avstanden mellom a og b .)

Løsning:

- Siden vi har en økning i fluks, vil det oppstå en ems og et elektrisk felt som forårsaker en elektrisk kraft på elektronet.

Siden fluksen øker, vil emsen kunne gi en industert strøm som motvirker denne økningen. Da må industert B -felt ha retning opp av papirplanet inne i ringen. Da må strømmetningen være fra a til b . Kraftretningen på elektronet vil være motsatt, altså med ringen, mot a .

Størrelse på kraften: $\vec{F}_e = e\vec{E}$

Faradays induksjonslov: $\mathcal{E}(t) = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

Pga. symmetri og at det ikke finnes ladninger innenfor sløyfa må det elektriske feltet være sirkulært og ha samme retning som den induserte strømmen ville hatt. Altså er $\vec{E} \parallel d\vec{l}$.

Av symmetrigrunner ser vi også at $E = E(r) =$ konstant for en gitt r . Fortegnet har vi tatt hånd om med Lenz' regel, og regner derfor bare på absoluttverdier videre.

$$\left| E \oint d\vec{l} \right| = \frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow E \cdot 2\pi R = A \cdot \frac{dB}{dt} \Leftrightarrow E = \frac{\pi R^2}{2\pi R} \cdot \frac{dB}{dt} = \frac{R}{2} \cdot \frac{dB}{dt}$$

Kraften blir dermed

$$F = eE \Rightarrow F = e \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{dB}{dt} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 7,50 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 0,400 \text{ T/s} = 4,80 \cdot 10^{-21} \text{ N}$$

b) Potensialforskjellen mellom a og b :

Fra a) har vi at $E = \frac{F_e}{e} = 3,00 \cdot 10^{-2} \text{ N/C}$

$$\mathcal{E} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \int_a^b dl = E \cdot 2\pi R = 3,00 \cdot 10^{-2} \text{ N/C} \cdot 2\pi \cdot 0,150 \text{ m} = 28,3 \text{ mV}$$

For at den induserte strømmen skal kunne gå fra a til b må $V_a - V_b = 28,3 \text{ mV}$.

Oppgave 7 (Vekt 15%)

En tynn rett leder fører strømmen I og har lengde $2L$. Et punkt P ligger i avstand R fra lederen. Det er like lang avstand fra P til lederens to endepunkter. Magnetfeltet i P fra lederen er gitt av Biot-Savarts lov

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

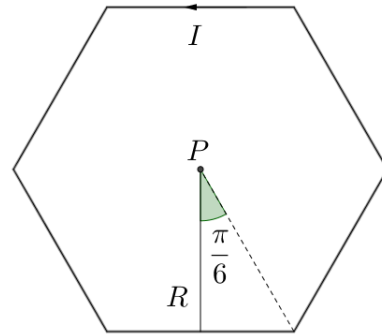
a) Tegn en figur som viser lederen og punktet P . Vis tydelig størrelsene $I d\vec{l}$, \hat{r} , \vec{B} , R og $2L$.

b) Bruk opplysningene over til å vise at styrken til magnetfeltet i P er gitt ved

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R \sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2}}}$$

- c) Ta utgangspunkt i uttrykket over og f.eks. 6-kanten i figuren ved siden av og finn et uttrykk for magnetfeltet \vec{B}_n i sentrum av en strømførende regulær n -kant.

Avstanden fra sentrum i mangekanten til midtpunktet på hver av de n linjestykkene er R .



Vis at når $n \rightarrow \infty$ vil $B_n \rightarrow \frac{\mu_0 I}{2R}$

som er uttrykket for magnetisk feltstyrke i sentrum av en sirkulær leder.

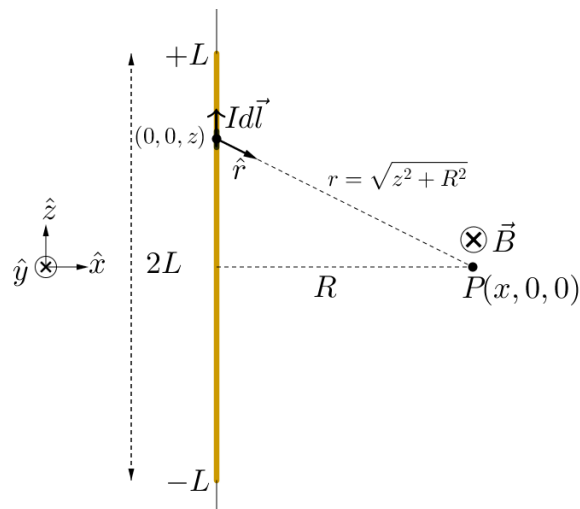
Oppgitt:

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + b)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{b\sqrt{ax^2 + b}}$$

$\tan x \approx x$ når $|x| \ll 1$

Løsning:

- a) Figur:



- b) Styrken på magnetfeltet i P :

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{|I d\vec{l} \times \hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I dl \sin \angle(d\vec{l}, \hat{r})}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I dl}{r^2} \cdot \frac{R}{r}$$

Av figuren ser vi at $dl = dz$ og $r = \sqrt{z^2 + R^2}$. Dermed får vi

$$\begin{aligned}
 B_p &= \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I R}{2\pi} \int_0^L \frac{dz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{\mu_0 I R}{2\pi} \left[\frac{z}{R^2 \sqrt{z^2 + R^2}} \right]_0^L = \frac{\mu_0 I R}{2\pi} \cdot \frac{L}{R^2 \sqrt{L^2 + R^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cdot \frac{L}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2}}}
 \end{aligned}$$

- c) Dersom vi har en regulær 6-kantet leder, kan vi beregne magnetfeltet i sentrum fra hver av de 6 rette kantene (B_6) ut fra det vi fant i b) og så summere disse til det totale magnetfeltet, $B_{tot} = 6 \cdot B_6$. Fra b) har vi

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R \sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2}}}$$

Av figuren ser vi at $L = R \tan \frac{\pi}{6}$. Dvs. at

$$B_6 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R \sqrt{1 + \frac{R^2}{R^2 \tan^2 \frac{\pi}{6}}}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \frac{\pi}{6}}}}$$

Dermed er magnetfeltet i sentrum av en regulær 6-kant

$$B = 6 \cdot B_6 = \frac{6 \cdot \mu_0 I}{2\pi R \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \frac{\pi}{6}}}}$$

For en tilsvarende n -kant får vi

$$B = n \cdot B_n = \frac{n \cdot \mu_0 I}{2\pi R \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \frac{\pi}{n}}}}$$

Når $n \gg \pi$ vil $\tan^2 \frac{\pi}{n} \rightarrow \frac{\pi}{n}$ og dermed

$$B = \frac{n \cdot \mu_0 I}{2\pi R \sqrt{1 + \frac{n^2}{\pi^2}}} = \frac{n \cdot \mu_0 I}{2R \sqrt{\pi^2 + n^2}}$$

Når $n \rightarrow \infty$ vil $\pi^2 + n^2 \rightarrow n^2$ og vi får

$$B = \frac{n \cdot \mu_0 I}{2R \sqrt{n^2}} = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad \text{qed}$$