

Beregninger og visualisering av elektriske felt

Fundamentet

- Det elektriske feltet rundt en punktladning med ladning q er gitt ved

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

- Dersom vi har flere punktladninger, beregnes det totale feltet som vektorsummen av bidraget fra hver punktladning
- Dersom vi har en ladningsfordeling, kan vi tenke oss at den er satt sammen av uendelig mange ladningselementer dq . Og hver dq kan betraktes som en punktladning. Da kan vi finne det totale feltet ved å integrere over alle dq .

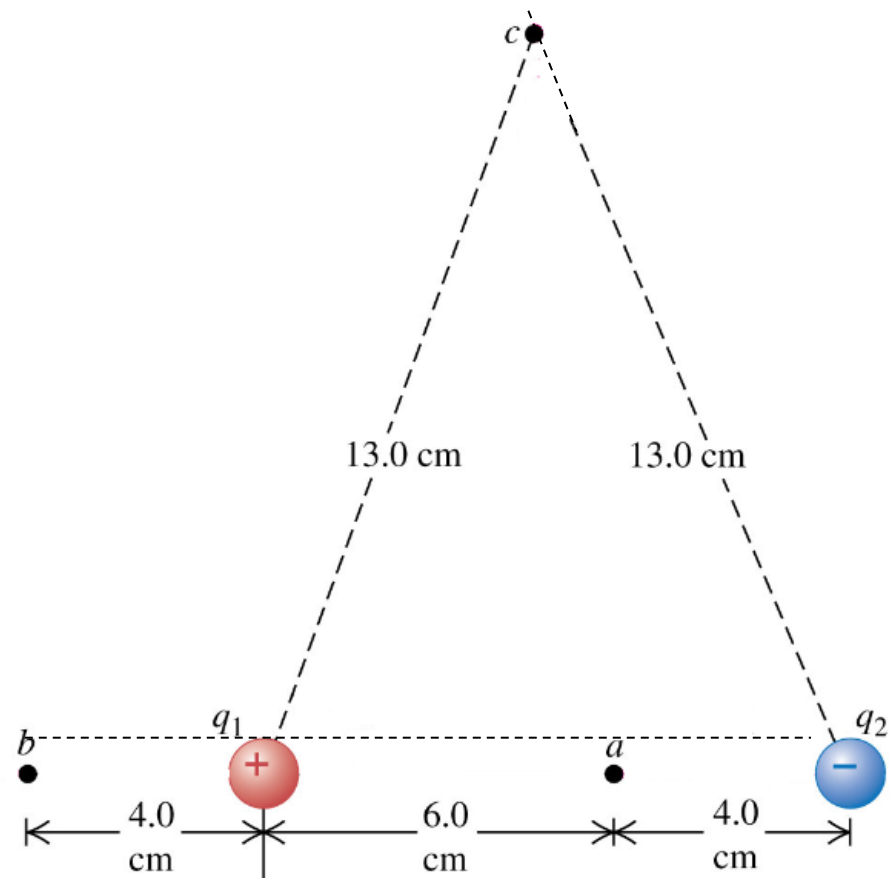


Eksempel. Elektrisk dipol.

En elektrisk dipol består av to like store punktladninger, men den ene er negativ og den andre er positiv. I dette eksemplet er ladningene $q_1 = 12 \text{ nC}$ og $q_2 = -12 \text{ nC}$. Avstanden mellom dem er $0,100 \text{ m}$. Se figur nedenfor.

Finn de elektriske feltene fra q_1 og fra q_2 og det totale feltene

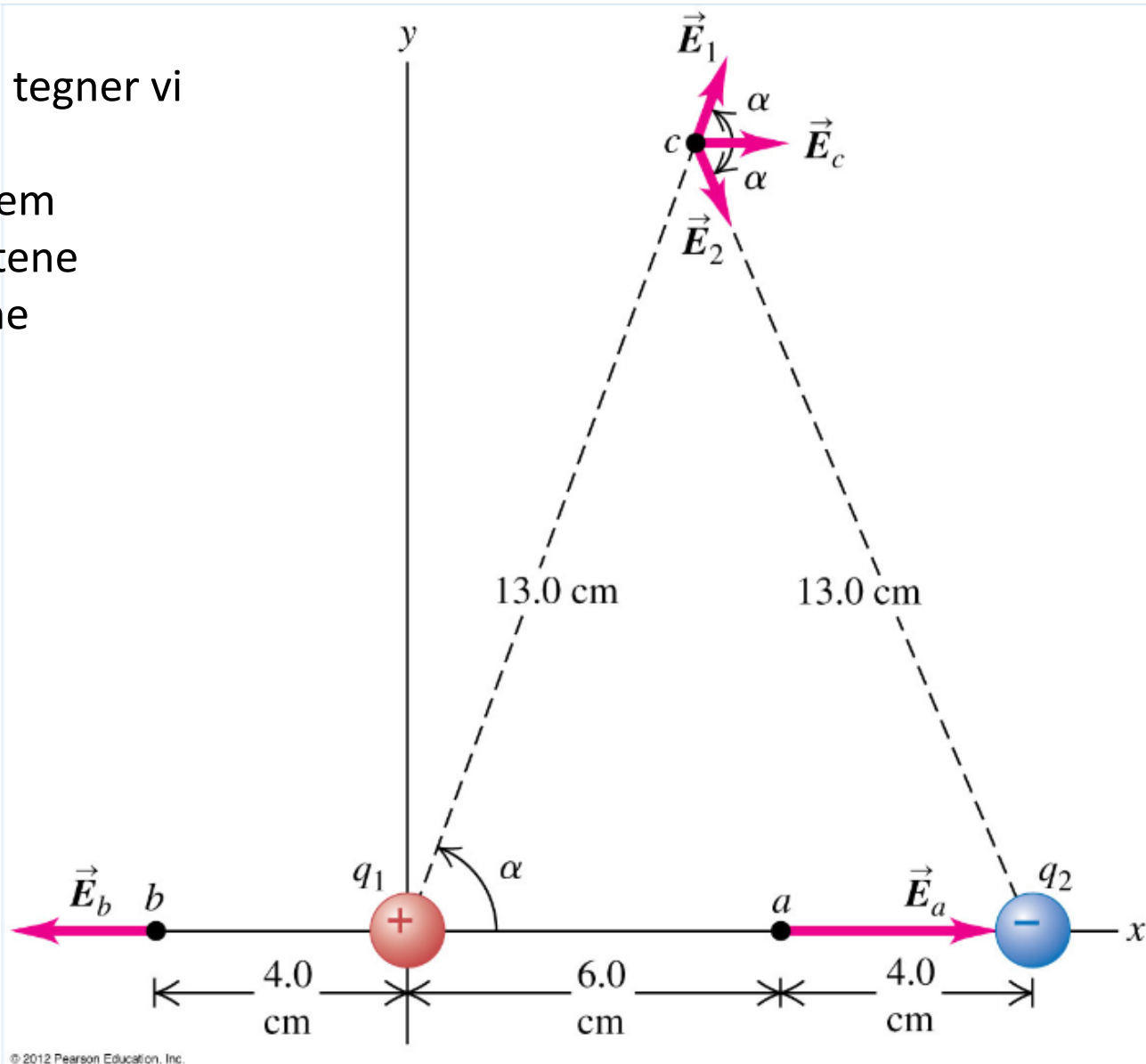
- a) i punkt a
- b) i punkt b
- c) i punkt c.



Løsning

Før vi starter å regne tegner vi inn på figuren:

1. et koordinatsystem
2. de elektriske feltene i de tre punktene



a) Vi beregner feltene fra hver av ladningene:

Fra q_1 i a:
$$E_{1a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1|}{r^2} = (9,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2) \frac{12 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{(0,060 \text{ m})^2} = 3,0 \cdot 10^4 \text{ N/C}$$

Fra q_2 i a:
$$E_{2a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_2|}{r^2} = (9,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2) \frac{12 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{(0,040 \text{ m})^2} = 6,8 \cdot 10^4 \text{ N/C}$$

Begge feltene er i positiv x-retning:

$$\underline{\underline{\vec{E}_a}} = E_{1a} \hat{i} + E_{2a} \hat{i} = (3,0 + 6,8) \cdot 10^4 \text{ N/C} \hat{i} = \underline{\underline{9,8 \cdot 10^4 \text{ N/C} \hat{i}}}$$

b) Fra q_1 i b:
$$E_{1b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1|}{r^2} = (9,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2) \frac{12 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{(0,040 \text{ m})^2} = 6,8 \cdot 10^4 \text{ N/C}$$

Fra q_2 i a:
$$E_{2b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_2|}{r^2} = (9,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2) \frac{12 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{(0,14 \text{ m})^2} = 0,55 \cdot 10^4 \text{ N/C}$$

Feltet fra 1 er i negativ x-retning og fra 2 i positiv x -retning:

$$\underline{\underline{\vec{E}_b}} = -E_{1b} \hat{i} + E_{2b} \hat{i} = (-6,8 + 0,55) \cdot 10^4 \text{ N/C } \hat{i} = \underline{\underline{-6,2 \cdot 10^4 \text{ N/C } \hat{i}}}$$

c) Vi ser på symmetrien i punkt c.

Avstanden fra de to ladningene er den samme, dermed størrelsene av feltene fra de to ladningene de samme.

$$E_{1c} = E_{2c} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1|}{r^2} = (9,0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2) \frac{12 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{(0,130 \text{ m})^2} = 6,39 \cdot 10^4 \text{ N/C}$$

De to feltene har samme x-komponent, begge i positiv retning.

$$E_{1cx} = E_{2cx} = E_{1c} \cos \alpha = 6,39 \cdot 10^3 \text{ N/C} \cdot \frac{5}{13} = 2,46 \cdot 10^3 \text{ N/C}$$

De har også samme y-komponent, men i motsatt retning. Disse vil dermed kansellere hverandre. Dermed får vi

Elektrisk felt i c: $\underline{\underline{\vec{E}_c}} = 2 \cdot 2,46 \cdot 10^3 \text{ N/C } \hat{i} = \underline{\underline{4,9 \cdot 10^3 \text{ N/C } \hat{i}}}$

Løsningsstrategi:

1. Tegn en figur med ladningene, merk av om de er positive og negative
2. Gjør symmetribetraktninger
3. Tegn inn et koordinatsystem
4. Tegn inn de elektriske feltene fra alle ladningene i punktene det spørres om
5. Hvis ladningsfordelingen er punktladninger, summeres de elektriske feltene vektorielt
6. Hvis ladningsfordelingen er kontinuerlig, defineres et lite element med ladning dq . Finn det elektriske feltet i P fra dette elementet og integrer over hele ladningsfordelingen.

Ladningsfordelinger

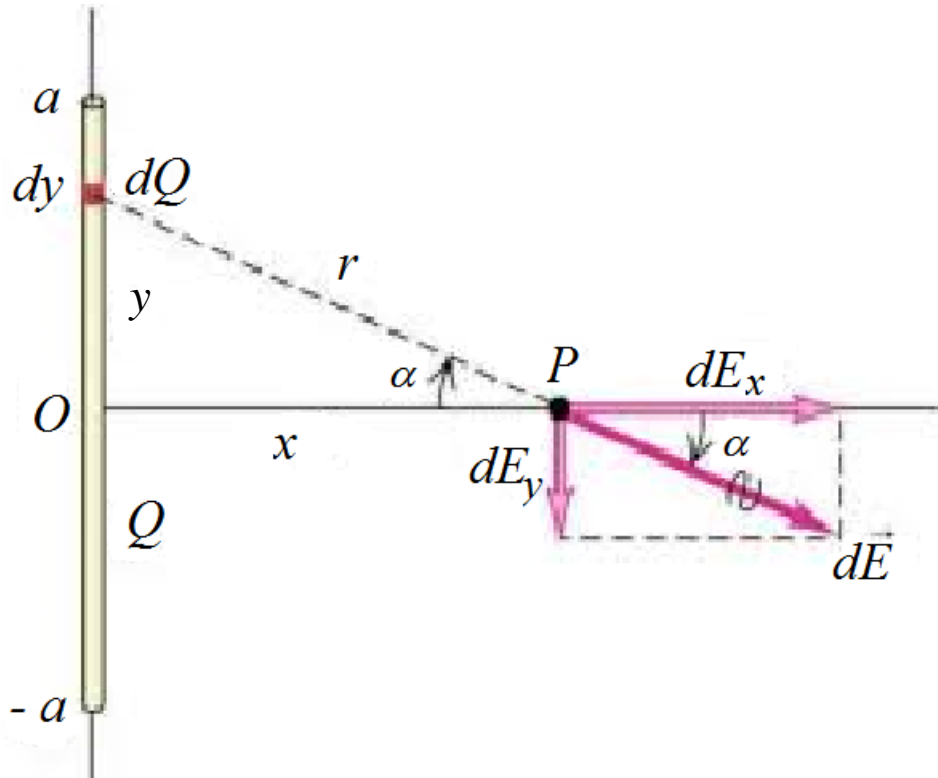
Trenger størrelser som sier noe om hvordan ladningen er fordelt:

- Linjeladningstetthet, λ
 - Enhet C/m
 - Dersom uniform fordeling: $\lambda = \frac{Q}{L}$
- Flateladningstetthet, σ
 - Enhet C/m²
 - Dersom uniform fordeling: $\sigma = \frac{Q}{A}$
- Romladningstetthet, ρ
 - Enhet C/m³
 - Dersom uniform fordeling: $\rho = \frac{Q}{V}$

Hvordan kan dQ uttrykkes?

Eksempel: Feltet fra en linjeladning

Hva er det elektriske feltet i P ?



- Hvordan kan dQ uttrykkes vha. linjeladningstettheten?
- Hva blir uttrykket for dE ?
- Hvilken retning får \vec{E}
- Hvordan dekomponerer vi i denne retningen?
- Hvordan bestemmer vi summen av alle dE ?



Eksempel. Feltet fra en ladd ring.

En positiv ladning Q er jevnt fordelt på en metallring med radius a . Finn det elektriske feltet i en avstand x fra sentrum av ringen.

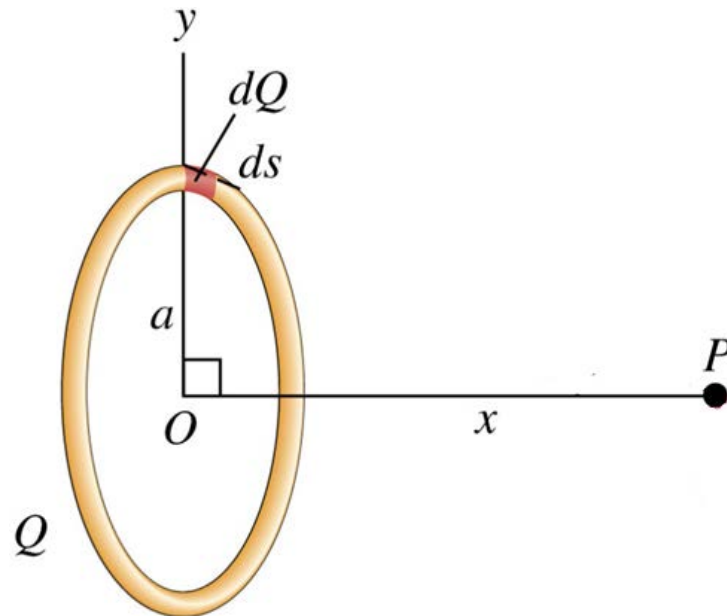


Eksempel: Feltet fra en ladd ring

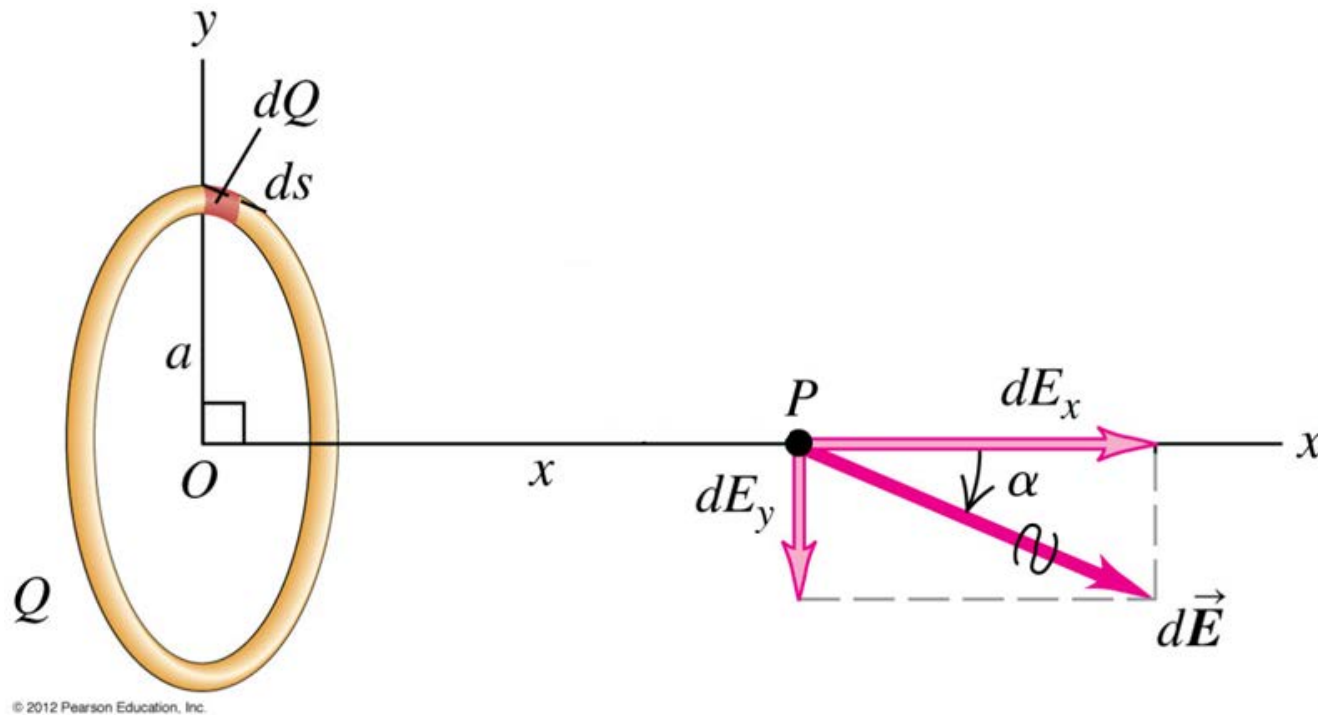
En positiv ladning Q er jevnt fordelt på en metallring med radius a . Finn det elektriske feltet i en avstand x fra sentrum av ringen.

Løsning

Vi tegner ringen, merker av et lite element med ladning dQ et koordinatsystem og punktet P i avstand x .

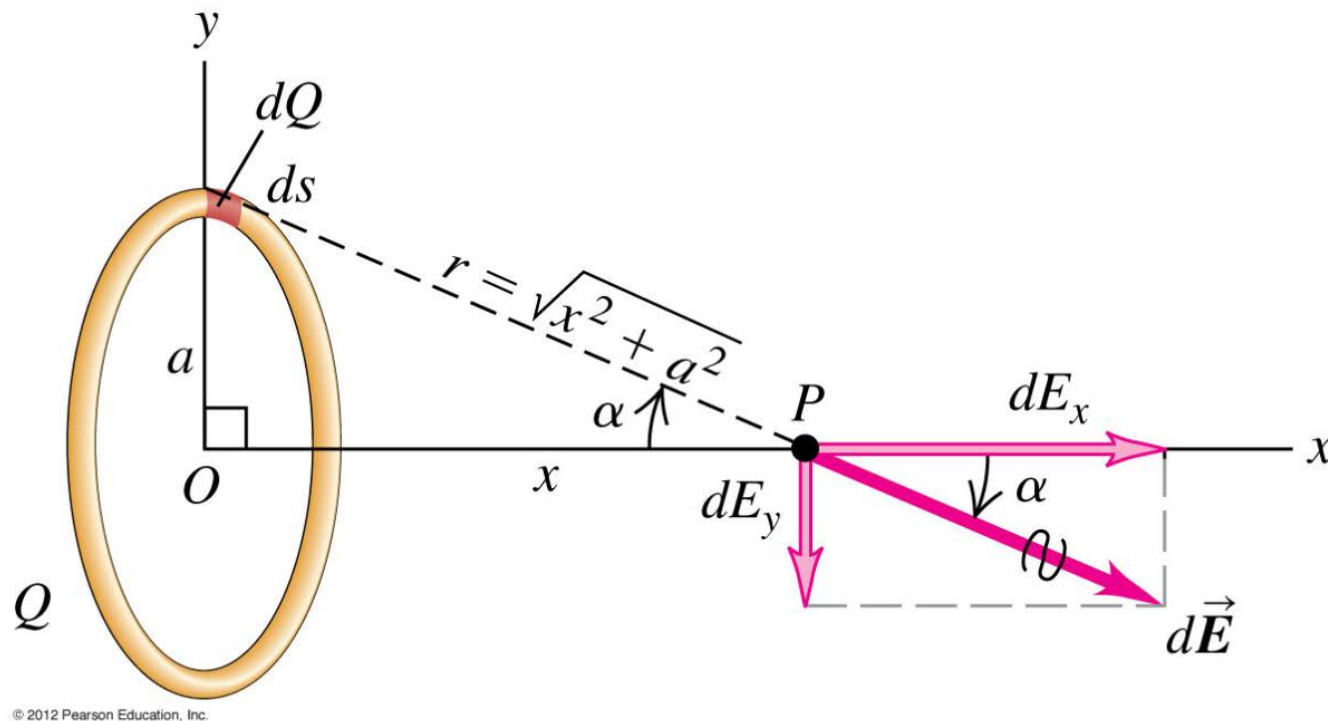


Vi tegner inn det elektriske feltet fra elementet ds og dekomponerer i x- og y – retning.



Vi tegner inn det elektriske feltet fra elementet ds og dekomponerer i x- og y – retning.

Avstanden fra ladningselementet til punktet P finner vi med Pytagoras.





Symmetribetraktninger:

Et ladningselement på motsatt side av ringen i forhold til ds gir samme størrelse på det elektriske feltet, samme komponent i x -retning, men motsatt retning i y -retning. Totalt rundt hele ringen blir det ikke noe felt i y -retning.

Det elektriske feltet i punktet P fra ladningselementet dQ :

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{x^2 + a^2}$$

x -komponenten til feltet:

$$dE_x = dE \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{x^2 + a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} ds$$

Ladning pr
lengdeenhet er
 $\lambda \Rightarrow dQ = \lambda ds$

Vi finner det totale feltet i P ved å integrere rundt hele ringen, fra 0 til $2\pi a$

$$E_x = \int dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} ds$$

Uttrykket er konstant i forhold til ds .

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} (2\pi a)$$

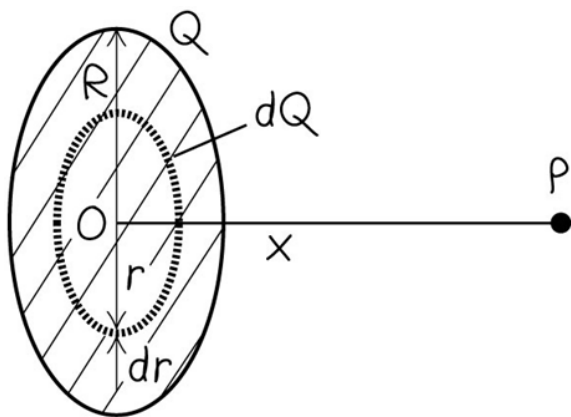
Vi får:

$$\underline{\underline{\vec{E} = E_x \hat{i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i}}}$$

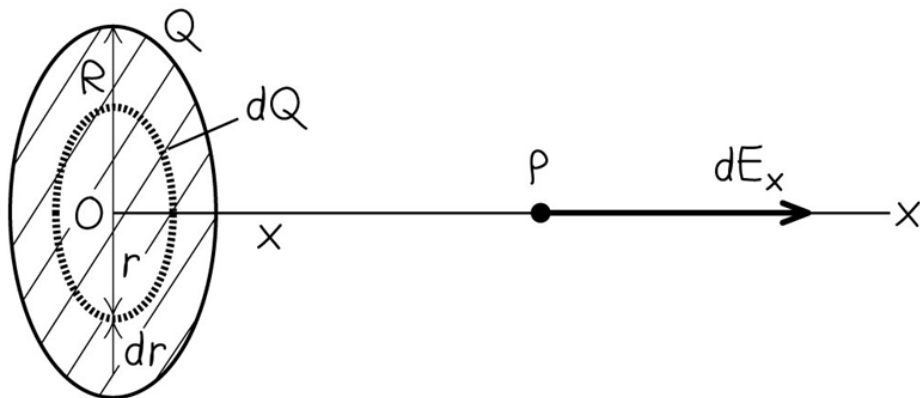
Eksempel: Felt fra en skive med jevnt fordelt ladning

En sirkulær skive med radius R av et ikke-ledende materiale har en uniform ladningsfordeling, σ . Se figuren.

Finn det elektriske feltet i et vilkårlig punkt på positiv x – aksen.



Løsning



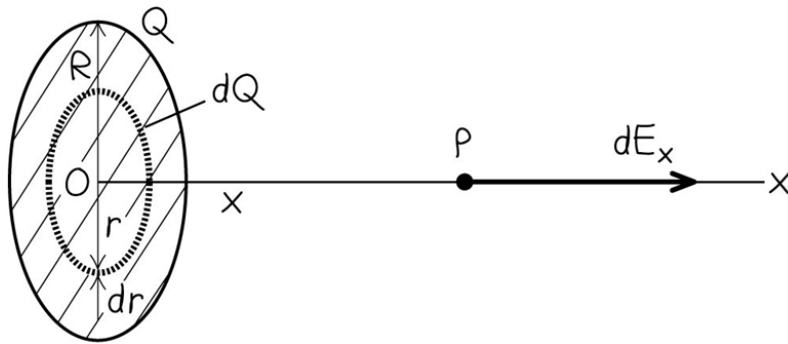
Pga symmetri, vil feltet i P ha retning langs x -aksen. For positiv ladning er retningen som vist på figuren.

Vi fant feltet fra en ring, og deler flaten opp i uendelig tynne ringer med indre radius r og ytre radius $r + dr$.

Arealet til ringen er da tilnærmet: $dA = 2\pi r dr$

Ladning på ringen: $dQ = \sigma dA = 2\pi\sigma r dr$

Innsatt i uttrykket for feltet fra en ring: $dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\sigma r x dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$



Pga symmetri, vil feltet i P ha retning langs x – akse. For positiv ladning er retningen som vist på figuren.

Vi integrerer over hele arealet fra $r = 0$ til $r = R$:

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\sigma r x dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$E_x = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{(r x dr)}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{4\epsilon_0} \int_0^R \frac{2r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

Vi får:
$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{(R^2 / x^2) + 1}} \right]$$

Stor skive, $R \gg x$:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

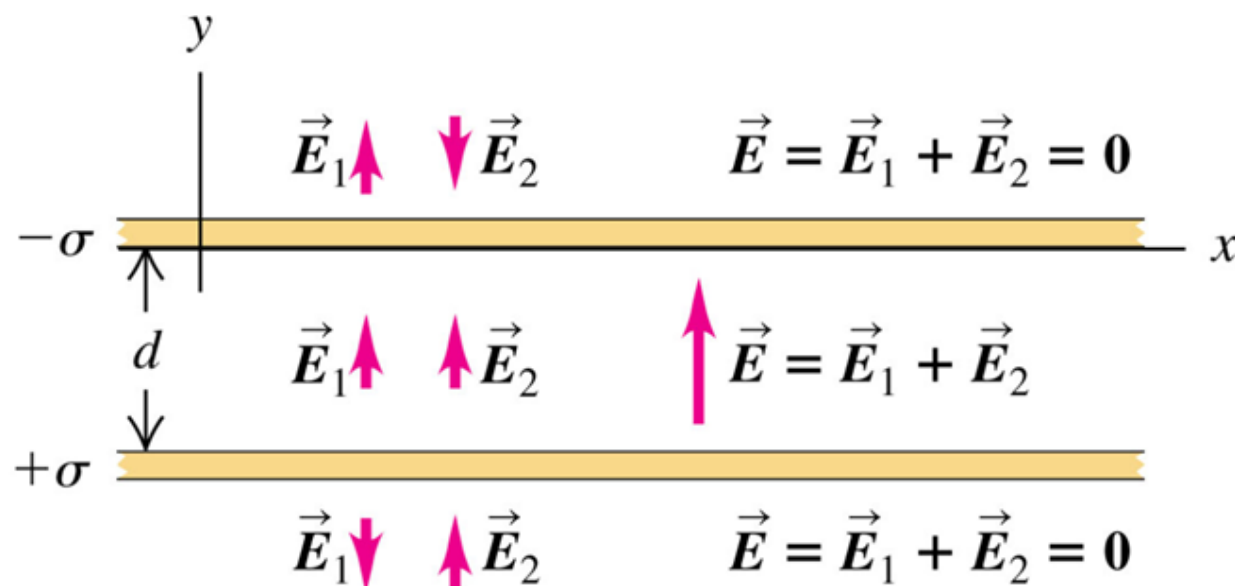
For ei stor uniformt ladd skive, vil feltet være normalt på skiva og den er uavhengig av avstanden fra skiva.

Eksempel. To uendelig store flateladninger.

På side 6 så vi på et elektron i et det vi sa var et homogent felt mellom to ladde flater. Finn det elektriske feltet mellom platene og på over og undersiden.



Løsning



$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

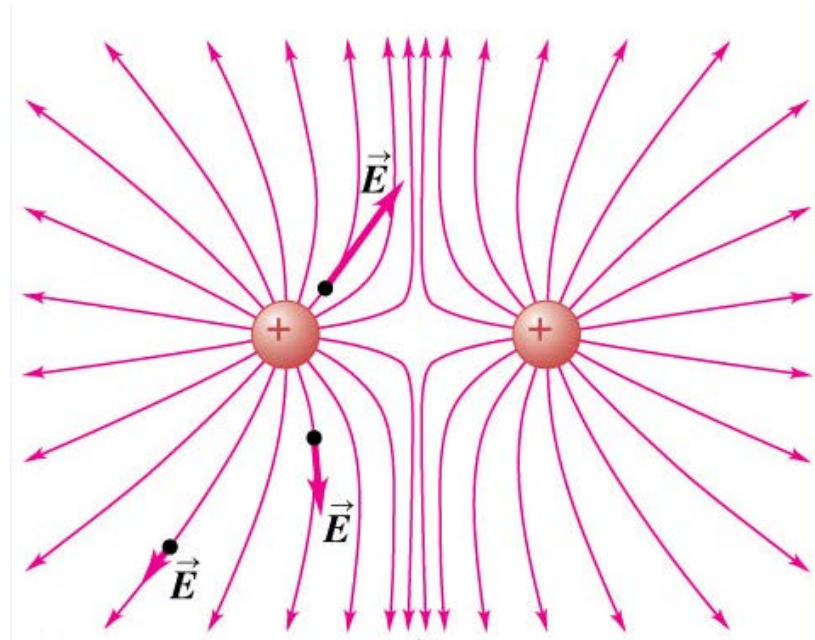
Det elektriske feltet mellom platene: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{j}$

Over og under flatene er det ideelt sett ikke noe felt.

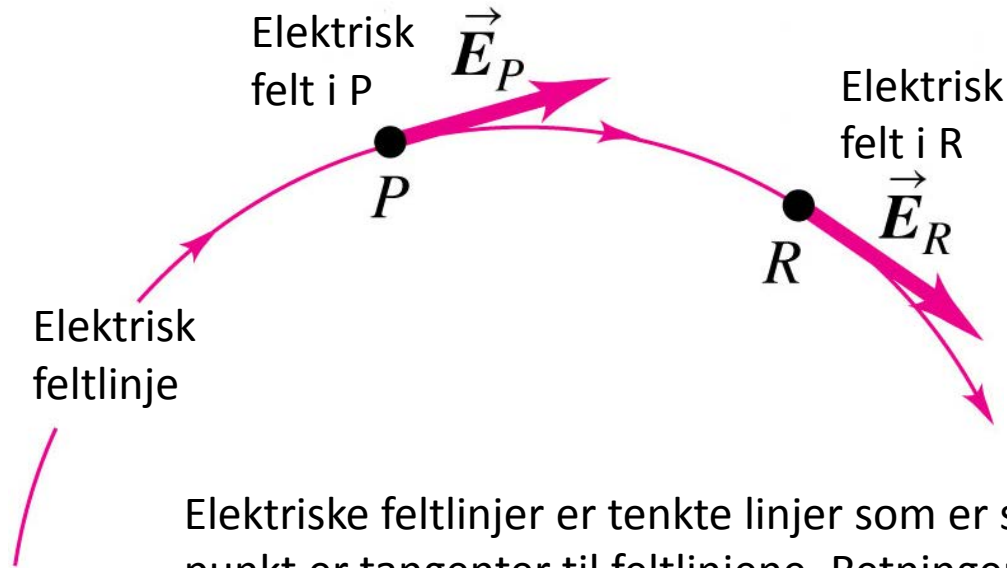
Litt om elektriske feltlinjer

Vi visualiserer det elektriske feltet ved feltlinjer

Hvordan ville det sett ut dersom den venstre ladningen var negativ?



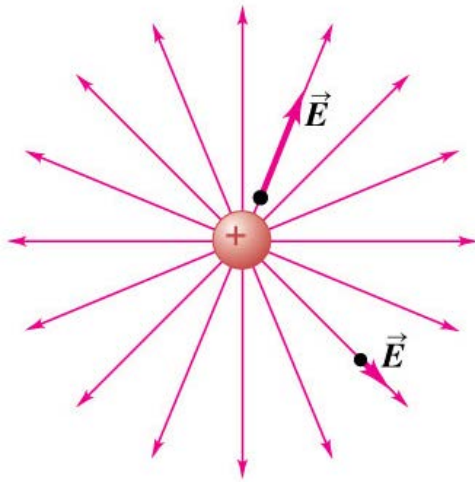
Elektriske feltlinjer



Elektriske feltlinjer er tenkte linjer som er slik at det elektriske feltet i alle punkt er tangenter til feltlinjene. Retningene til feltlinjene er lik retningene til det elektriske feltet.

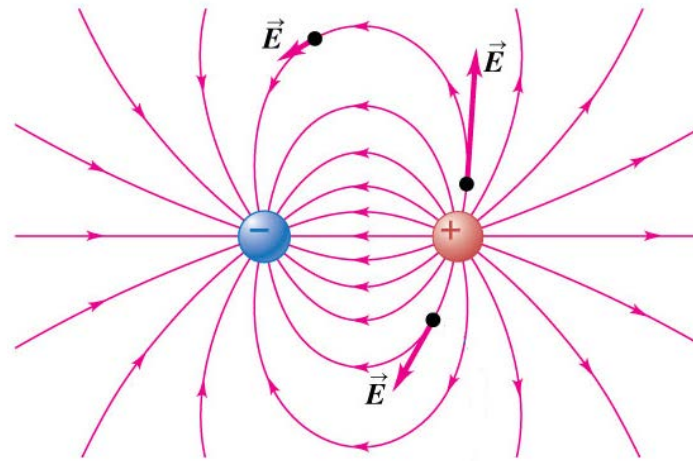
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Dvs. det elektriske feltet har samme retning som kraftretningen på en positiv ladning



Feltlinjene peker bort fra positive ladninger og inn mot negative

Tettheten til feltlinjene sier noe om størrelsen på det elektriske feltet.



I alle punkt på feltlinjene kan vi tegne inn feltet, med retning, som tangenten i punktet.

