



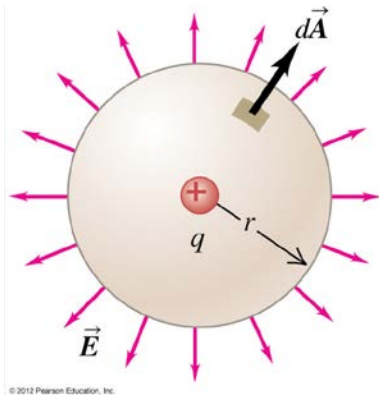
Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)
var en tysk fysiker og matematiker.
En betydelig vitenskapsmann!

Gauss' lov

Vi skal arbeide med

- Gauss lov og fluks gjennom lukkede flater
- Bruke Gauss lov i til å finne elektriske felt i symmetriske ladningsfordeling
- Ladningsfordelinger på et ledende materiale

- Gauss' lov er en alternativ lov til Coulombs lov for sammenhengen mellom ladninger og elektrisk felt.
- Enklere å bruke når en regner på kontinuerlige ladningsfordelinger.



Total elektrisk fluks gjennom en lukket flate, en gaussflate, er proporsjonal med den algebraiske summen av ladninger innesluttet av gaussflaten.

Vi fant fluksen gjennom en tenkt kuleflate med en punktladning q i sentrum.

$$\Phi_E = EA = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{|q|}{\epsilon_0}$$

Fluksen er uavhengig av radien til den tenkte kuleflaten, gaussflaten.

- Vi lager to tenkte kuleflater rundt ladningen.
- Vi tegner inn et arealelement dA på kula med radius R og projiserer dA på kula med radius $2R$.
- Areallementet på den største kula er da $4dA$

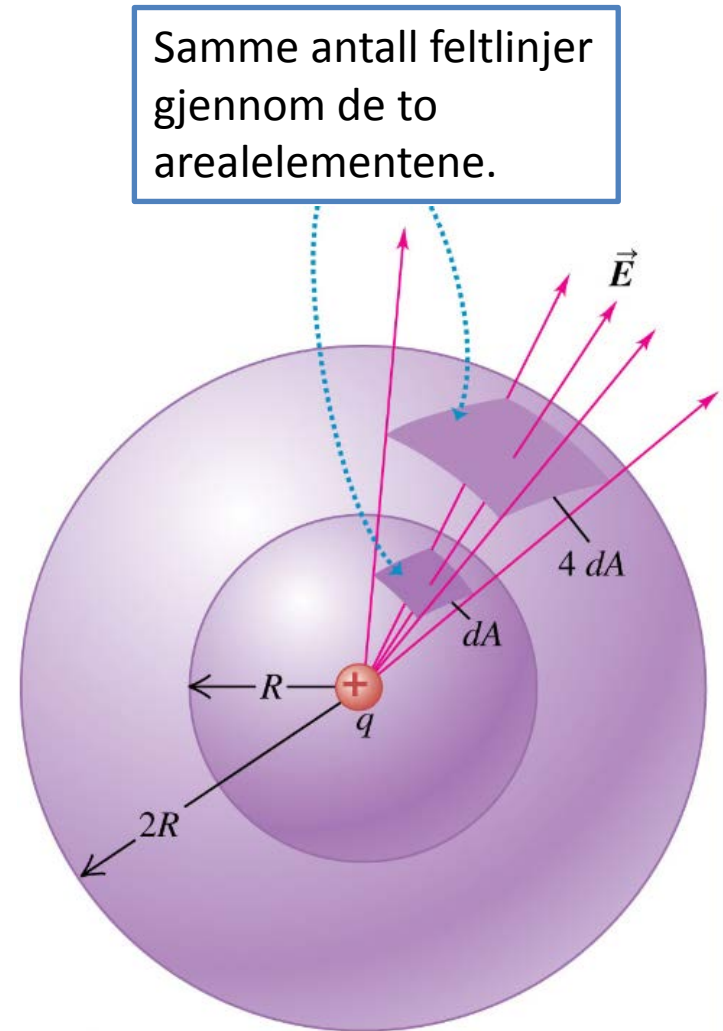
$$A_{\text{ liten kule}} = 4\pi R^2$$

$$A_{\text{ stor kule}} = 4\pi (2R)^2 = 4A_{\text{ liten kule}}$$

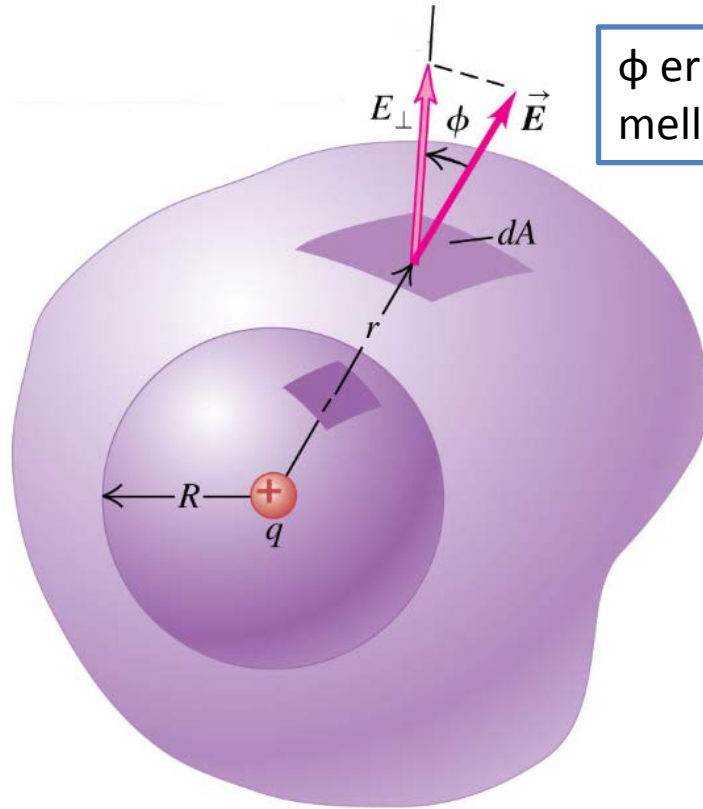
- Feltet reduseres til $\frac{1}{4}$ når radien dobles.

$$E = \text{konst} \cdot \frac{1}{r^2}$$

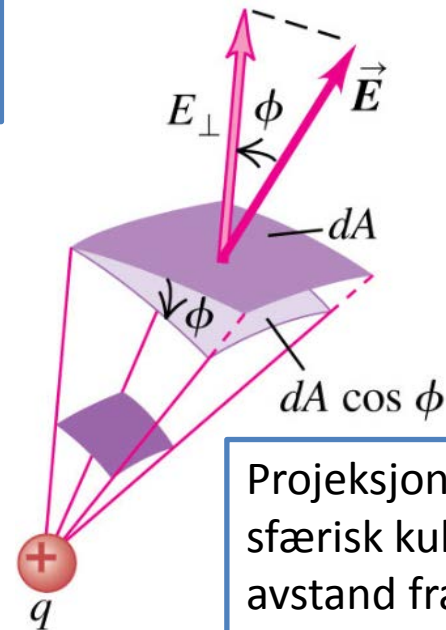
- Feltet reduseres med $\frac{1}{4}$ og arealet øker med 4, *fluksen gjennom de to flatene er den samme.*



Punktladning inne i en ikke – sfærisk gaussflate.



ϕ er vinkelen
mellom \hat{n} og \hat{r}



Projeksjonen av dA på en
sfærisk kuleflate i samme
avstand fra q .

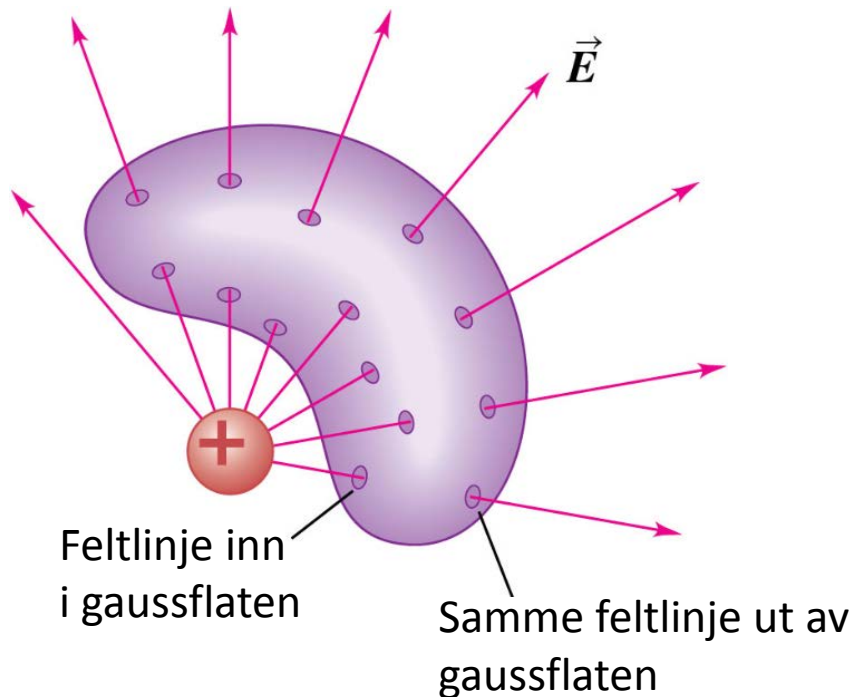
Fluksen gjennom dA er $\Phi_E = E dA \cos \phi$

Altså den samme som fluksen gjennom projeksjonen av dA inn på kuleflaten.
Vi kan dele hele den irregulære flata inn i slike elementer og finner at formen på gaussflaten ikke har betydning for den totale fluksen.

Gauss' lov: $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$

Flateintegralet er over en lukket flate.

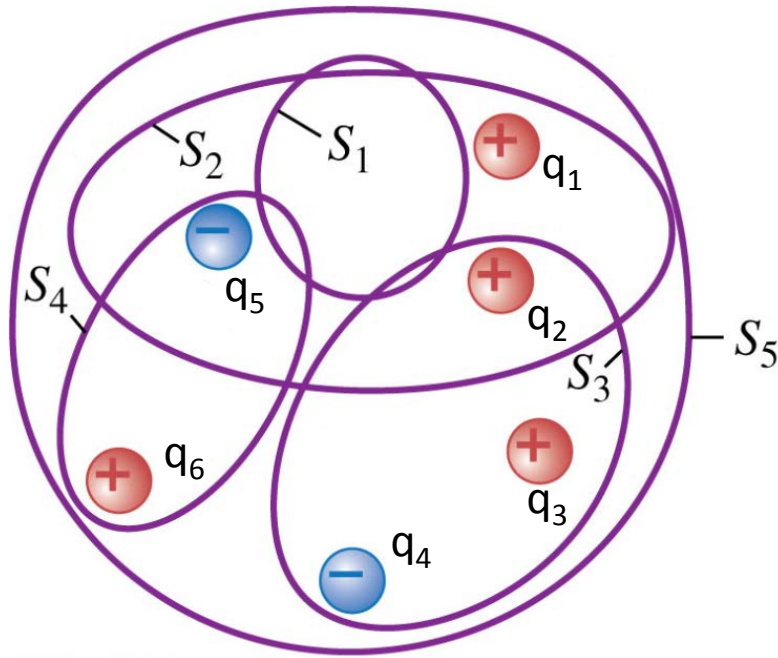
$d\vec{A}$ og \hat{n} er alltid normalt på flateelementet og rettet ut fra volumet av gaussflaten.



Ingen ladning innenfor gaussflaten:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

Gauss' lov på generell form



For mange ladninger innesluttet av en gaussflate får vi:

$$Q_{encl} = Q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$$

\vec{E} er det totale feltet fra alle ladningene omsluttet av den tenkte gaussflaten.

Gauss' lov:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0}$$

Gauss' lov:

Den totale elektriske fluksen gjennom en lukket flate er lik den algebraiske summen av de omsluttete ladningene, delt på ϵ_0 .

Stemmer Gauss' lov når ladningen er negativ?

$$\text{Gauss lov: } \Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E \cos \phi dA$$

$$d\vec{A} \parallel -\vec{E} \Rightarrow \phi = 180^\circ$$

$$\text{Vi får: } \underline{\Phi_E} = -\oint E dA$$

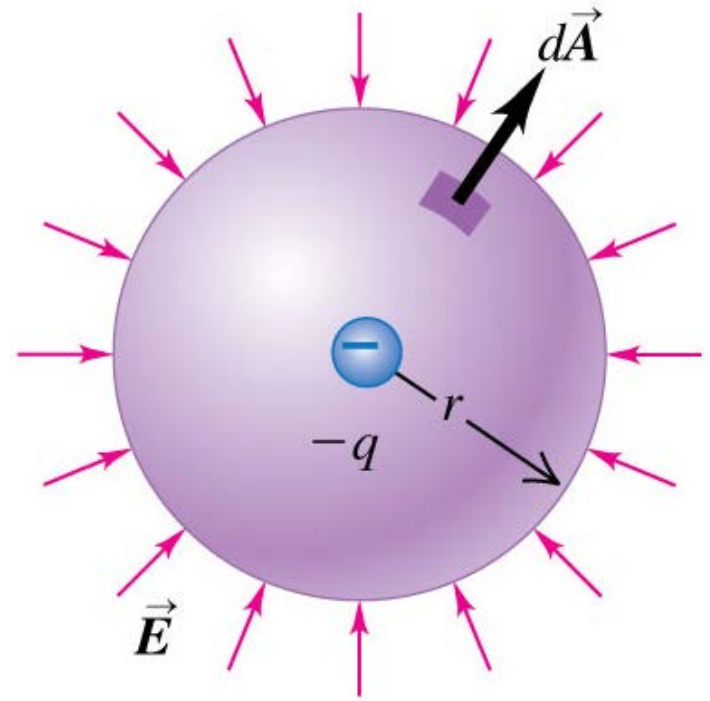
$$= -\oint \frac{|-q|}{4\pi\epsilon_0 r^2} dA$$

Husk
tallverditegnet!

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = -\frac{q}{\epsilon_0}$$

Resultatet stemmer med Gauss' lov,

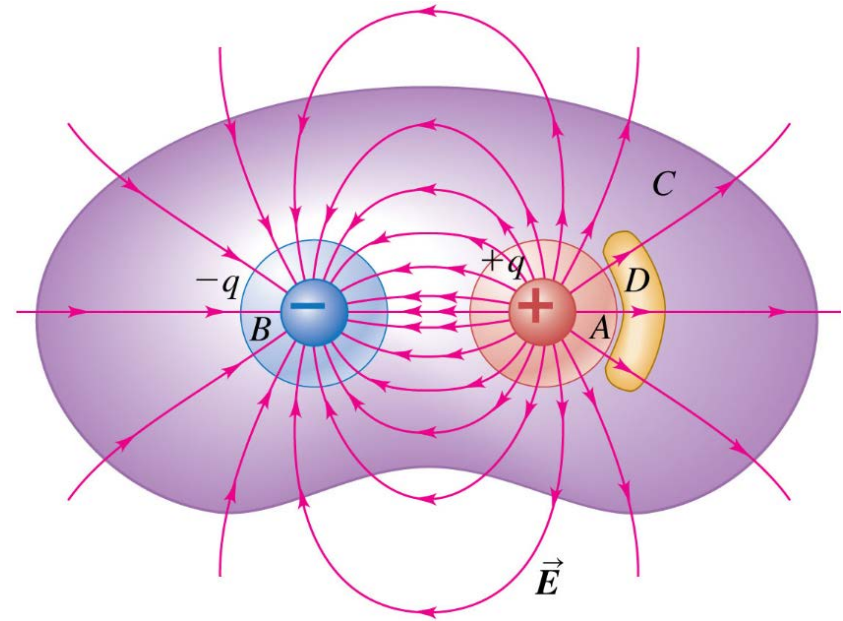
$$Q_{\text{encl}} = -q$$



En sfærisk gaussflate rundt en negativ ladning. Det elektriske feltet peker innover, arealvektoren utover.

Eksempel. Elektrisk dipol.

Finn elektrisk fluks gjennom hver av de fire gaussflatene A, B, C og D.



Feltlinjer rundt to punktladninger, $-q$ og $+q$.

Eksempel. Elektrisk dipol.

Finn elektrisk fluks gjennom hver av de fire gaussflatene A, B, C og D.

Løsning:

$$\text{Gauss' lov: } \Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

A. Total ladning innenfor: $Q = q$

Vi får: $\underline{\underline{\Phi_E = q / \epsilon_0}}$

B. Total ladning innenfor: $Q = -q$

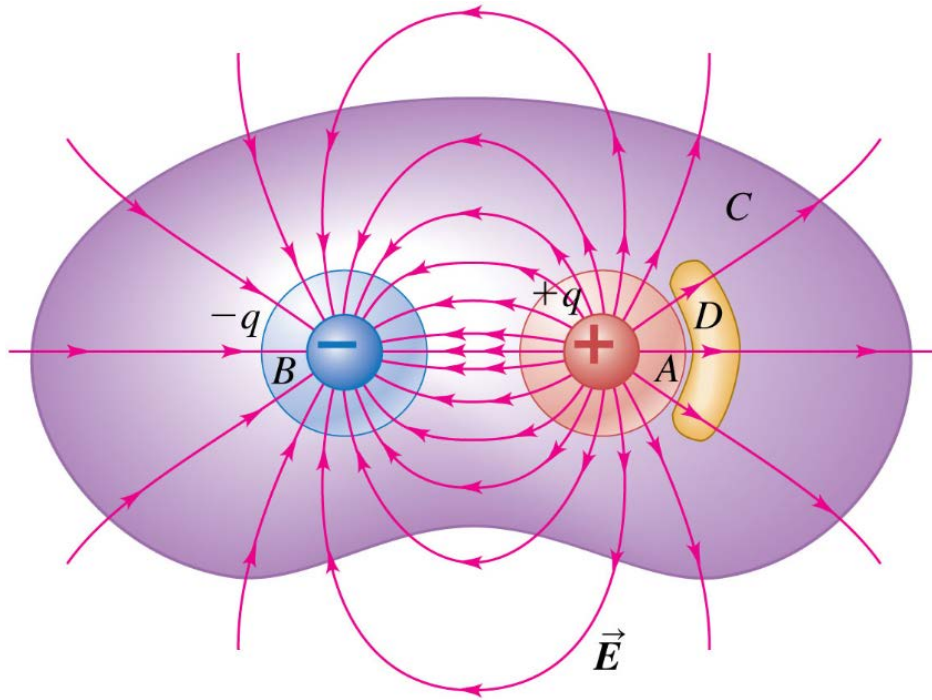
Vi får: $\underline{\underline{\Phi_E = -q / \epsilon_0}}$

C. Total ladning innenfor: $Q = +q - q = 0$

Vi får ingen netto elektrisk fluks.

D. Total ladning innenfor: $Q = 0$

Vi får ingen netto elektrisk fluks.

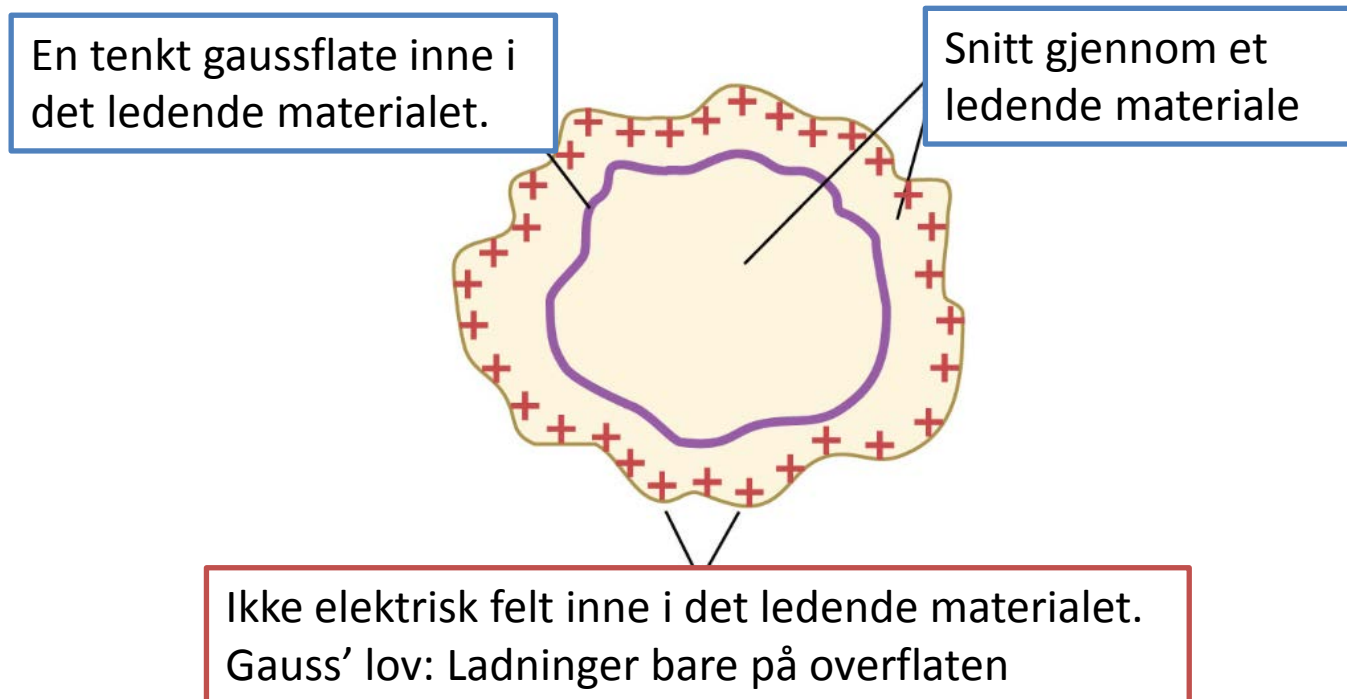


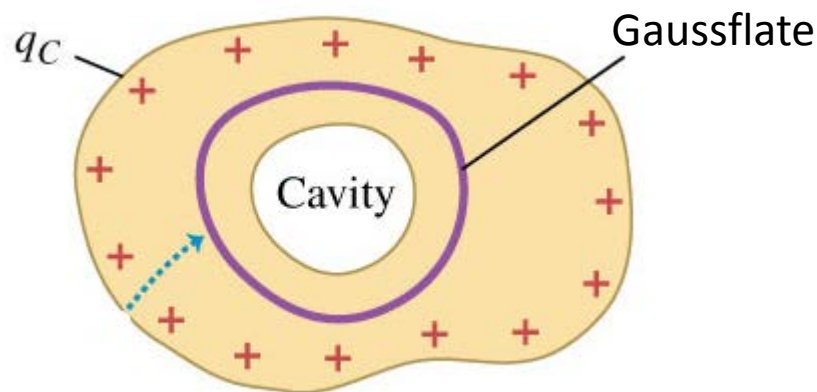
Feltlinjer rundt to punktladninger, $-q$ og $+q$.

Fasongen på gaussflatene har ingen betydning for resultatet. Gaussflater er tenkte flater.

Elektriske felt og ledende materialer.

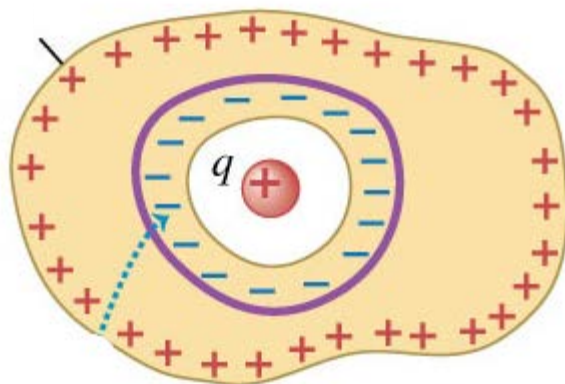
- I et elektrostatisk problem er alle ladninger i ro. Da er det likevekt.
- Et elektrisk felt i et ledende materiale fører til elektriske krefter på frie ladninger som da kan bevege seg.
- Ingen elektriske felt inne i ledere etter at likevekt er nådd.





Ladning q_c på metallet.

Ikke felt inni metallet og følgelig ingen ladning innenfor gaussflaten



Ladning q_c på metallet og en punktladning q inni hulrommet.

Ikke felt inni metallet.
Hva blir ladningen på overflaten?

Beregninger med Gauss lov

To måter å bruke Gauss' lov på

1. Ladningsfordelingen er kjent og det er en viss symmetri. Vi kan bruke Gauss' lov til å finne det elektriske feltet.
2. Det elektriske feltet er kjent. Vi kan i noen grad finne ladningsfordelingen.

Løsningsmetodikk

1. Tegn en god figur. Studer symmetrien i problemstillingen.
2. Hva vet du og hva spørres det om.
3. Velg en tenkt gaussflate som passer til symmetrien i problemet.
 - Deler av gaussflaten bør om mulig være slik at $d\vec{A} \parallel \vec{E}$
 - Deler av gaussflaten bør om mulig være slik at $d\vec{A} \perp \vec{E}$

Eksempel. Felt inni og rundt en ladd kule av ledende materiale.

Vi lader en kule av et ledende materiale med en positiv ladning q . Kula har radius R . Finn det elektriske feltet inni og på utsiden av kula.

Gauss lov:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0}$$

Eksempel. Felt inni og rundt en ladd kule av ledende materiale.

Vi lader en kule av et ledende materiale med en positiv ladning q . Kula har radius R . Finn det elektriske feltet inni og på utsiden av kula.

Løsning:

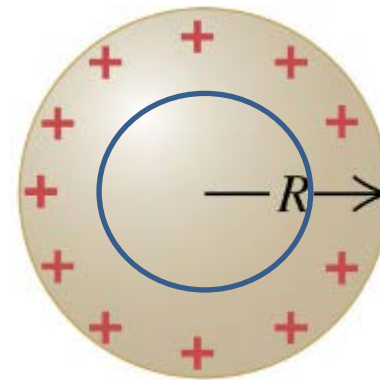
$r < R$

Vi tegner en sfærisk gaussflate inni kula.

I et metall hvor ladningene er i ro, er alle ladninger på overflaten til kula.

$$\text{Gauss lov: } \Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Ingen ladning innenfor gaussflaten – som kan ligge så tett inntil overflaten vi måtte ønske – gir $\vec{E} = 0$ for $r < R$



$r > R$

Vi tegner en sfærisk gaussflate rundt kula.

Gauss' lov: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$ og $Q = q$

$$\oint E \cos \phi dA = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{og} \quad \phi = 0$$

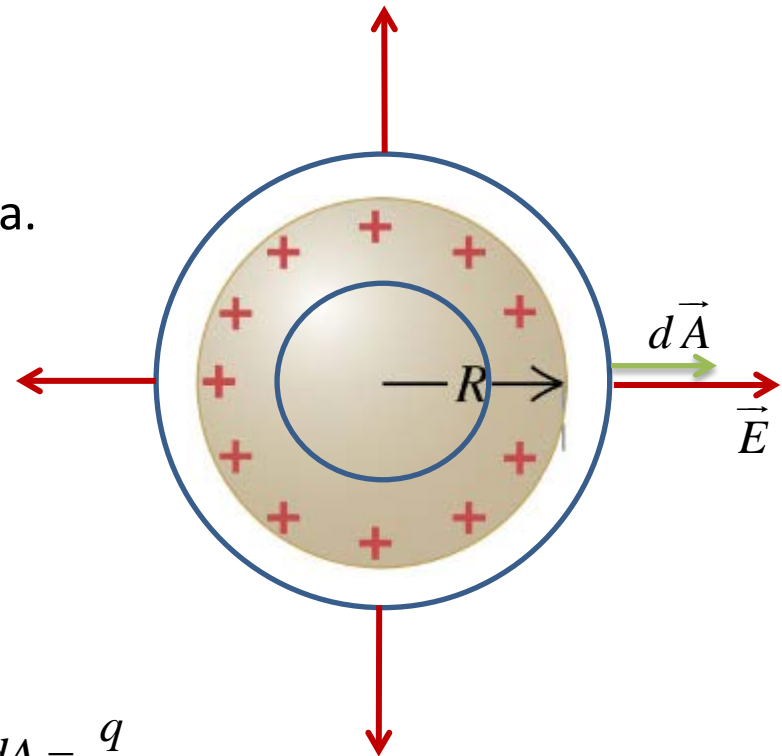
$$\oint E dA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

E er konstant over hele gaussflaten: $E \oint dA = \frac{q}{\epsilon_0}$

Vi får: $E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

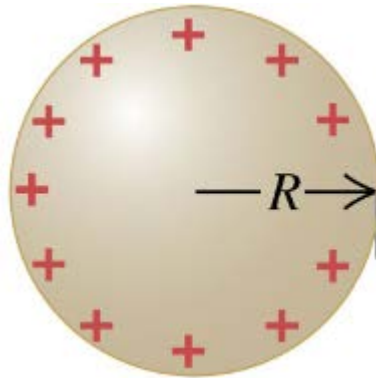
På overflaten: $r = R$:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

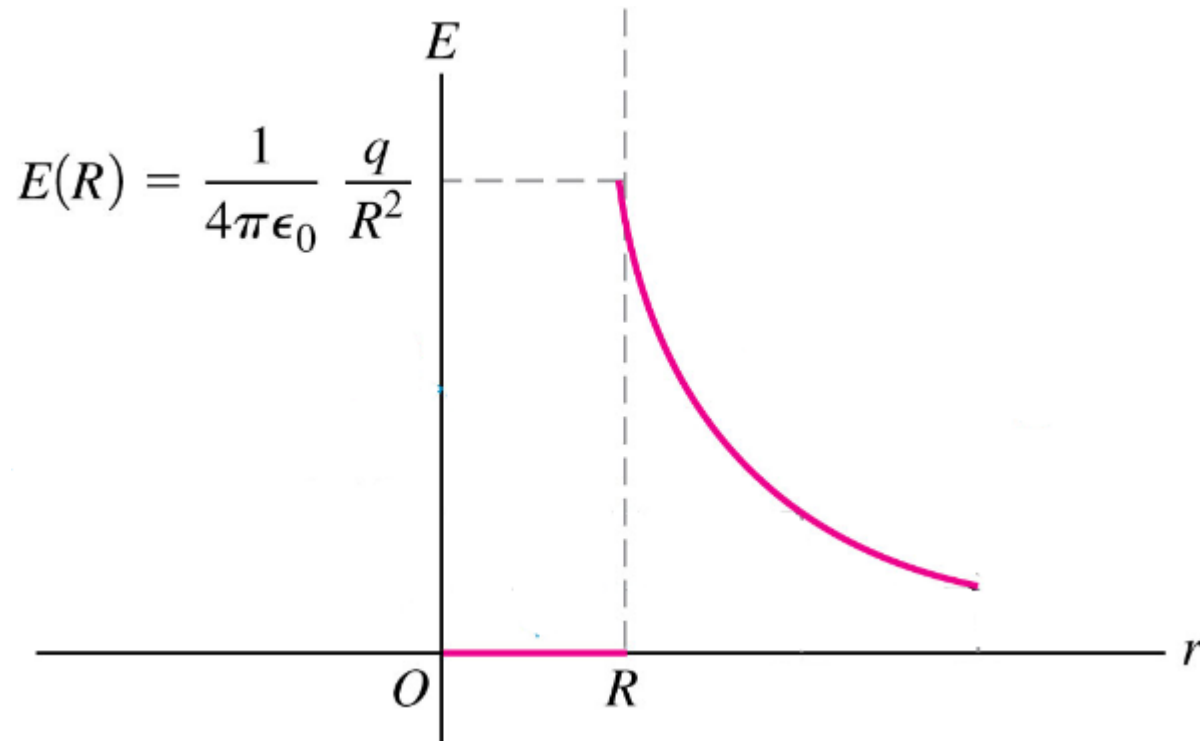


Hvorfor en sfærisk
gaussflate?

$d\vec{A} \parallel \vec{E}$ over hele gaussflaten



Det elektriske feltet
rundt ei ledende kule
med ladning q , som
funksjon av avstanden
fra kulas sentrum.



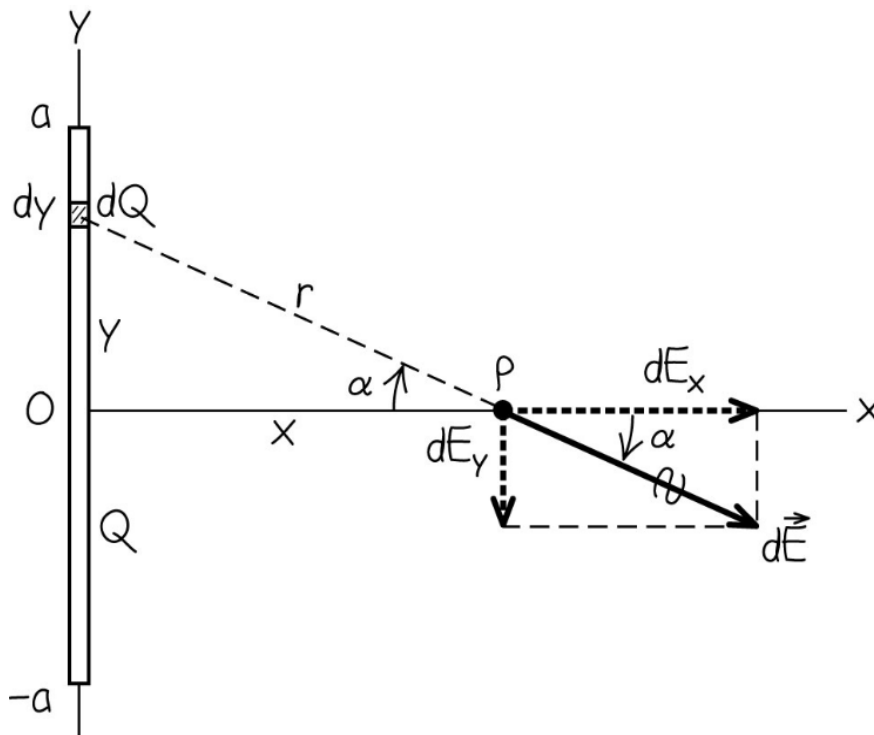
Eksempel. Elektrisk felt rundt en homogen linjeladning.

Elektrisk ladning er fordelt på ei uendelig lang linje slik at den positive ladningstettheten per lengdeenhet er λ . Finn det elektriske feltet rundt linjeladningen.

Eksempel. Elektrisk felt rundt en homogen linjeladning.

Elektrisk ladning er fordelt på ei uendelig lang linje slik at den positive ladningstettheten per lengdeenhet er λ . Finn det elektriske feltet rundt linjeladningen.

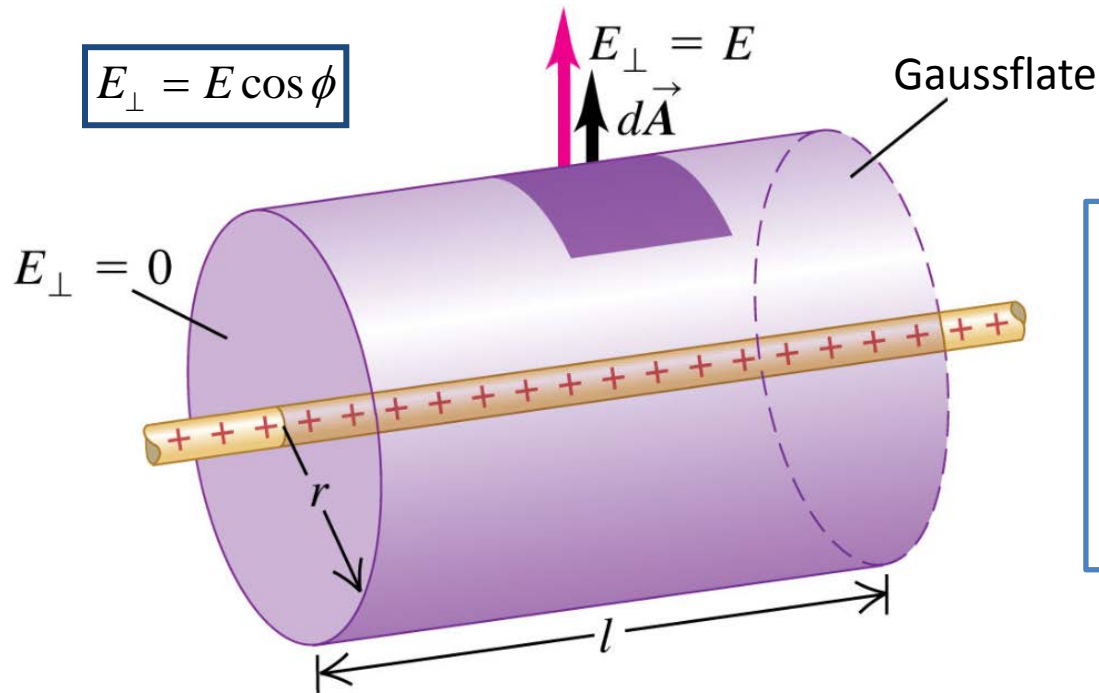
Løsning:



Vi ser på feltet fra et lite element dy med ladning dQ .

Dersom linjeladningen er uendelig lang så vil det alltid finnes et punkt på den som ligger symmetrisk med x – aksen på figuren slik at feltet fra denne har samme, men motsatt rettet x – komponent.

Feltet rundt en uendelig lang linjeladningen er derfor radielt rettet.



Feltet er uavhengig av lengden på cylinderen.

Vi brukte opplysningen om at linjeladningen er uendelig til å bestemme retningen på feltet.

Vi legger en gaussflate som en cylinder rundt linjeladningen. Hvorfor?

$d\vec{A} \perp \vec{E}$ på endeflatene $\cos \phi = 0 \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$ og ingen fluks gjennom dem

$d\vec{A} \parallel \vec{E}$ på cylinderflaten $\cos \phi = 1 \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA$

$$\int_{\text{cylinder}} E dA = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \Rightarrow \underline{\underline{E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}}}$$

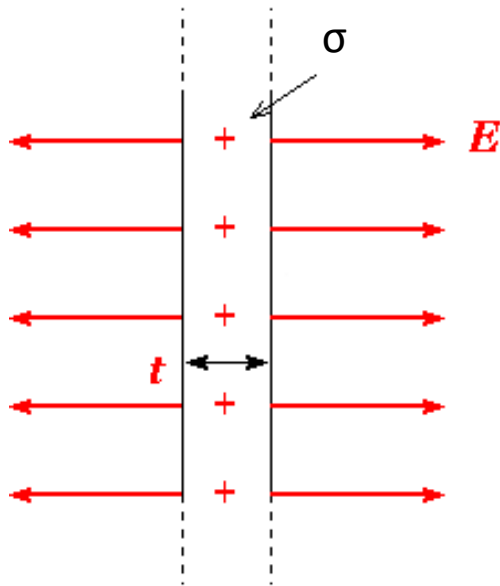
Eksempel. Felt fra en uendelig flateladning.

Bruk Gauss' lov til å finne det elektriske feltet fra en tynn, flat og uendelig stor flate med en homogen ladningsfordeling. Ladningstettheten er σ .

Eksempel. Felt fra en uendelig flateladning.

Bruk Gauss' lov til å finne det elektriske feltet fra en tynn, flat og uendelig stor flate med en homogen ladningsfordeling. Ladning pr arealenhet er σ .

Løsning:



Må vi dele problemet opp i flere områder?

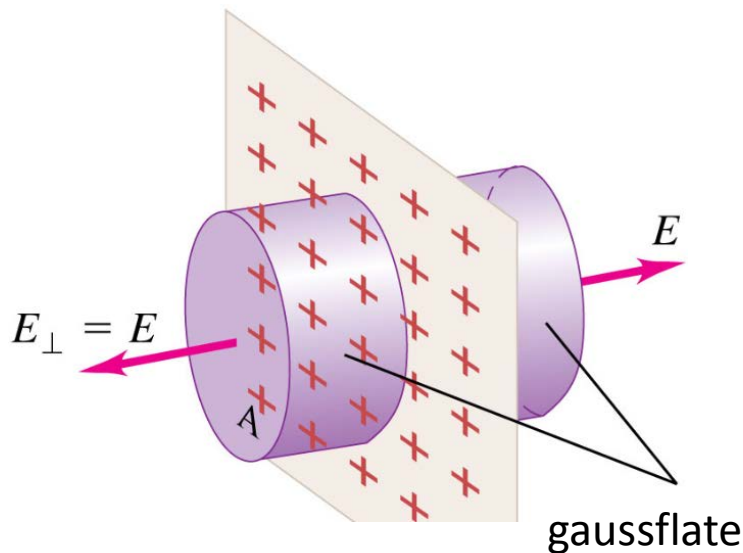
Symmetribetraktninger?

Kriterier for en god gaussflate?

Eksempel. Felt fra en uendelig flateladning.

Bruk Gauss' lov til å finne det elektriske feltet fra en tynn, flat og uendelig stor flate med en homogen ladningsfordeling. Ladning pr arealenhet er σ .

Løsning:



Gauss' lov: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$

Hvorfor er feltet normalt på flaten er homogent?

Sylinderflaten:

$$d\vec{A} \perp \vec{E} \Rightarrow \cos \phi = 0 \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

Ingen fluks gjennom sylinderflaten.

Endeflatene:

$$d\vec{A} \parallel \vec{E} \Rightarrow \cos \phi = 1 \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A} = EdA$$

$$\int_{2 \text{ endflater}} EdA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Konstant E på endeflatene.

$$E \cdot 2 \cdot \pi r^2 = \frac{\sigma \cdot \pi r^2}{\epsilon_0} \Rightarrow \underline{\underline{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}}$$

Som ventet?