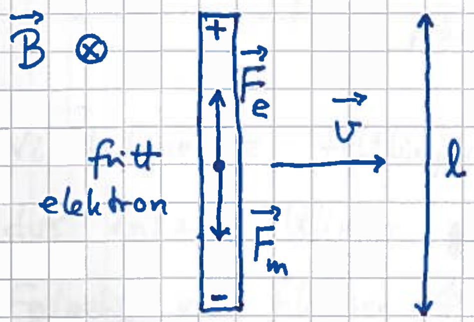
Elektrodynamikk [YF 29-31]

Faradays induksjonslov [YF 29.1+2+4]

Leder i bevegelse i et uniformt $\vec{B}$-felt:



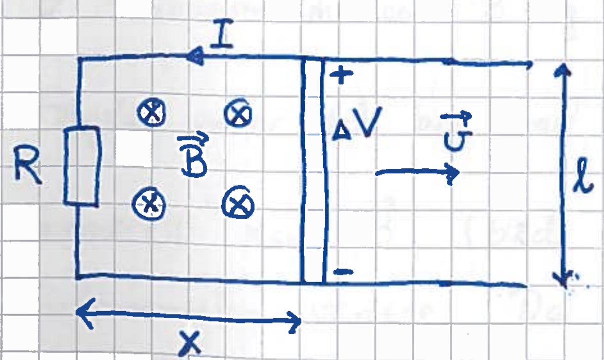
$\vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B}$ virker nedover og gir indusert ladning på endene. Vi får et indusert elektrisk felt $\vec{E}$ rettet fra + mot − (nedover), og følgelig har vi også fått en <u>indusert spenning</u> $\Delta V = E \cdot \ell$ i lederen.

Likevekt for frie elektroner i lederen når $\Sigma \vec{F} = 0$:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = 0 \Rightarrow eE = evB \Rightarrow E = vB$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta V = vB\ell}$$

Hvis vi lager en lukket krets, kan ΔV drive en elektrisk strøm i kretsen:



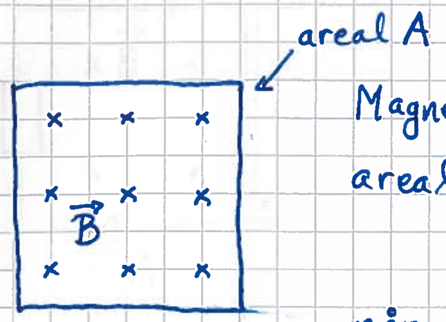
$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{vB\ell}{R}$$

Vi observerer at vi kan skrive: $\Delta V = \frac{dx}{dt} B\ell = \frac{d}{dt}(B\ell x)$

Her er $\ell \cdot x = A$ = areal omsluttet av strømsløyfa, slik at

$$\Delta V = \frac{d}{dt}(B \cdot A)$$

Magnetisk fluks [YF 27.3]



Magnetisk fluks Φ gjennom flaten med areal A er

$$\Phi = B \cdot A$$

$[\Phi] = T \cdot m^2 = Wb$ (weber)

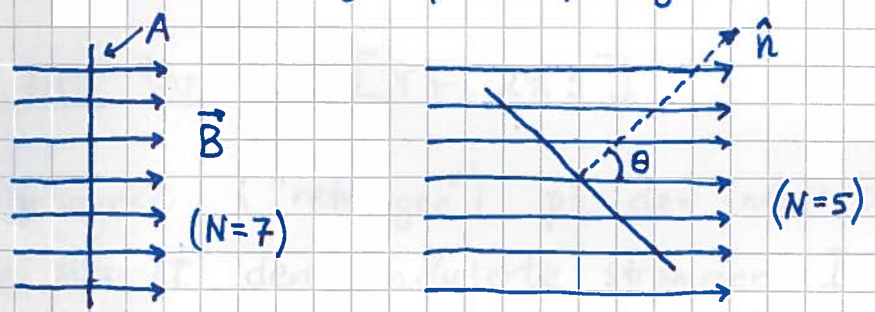
når $\vec{B}$ står normalt på flaten.

Vi definerte feltlinjer slik at $|\vec{B}|$ er prop. med feltlinjetettheten, dvs antall feltlinjer gjennom en flate, pr flateenhet.

Følgelig er fluksen Φ prop. med antall feltlinjer gjennom flaten:

$$B \sim \frac{\#\text{ feltlinjer}}{A} \quad \text{og} \quad B = \frac{\Phi}{A} \quad \Rightarrow \quad \Phi \sim \#\text{ feltlinjer}$$

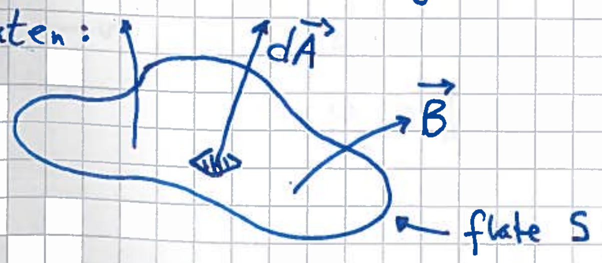
Skråstilt flate gir færre feltlinjer:



Vi innser at # feltlinjer avtar med faktoren $\cos\theta$, der θ = vinkelen mellom $\vec{B}$ og flatenormalen.

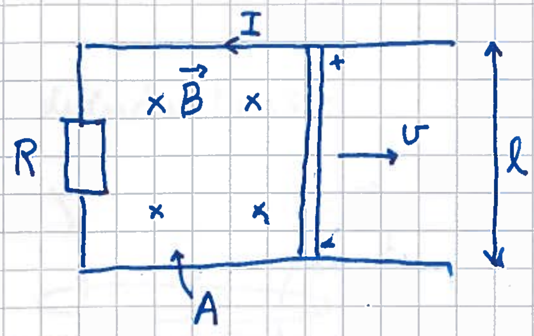
Følgelig passer det bra med: $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos\theta$

Generelt kan $\vec{B}$ (både styrke og retning) og retningen på flatenormalen variere. Da er total fluks gjennom flaten en sum (integral) av små bidrag $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A}$ gjennom små deler dA av flaten:



$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Tilbake til eks. med leder i bevegelse:



Fant $\Delta V = vB\ell = \ldots = \frac{d}{dt}(B\cdot A)$, dvs

$$\boxed{\Delta V = \frac{d\Phi}{dt}}$$

som er <u>Faradays induksjonslov</u>.

Denne sammenhengen viser seg å gjelde <u>generelt</u>, dvs

$$\Delta V = \frac{d}{dt}\left\{\int_S \vec{B}\cdot d\vec{A}\right\} = \frac{d}{dt}\{\Phi\}$$

uansett <u>hva</u> som endrer seg med tida t i uttrykket for Φ; dette kan være $A = |\vec{A}|$ (som her), B, eller retningen på $\vec{A}$ og/eller $\vec{B}$.

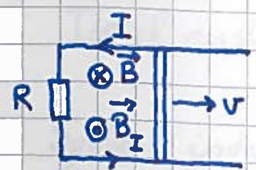
<u>Lenz' lov</u> [YF 29.3]

Fortegnet ("retningen") på den induserte spenningen ΔV er slik at den induserte strømmen I får retning slik at tilhørende indusert magnetfelt $\vec{B}_I$ og fluks

$\Phi_I = \int_S \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$ motvirker den påtvungne endringen $\Delta\Phi$.

Kort sagt: <u>Naturen motsetter seg endringer.</u>

I vårt eksempel:

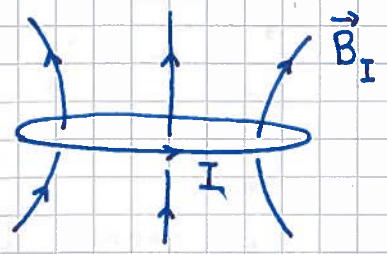


Påtvungen endring er her økt omsluttet magnetisk fluks <u>inn</u> i planet. Da må I gå mot klokka, slik at omsluttet fluks skapt av I,

$\Phi_I = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$, går <u>ut</u> av planet.

Induktans [YF 30.2^{1+}]

Selvinduktans:



Vi ser fra Biot-Savarts lov at magnetfeltet $\vec{B}_I$ skapt av strømmen I må (overalt) være prop. med I.

Da må også fluksen som strømsløyfa omslutter,

$$\Phi = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$$

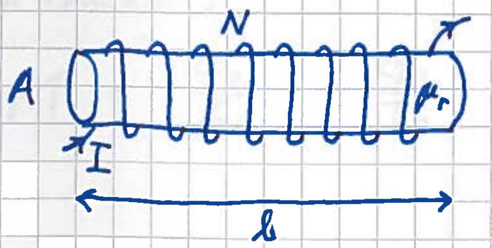
være prop. med I. Strømsløyfas selvinduktans (ofte kalt bare sløyfas induktans) er da definert som forholdet mellom Φ og I:

$$\boxed{L = \frac{\Phi}{I}}$$

Enhet: $[L] = \dfrac{T \cdot m^2}{A} = H$ (henry)

Ofte vanskelig å beregne Φ, og dermed L.

Unntak: Lang og tettviklet spole, der vi kan anta at feltet er uniformt overalt inne i spolen, $B = \mu n I = \mu_r \mu_0 n I$.



<u>Hver</u> vikling omslutter fluks

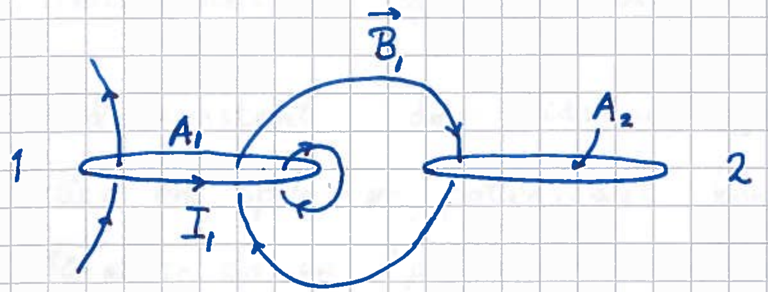
$$\Phi_1 = BA = \mu_r \mu_0 \frac{N}{\ell} I A$$

$\Rightarrow$ Total omsluttet fluks: $\Phi = N \cdot \Phi_1 = \mu_r \mu_0 \dfrac{N^2}{\ell} A \cdot I$

$\Rightarrow$ Spolens induktans er: $\underline{L = \mu_r \mu_0 N^2 A / \ell}$

(Vi ser at L øker raskt med antall viklinger N !)

Gjensidig induktans:



I_1 skaper $\vec{B}_1$ og dermed fluks $\phi_2 = \int_{A_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2$ omsluttet av sløyfe 2.

B_1 er prop. med I_1 $\Rightarrow$ ϕ_2 er prop. med I_1

De to sløyfenes gjensidige induktans er da def. som

$$M_{21} = \phi_2 / I_1$$

Omvendt: Med strøm I_2 i sløyfe 2 fås felt $\vec{B}_2$, og dermed fluks $\phi_1 = \int_{A_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{A}_1$ omsluttet av sløyfe 1.

B_2 er prop. med I_2 $\Rightarrow$ ϕ_1 er prop. med I_2, og

$$M_{12} = \phi_1 / I_2$$

Det kan vises at $M_{21} = M_{12}$, så vi klarer oss med (uten indekser)

$$M = \frac{\phi_2}{I_1} = \frac{\phi_1}{I_2} =$$ den gjensidige induktansen mellom sløyfene 1 og 2

Enhet: $[M] = \frac{Wb}{A} = H$ (som for selvinduktans L)

Selvinduksjon og gjensidig induksjon:

Med konstant (dvs: tidsuavhengig) strøm I i ei ledersløyfe eller en spole er potensialet konstant i hele sløyfa / spolen. (Vi antar da en "perfekt leder" uten resistans. I virkeligheten vil ledningen / spoletråden være f.eks. av kobber, med en viss motstand. Men hvis resten av den elektriske kretsen har mye større motstand, kan vi neglisjere motstanden i "tilførselsledninger" og spoletråder.)

Men hvis I endrer seg med tiden, dvs $\frac{dI}{dt} \neq 0$, så blir også omsluttet fluks tidsavhengig, dvs $d\phi / dt \neq 0$.
Da induseres det en (mot-) spenning i sløyfa/spolen,

$$V = -\frac{d\phi}{dt} .$$

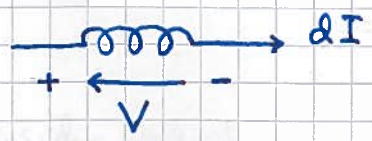
Hvis induktansen L ikke endrer seg:

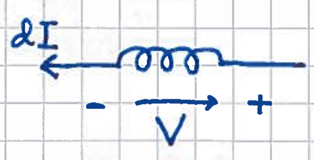
$$V = -L \frac{dI}{dt}$$

Dette blir dermed sammenhengen mellom strøm I og spenning V for en induktans, dvs for et kretselement med induktans L.

Kretssymbol: 

Retningen / Fortegnet på V er bestemt av Lenz' lov:

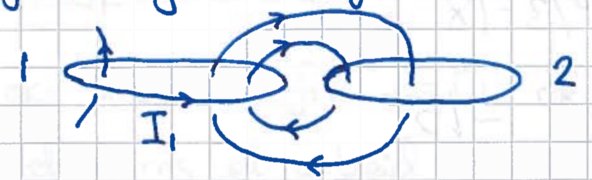




I øker mot høyre
⇓
indusert spenning V mot venstre

I øker mot venstre
⇓
indusert V mot høyre

Gjensidig induksjon:



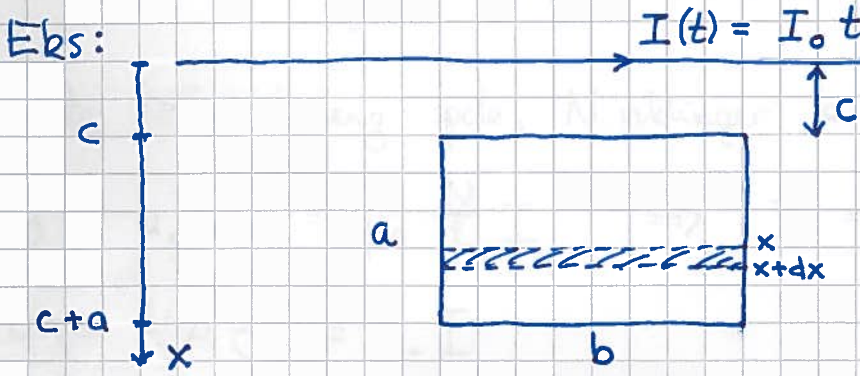
Hvis $dI_1/dt \neq 0$ blir $d\Phi_2/dt \neq 0$, og indusert spenning i sløyfe 2 blir

$$V_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt} \quad \left(\text{når } M \text{ er konstant}\right)$$

Og omvendt, selvsagt:

$$dI_2/dt \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{V_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -M\frac{dI_2}{dt}}$$

Eks:



(lang rett leder)

Bestem indusert spenning V i den rektangulære sløyfa, og gjens. ind. M

Løsn: $B(x;t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I_0 t}{2\pi\tau}\cdot\frac{1}{x}$; inn i planet (der sløyfa ligger)

Fluks gjennom skravert flate: $d\Phi = B\cdot dA = B\cdot b\cdot dx$

$\Rightarrow$ Total omsluttet fluks:

$$\Phi = \int d\Phi = \int_c^{c+a}\frac{dx}{x}\cdot\frac{\mu_0 I_0 t}{2\pi\tau}\cdot b = \ln\frac{c+a}{c}\cdot\frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi\tau}\cdot t$$

$$\Rightarrow V = (-)\frac{d\Phi}{dt} = \underline{\underline{\ln\frac{c+a}{c}\cdot\frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi\tau}}}$$

(Retning: Mot klokka, dvs ind. strøm I vil gå mot klokka. Lenz' lov!)

Gjensidig induktans mellom sløyfa og den rette lederen:

$$M = \frac{\Phi}{I} = \underline{\underline{\ln\frac{c+a}{c}\cdot\frac{\mu_0 b}{2\pi}}}$$

Vi ser at $[\mu_0] = H/m$, siden $[M] = H$ og $[b] = m$.

Energi i $\vec{B}$-feltet [YF 30.3]

Å øke strømmen fra $i=0$ til $i=I$ i en induktans L krever at det gjøres et arbeid for å "overvinne" den induserte motspenningen $v = -L\,di/dt$. Påkrevd effekt er da (se s.46) $P = -v\cdot i = L\frac{di}{dt}\cdot i$, når vi øker strømmen fra i til $i+di$ i løpet av tiden dt. Da har vi tilført en energi

$$dU = P\cdot dt = L\frac{di}{dt}\cdot i\cdot dt = L\cdot i\cdot di$$

Total tilført energi når vi øker strømmen fra $i=0$ til $i=I$:

$$U = \int dU = \int_0^I L\cdot i\cdot di = \underline{\tfrac{1}{2}LI^2}$$

Anta tettviklet lang spole, N viklinger, lengde ℓ, tverrsnitt A:

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \quad\Rightarrow\quad I = \frac{B\cdot\ell}{\mu_0 N}$$

$$\Phi = NAB = LI$$

$$\Rightarrow\quad U = \frac{1}{2}\cdot LI\cdot I = \frac{1}{2}\cdot NAB\cdot\frac{B\ell}{\mu_0 N} = \frac{B^2}{2\mu_0}\cdot A\cdot\ell$$

Her er $A\cdot\ell$ = volumet inne i spolen, dvs der vi har $B\neq 0$.

$\Rightarrow$ Energien pr volumenhet "lagret" i et magnetfelt er: $\boxed{u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2}$

Fra før (s 39): $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ = energi pr volumenhet i el. felt

$\Rightarrow$ Total energi pr volumenhet i et elektromagnetisk felt er:

$$\boxed{u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2}$$