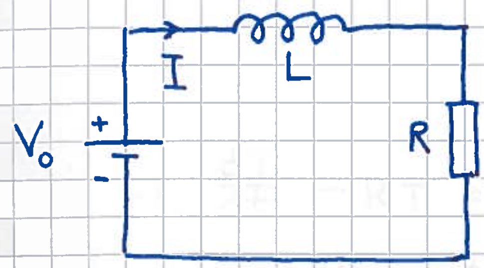
Kretser og anvendelser ; DC og AC

[YF 30.4-6 ; 31]

RL-krets (DC) [YF 30.4] (DC = direct current = likestrøm)

Kobler til en likespenning V_0 ved $t=0$.



Uten induktansen L ville I blitt V_0/R "umiddelbart" (Ohms lov). Med L i kretsen tar det tid å øke strømmen fra $I=0$ til $I=V_0/R$ fordi det induseres en motspenning $-L\,dI/dt$ i induktansen.

Bruker Kirchhoffs spenningsregel ("K2"):

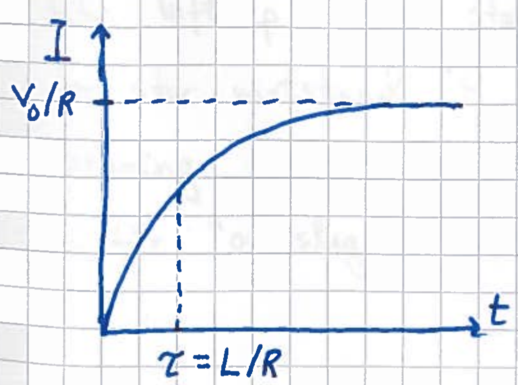
$$V_0 - L\frac{dI}{dt} - RI = 0 \quad ; \quad I(0)=0$$

Dette er nøyaktig samme ligning for I som vi hadde for kondensatorladningen Q i RC-kretsen (se s 47):

$$V_0 - R\frac{dQ}{dt} - \frac{1}{C}Q = 0 \quad ; \quad Q(0)=0$$

Fant da: $Q(t) = V_0 C\left\{1 - e^{-t/RC}\right\}$

$\Rightarrow$ Må nå finne: $I(t) = \frac{V_0}{R}\left\{1 - e^{-t/(L/R)}\right\}$



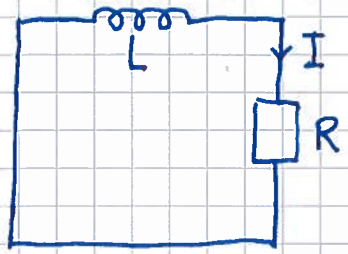
Kretsens tidskonstant: $\tau = L/R$

Angir "tidsskala" ("typisk tid") for å øke strømmen fra $I=0$ til $I \approx V_0/R$.

Stor L $\Rightarrow$ stor indusert motspenning

$\Rightarrow$ tar lang tid å endre strømmen i kretsen

Anta at vi har oppnådd $I \approx V_0/R$ og så kobler ut spenningskilden, slik at kretsen blir:



Uten induktansen i kretsen ville strømmen reduseres til $I=0$ umiddelbart. (Ohms lov) Med L i kretsen tar dette tid fordi induktansen prøver å opprettholde strømmen i kretsen.

$$K2: \quad -L\frac{dI}{dt} - RI = 0 \quad ; \quad I(0) = V_0/R$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau} \quad ; \quad \tau = L/R$$

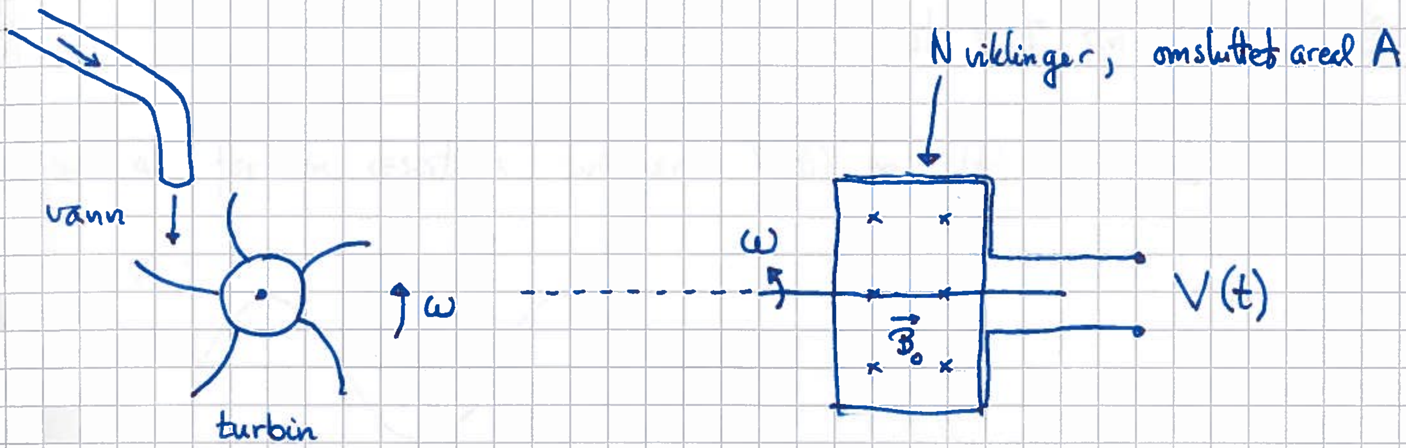
Gnist i stikk-kontakten:

Når støpselet dras ut, reduseres strømmen meget raskt til null. Dvs $|dI/dt|$ blir meget stor. Uansett hva vi hadde koblet til (støvsuger, mixmaster, ...) vil kretsen alltid ha en viss induktans L, så det vil uansett induseres en stor spenning et eller annet sted i kretsen. I det støpselet dras ut oppstår et lite luftgap mellom støpsel og stikk-kontakt. Luftgapet representerer en stor motstand R, men hvis det oppstår en svært stor indusert spenning i kretsen, kan det gå en kortvarig strøm over luftgapet. Vi får "overslag", lufta "tar fyr", og vi kan se (og høre) en gnist.

AC spenningskilde

AC = alternating current = vekselstrøm

Prinsipp for en AC-generator:



Omsluttet fluks: $\Phi(t) = N \cdot B_0 \cdot A \cdot \cos \omega t$

Indusert spenning: $V(t) = -d\Phi/dt = NB_0A\omega \sin \omega t$

dvs vekselspenning $V_0 \sin \omega t$ med amplitude $V_0 = NB_0A\omega$

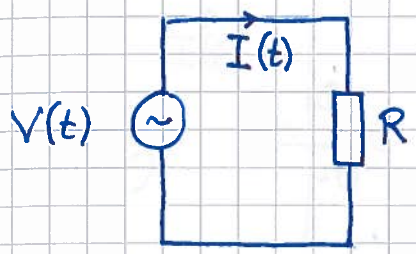
Kretssymbol: 

$V(t) = V_0 \sin \omega t$ (eller $V_0 \cos \omega t$)

Frekvens: $f = \omega / 2\pi$

Europa: $f = 50$ Hz (USA: 60 Hz)

Effekttap og rms-verdier [YF 31.1, 31.4]

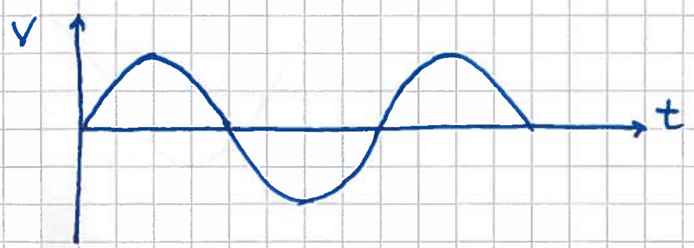


K2 (Ohms lov):

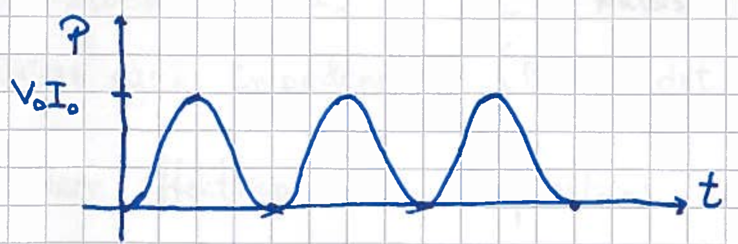
$$V_0 \sin \omega t - RI = 0$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t \; ; \; I_0 = \frac{V_0}{R}$$

Vi ser at for en resistans svinger $V(t)$ og $I(t)$ ***i fase***:



Effekttap: $P(t) = V(t) \cdot I(t) = V_0 I_0 \sin^2 \omega t$



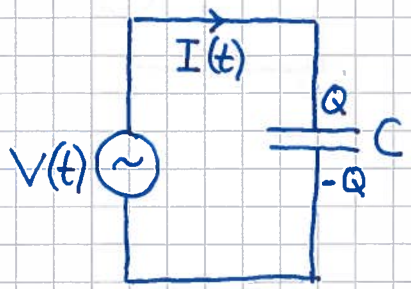
Midlere effekttap: $\langle P \rangle = V_0 I_0 \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0$

RMS-verdier (Effektiv-verdier ; RMS = root mean square)

$$\langle P \rangle = V_{rms} \cdot I_{rms} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_{rms} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \, , \; I_{rms} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Norge (Europa): $V_{rms} \approx 230 \text{ V}$, dvs $V_0 \approx 325 \text{ V}$

C og L i AC-kretser [YF 31.2]

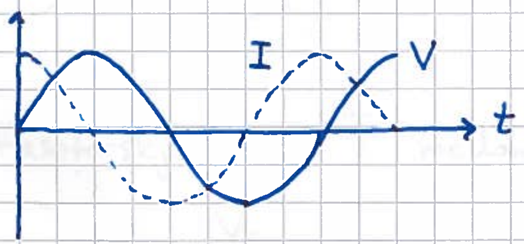


K2: $V_0 \sin \omega t - \frac{Q}{C} = 0$

$\Rightarrow Q(t) = V_0 C \sin \omega t$

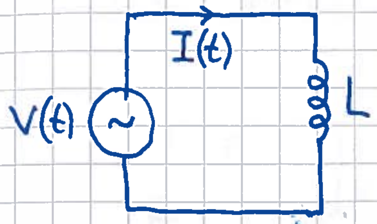
$\Rightarrow I(t) = \frac{dQ}{dt} = V_0 \omega C \cos \omega t$

$= V_0 \omega C \sin(\omega t + \pi/2)$



- Faseforskjell $\pi/2$ mellom V og I for en kapasitans.
- Strømamplituden blir frekvensavhengig: $I_0(\omega) = V_0 \omega C$
- $I_0 = 0$ med likestrøm, $\omega = 2\pi f = 0$. Kondensatoren er da en "åpen krets".
- Forholdet $V_0 / I_0 = \frac{1}{\omega C}$ kalles (kapasitiv) reaktans: $X_C = \frac{1}{\omega C}$
  Kalles også impedans. (Mer om det i FY6018)
- Middlere effekttap i en kapasitans er null:

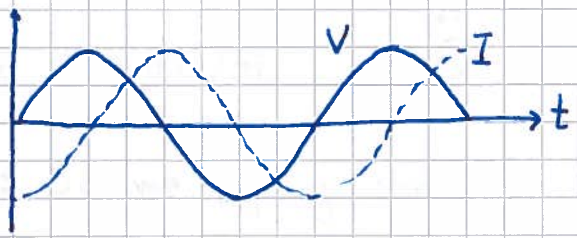
  $\langle P \rangle = V_0 I_0 \cdot \langle \sin \omega t \cdot \cos \omega t \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0 \langle \sin 2\omega t \rangle = \underline{0}$
- Må ha $[X_C] = [V/I] = [R] = \Omega$, dvs $1 \frac{s}{F} = 1 \Omega$



$$K2: \; V_0 \sin \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow I(t) = -\frac{V_0}{\omega L} \cos \omega t$$

$$= \frac{V_0}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

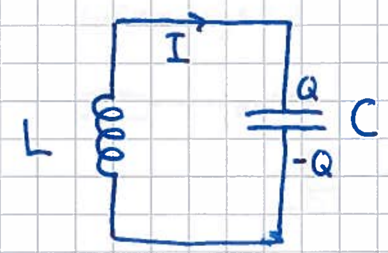


- Faseforskjell $\leftrightarrow$ $\frac{\pi}{2}$ mellom V og I for en induktans
- $I_0(\omega) = \frac{V_0}{\omega L}$
- $I_0 \to \infty$ med likestrøm, $\omega = 0$. Induktansen er da en kortslutning.
- $V_0 / I_0 = \omega L$ = (induktiv) reaktans : $X_L = \omega L$
- Midlere effekttap er null i en induktans:

  $$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0 V_0 \langle \sin 2\omega t \rangle = \underline{0}$$

- Må ha $[X_L] = \Omega$, dvs $1 \; H/s = 1 \, \Omega$

LC-krets [YF 30.5]

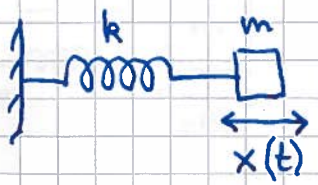


Anta $Q(0) = Q_0$

K2: $-L\frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$

Med $I = dQ/dt$: $\ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0$

Dvs: Samme ligning som for masse i fjær:



N2: $-kx = m\ddot{x}$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Løsning(er): $x(t) = x_0 \cos\omega_0 t$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$Q(t) = Q_0 \cos\omega_0 t$; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Begge systemer er en enkel harmonisk oscillator!

Vi har en "perfekt analogi" mellom det mekaniske og det elektromagnetiske svingesystemet:

$Q \leftrightarrow x$, $I \leftrightarrow \dot{x}$, $L \leftrightarrow m$, $C \leftrightarrow \frac{1}{k}$

$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \leftrightarrow \frac{1}{2}LI^2$ = energien i $\vec{B}$-feltet i induktansen

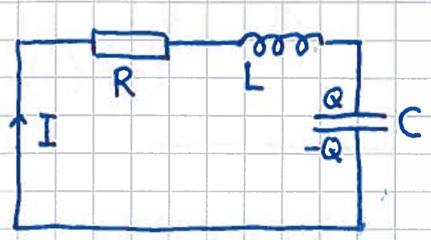
$U = \frac{1}{2}kx^2 \leftrightarrow \frac{Q^2}{2C}$ = — " — $\vec{E}$-feltet i kapasitansen

Begge systemer er konservative, mekanisk / el.magn. energi er bevart:

$$\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2 = \frac{Q_0^2}{2C}\cos^2\omega_0 t + \frac{1}{2}LQ_0^2\underbrace{\omega_0^2}_{=1/LC}\sin^2\omega_0 t = \frac{Q_0^2}{2C} = \text{konstant}$$

RLC resonanskrets [YF 30.6, 31.3, 31.5]

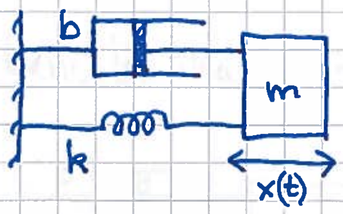
Uten spenningskilde:



K2: $-RI - L\dot{I} - \frac{Q}{C} = 0$

$\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0$

Mekanisk analogi:



N2: $-b\dot{x} - kx = m\ddot{x}$

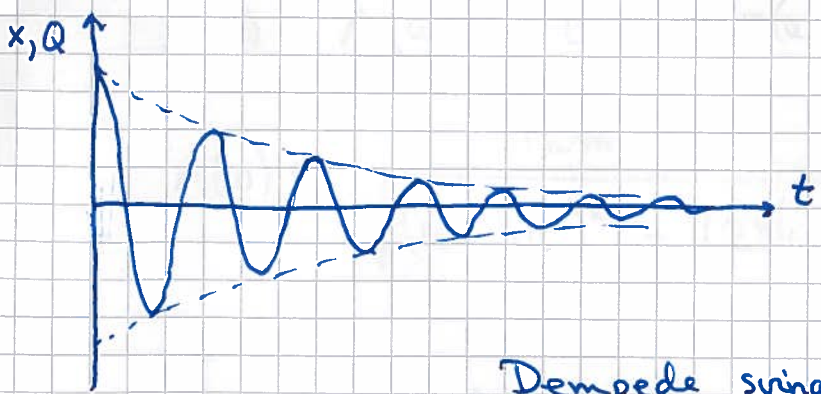
$\Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

(dvs: $b \longleftrightarrow R$)

Løsninger (antar underkritisk demping; $\gamma = b/2m < \omega_0 = \sqrt{k/m}$, dvs $R/2L < 1/\sqrt{LC}$):

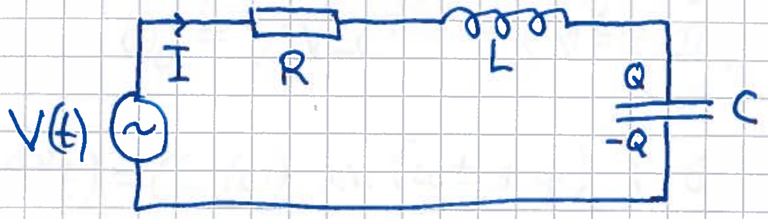
$x(t) = x_0 \, e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$Q(t) = Q_0 \, e^{-Rt/2L} \sin(\omega t + \varphi)$; $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$



Dempede svingninger

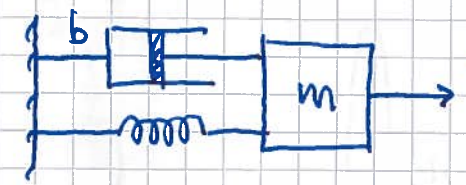
Med AC spenningskilde:



K2: $V_0 \sin \omega t - RI - L\dot{I} - \frac{Q}{C} = 0$

$$\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_0 \sin \omega t$$

Mekanisk analogi:

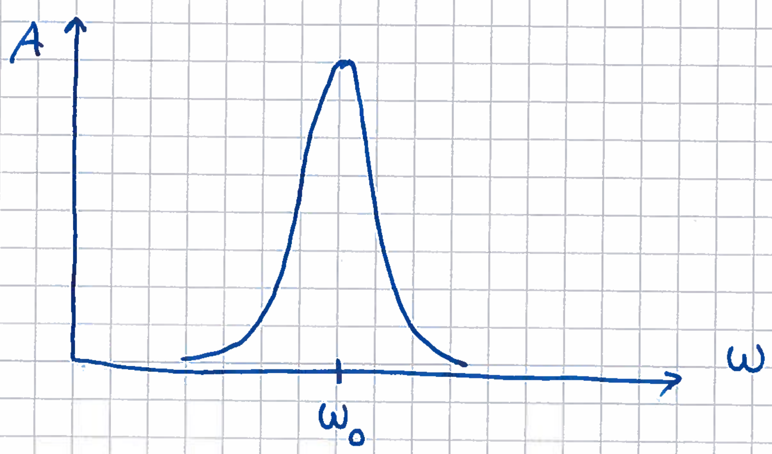


N2 $\Rightarrow$ $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$ (dvs $F_0 \leftrightarrow V_0$)

Resonans: Når $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, vil massen m svinge med spesielt stor amplitude.

$$x(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

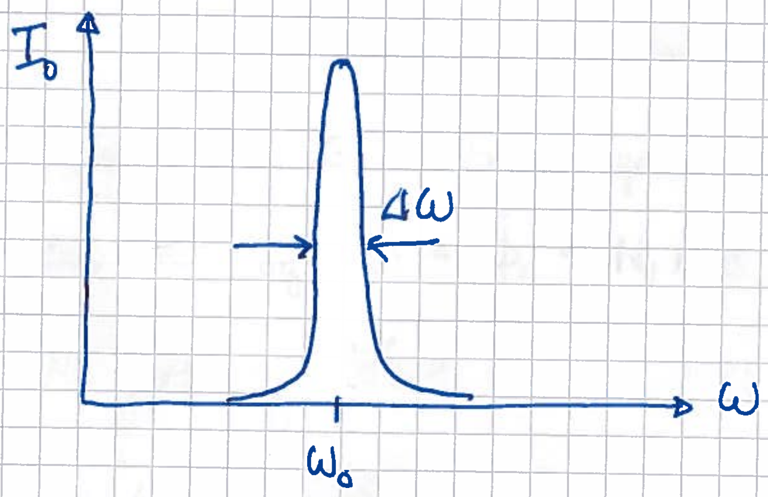
$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \qquad (\gamma = b/2m)$$



Tilsvarende får både $Q(t)$ og $I(t)$ særlig stor amplitude, hhv $Q_0(\omega)$ og $I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega)$, når $\omega \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$: $(\gamma = R/2L)$

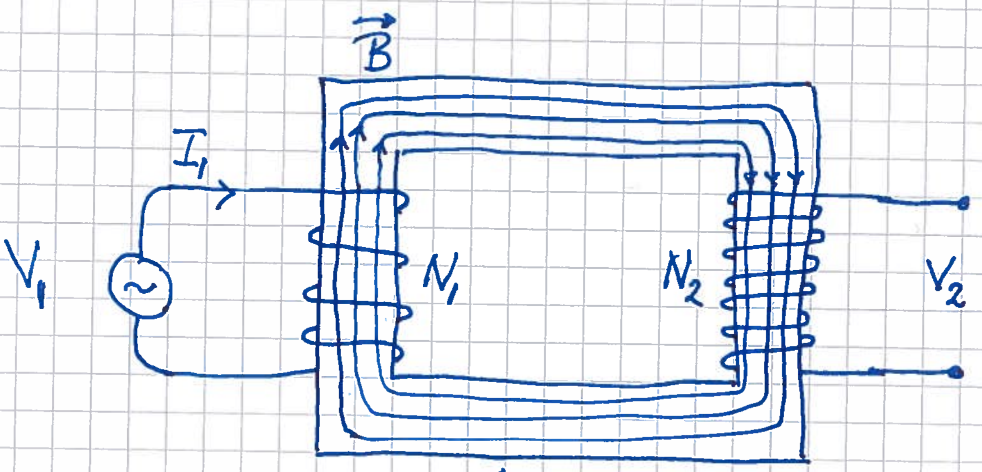
$$Q(t) = Q_0(\omega)\sin(\omega t + \varphi) \; ; \; Q_0(\omega) = \frac{V_0/L}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

$$I(t) = \omega Q_0(\omega)\cos(\omega t + \varphi)$$
$$= I_0(\omega)\cos(\omega t + \varphi)$$



Halvverdibredde: $\Delta\omega = 2\gamma = R/L$

Transformator [YF 31.6]



Jernkjerne med stor μ_r
$\Rightarrow$ Feltlinjene for $\vec{B}$ følger jernet i stor grad.

Med samme felt B i begge spoler har vi:

$\Phi_1 = N_1 BA$ og $V_1 = \dot{\Phi}_1 = N_1 A \dot{B}$ i primærspolen

$\Phi_2 = N_2 BA$ og $V_2 = \dot{\Phi}_2 = N_2 A \dot{B}$ i sekundærspolen

$$\Rightarrow \boxed{V_2/V_1 = N_2/N_1}$$

$\Rightarrow$ Spenningen inn, V_1, kan transformeres til en spenning ut, V_2, med større ($N_2 > N_1$) eller mindre ($N_2 < N_1$) amplitude enn V_1 !

Høyspenning på overføringsnettet for å minimere effekttapet:

$P_{tap} = RI \cdot I = RI^2$, dvs fordel med liten strøm I,

dvs fordel med stor spenning V for å få overført en viss effekt

$$P = V \cdot I \;;\; \frac{P}{P_{tap}} = \frac{VI}{RI^2} = \frac{V}{RI} = \frac{V}{R(P/V)} = \underline{\underline{\frac{V^2}{RP}}}$$

(Norge: $V \approx 11 - 420$ kV)