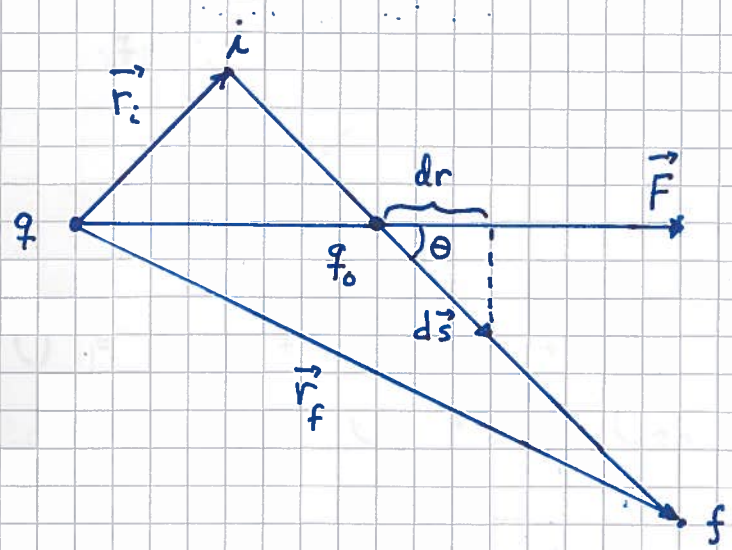


Potensiell energi og elektrisk potensial [YF 23.1, 23.2]

Vi regner ut pot. energi for en testladning q_0 som befinner seg i $\vec{E}$ -feltet fra en referanseladning q :



$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot d\vec{s} &= F \cdot ds \cdot \cos \theta \\ &= F \cdot dr\end{aligned}$$

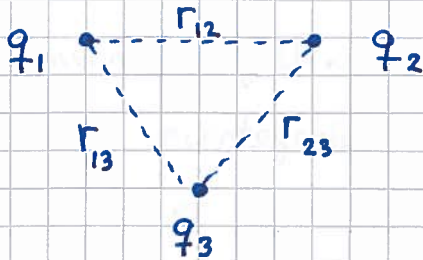
$$\begin{aligned}\Delta U &= U_f - U_i \stackrel{\text{def}}{=} - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{r_i}^{r_f} F \cdot dr = - \frac{q q_0}{4\pi \epsilon_0} \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{q q_0}{4\pi \epsilon_0 r_f} - \frac{q q_0}{4\pi \epsilon_0 r_i}\end{aligned}$$

Naturlig å velge $U = 0$ for $r \rightarrow \infty$.

Da har ladningsparet q og q_0 i innbyrdes avstand r sammen en pot. energi lik

$$U(r) = \frac{q q_0}{4\pi \epsilon_0 r}$$

Med flere ladninger: Alle ladningene i systemet vekselvirker parvis. Naturlig å velge $U=0$ med alle ladningene uendelig langt fra hverandre.



$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

$$U = U_{12} + U_{13} + \dots + U_{1n} \\ + U_{23} + \dots + U_{2n} \\ + \dots \\ + U_{n-1,n}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_{ij} = \sum_{i < j} U_{ij} = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Vi definerer nå elektrisk potensial som pot. energi pr ladningsenhet:

$$V = \frac{U}{q_0}$$

$$\text{Enhet: } [V] = \frac{J}{C} = V \text{ (volt)}$$

Vi fant at $U = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 r}$ for ladn. par i avstand r .

Da kan vi konkludere med at en punktladning q omgir seg med potensialet

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Goulombpotensialet

Vi har : $\Delta U = - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s}$, $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ og $V = U/q_0$ (21)

Dermed :

$$\Delta V = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

ders potensialforskjellen mellom f og i , $\Delta V = V_f - V_i$, er gitt ved "veointegralet" av $\vec{E}$.

Kraften $\vec{F}$ er konservativ, så ΔU er uavhengig av veien fra i til f . Tilsvarende blir ΔV også uavh. av veien.

Vi ser nå at en alternativ enhet for el. feltstyrke må bli

$$[E] = V/m$$

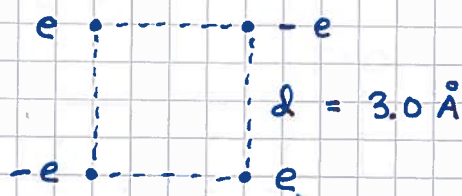
som er mer brukt enn J/C .

Videre kan vi innføre en alternativ, og mye brukt energienhet :

1 eV = 1 elektronvolt = endringen i pot. energi for en elementær ladning ($q = e$) som flyttes fra posisjon i med potensial V_i til posisjon f med potensial $V_f = V_i + 1V$, dvs slik at $\Delta V = V_f - V_i = 1V$.

$$1 \text{ eV} = 1 \cdot \underbrace{1.6 \cdot 10^{-19}}_e \text{ C} \cdot 1 \underbrace{J/C}_V = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Eks: Beregn U for følgende system:



Løsn: 6 ladningspar bidrar til total pot. energi $U = \sum_{i,j} U_{ij}$

$$U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \left\{ -1 \cdot 4 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \right\} = \frac{(\sqrt{2} - 4)e^2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

$$\approx 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(\sqrt{2} - 4) \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{3.0 \cdot 10^{-10}} \text{ eV} = \underline{\underline{-12 \text{ eV}}}$$

Dvs, 12 eV "mer stabilt" enn med ∞ avstand mellom alle fire.

Eks: To metallplater med plateavstand 1.0 mm, areal 200 cm^2 og ladning hhv $+5.5 \text{ nC}$ og -5.5 nC jevnt fordelt.

- Hva er $\vec{E}$ mellom platenes? Utenfor platenes?
- Beregn potensialforskjellen (spenningen) mellom platenes.
- Skisser $E(x)$ og $V(x)$. ($x=0$ på pos. plate, $x=d$ på neg. plate.)

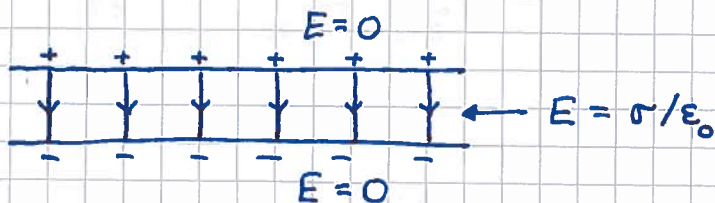
Løsn:

- a) Fra eks. s. 16-17: Felt fra stort og jevnt ladet plan er $\vec{E} = \sigma/2\epsilon_0$, med $\sigma = Q/A =$ ladningen pr flateenhet.

Retning: Bort fra pos. ladet plan, inn mot neg. ladet plan.



Mellom de to parallelle platene blir dermed $E = 2 \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$,
utenfor blir $E = 0$:



Her er $\sigma = Q/A = 5.5 \cdot 10^{-9} \text{ C} / 200 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 2.75 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^2$
slik at mellom platene er

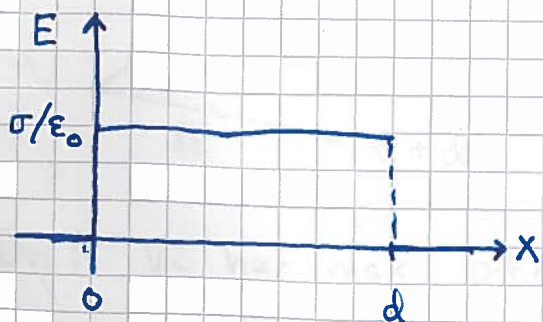
$$E = \sigma/\epsilon_0 = (2.75 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^2) / (8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2) = 31 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}} = \underline{\underline{31 \frac{\text{kV}}{\text{m}}}}$$

b) Med $\vec{E}$ rettet fra pos. mot neg. plate:

$$\begin{aligned} \Delta V = V_+ - V_- &= - \int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{(+)}^{(-)} E \cdot ds = E \cdot d \\ &= 31 \text{ kV/m} \cdot 10^{-3} \text{ m} = \underline{\underline{31 \text{ V}}} \end{aligned}$$

Høgest potensial på pos. plate, lavest pot. på neg. plate.
 $\vec{E}$ retning mot lavere potensial.

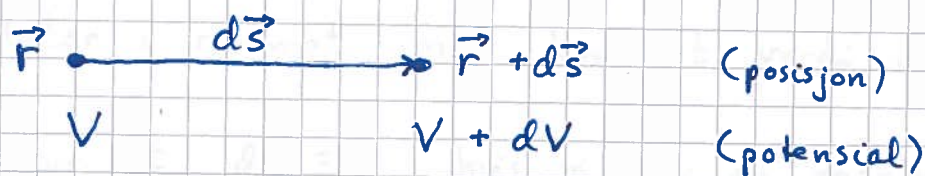
c) Med $E = \text{konstant}$ mellom platene må $V(x)$ bli en
lineært avtagende funksjon, fra V_+ på pos. plate
til V_- på neg. plate; $E(x)$ blir ganske enkelt en konstant:



Utenfor platene er potensialet konstant, lik V_+ for $x < 0$
og V_- for $x > d$, fordi her er $E = 0$.

Beregning av $\vec{E}$ fra V [YF 23.5]

(24)



$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\ &= \left(\hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) \cdot (\hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz) \\ &= \nabla V \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

↑ gradienten til V ↑ vektorelement

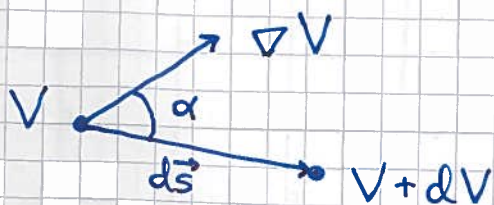
Fra før (s. 21):

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = \text{potensialforskjellen mellom } \vec{r} + d\vec{s} \text{ og } \vec{r}$$

Dermed må vi ha:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

Tolkning av ∇V :



$$\begin{aligned} dV &= \nabla V \cdot d\vec{s} \\ &= |\nabla V| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Dvs: Vi har max. pot.ending dV hvis forflytningen $d\vec{s}$ går i samme retning som ∇V (da er $\alpha=0$ og $\cos \alpha=1$)

Dvs: ∇V er vektor i retning max. økende V , med absoluttverdi lik endringen i V pr lengdeenhet, og samtidig lik $|\vec{E}|$

Equipotential surfaces

[YF 23.4]

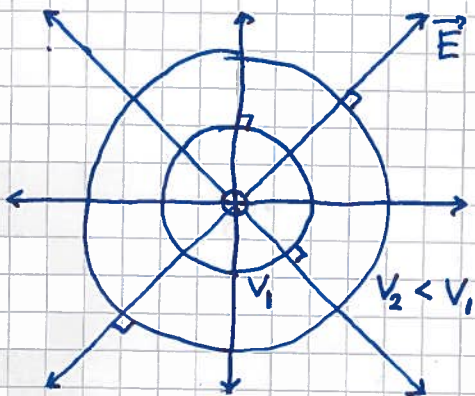
(25)

= surfaces in space with constant value of V

Det betyr at $dV = 0$ hvis vi gjør en forflytning $d\vec{s}$ på (langs) en equipotential surface. Men da er også
 $\Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$, dvs $\vec{E} \perp d\vec{s}$

$\Rightarrow$ $\vec{E}$ står alltid normalt på equipotential surfaces

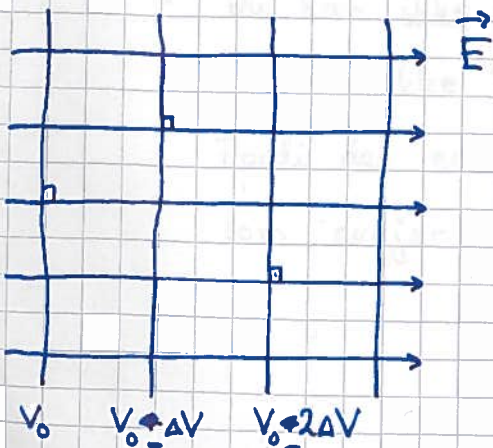
Eks 1: Punktladning



$\vec{E}$ er rettet radieelt
 $\downarrow$

Equipotential surfaces are spherical

Eks 2: Uniform $\vec{E}$ - felt



Equipotential surfaces are
plan $\perp \vec{E}$

Eks: Bestem $\vec{E}$ når $V = V(z) = V_0 \cdot z / a$.

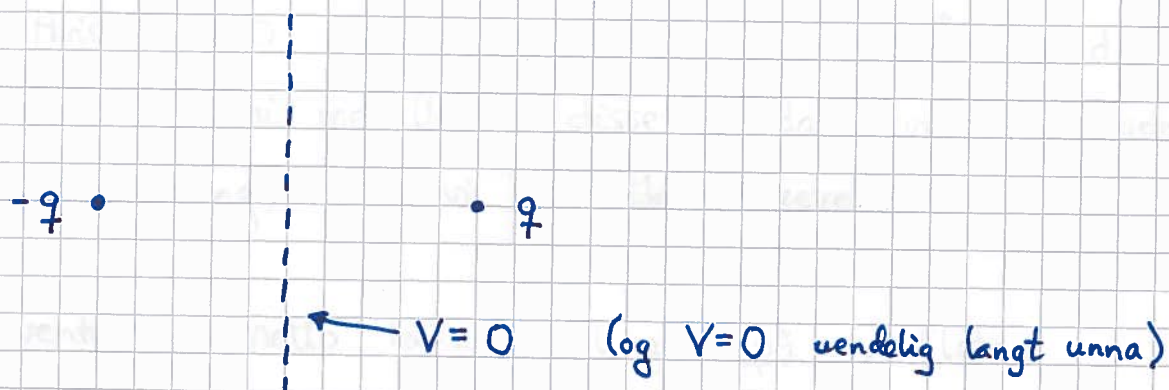
Løsn: Her er $\partial V / \partial x = \partial V / \partial y = 0$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\hat{z} \partial V / \partial z = \underline{-\hat{z} V_0 / a}$$

dvs uniformt elektrisk felt som peker i negativ z -retning, med feltstyrke V_0 / a .

Eks: Finn ekvipotensialflaten $V=0$ for en enkel dipol.

Løsn: Coulombpotensialet er $V(r) = q / 4\pi\epsilon_0 r$. Her har vi to punktladninger q og $-q$, slik at $V=0$ på steder med lik avstand til de to ladningene:



NB: Selv om $V=0$ i planet som "halverer" dipolen, betyr det generelt ikke at $\vec{E}=0$.

Du kan ikke resonnerer slik: $\vec{E} = -\nabla V = -\nabla 0 = 0$
Hvorfor ikke?

Fordi det er hvordan V endrer seg i et område som avgjør hva $\vec{E}$ blir!

Materialens elektriske egenskaper

(27)

Ledere [YF 22.5]

Typisk metaller.

Metaller har frie ("mobile") elektroner, typisk ett (eller to) pr atom, som vil bevege seg hvis de utsettes for krefter, dvs et el. felt $\vec{E}$. Konsekvenser:

- $\vec{E} = 0$ inni metallet (vi antar her elektrostatisk likevekt!)

Bevis: Hvis $\vec{E} \neq 0$, virker en kraft $\vec{F} = -e\vec{E}$ på de frie elektronene inni metallet; disse vil da bevege seg (akselerere) i kraftens retning, dvs vi har ikke likevekt!

- All (eventuell) netto ladning ligger på overflaten av et metall

Bevises ved å bruke Gauss' lov; bare pensum hvis vi får tid. Det skyldes at $F(r) \sim 1/r^2$ (og ikke f.eks. som $1/r$)

- På metallens overflate står $\vec{E}$ normalt på overflaten.

Bevis: Hvis $E_{\parallel} \neq 0$, er $F_{\parallel} = -eE_{\parallel} \neq 0$, og frie elektroner (på overflaten) vil flytte seg til andre steder; dvs vi har ikke likevekt!

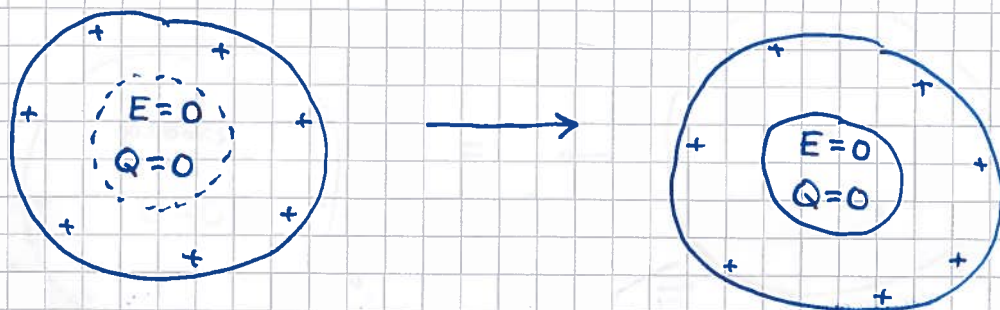
Hvis overflateledning pr flateenhet er σ , er feltstyrken på overflaten σ/ϵ_0 . Kan vises med Gauss' lov.

- En metallbit i likevekt er et ekuipotensial.

Beris: Enhver forflytning $d\vec{s}$ inni metallet gir $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$, da $\vec{E} = 0$. Tilsvarende på / langs overflaten, for der er $\vec{E} \perp d\vec{s}$.

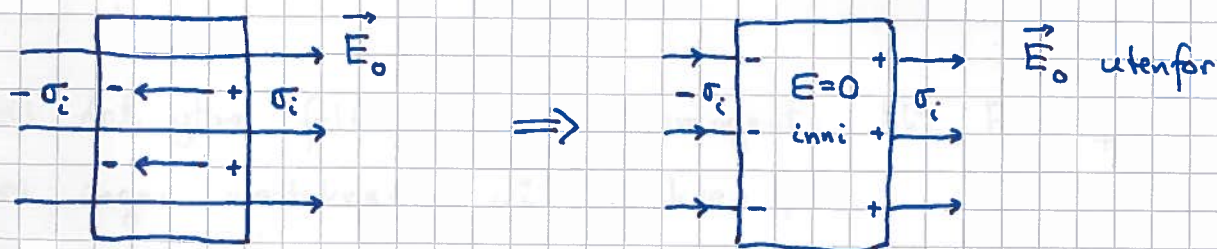
- Metallstykke med hulrom har $E=0$ i hulrommet og all nettoladning på ytre overflate.

Beris: Forestill deg at du lager hulrommet ved å fjerne en elektrisk nøytral bit inne i et kompakt metallstykke:



Har fremdeles $E=0$ og $Q=0$ der hulrommet er, for ingenting er endret, sett fra et elektrostatiske synspunkt.

Metall i ytre felt $\vec{E}_0$:

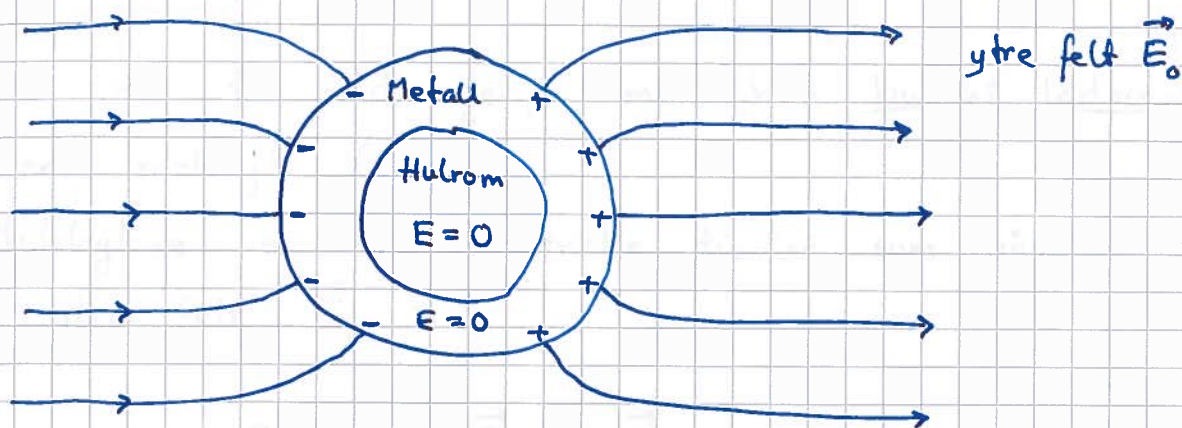


Ytre felt $\vec{E}_0$ trekker frie elektroner i metallet til overflaten.

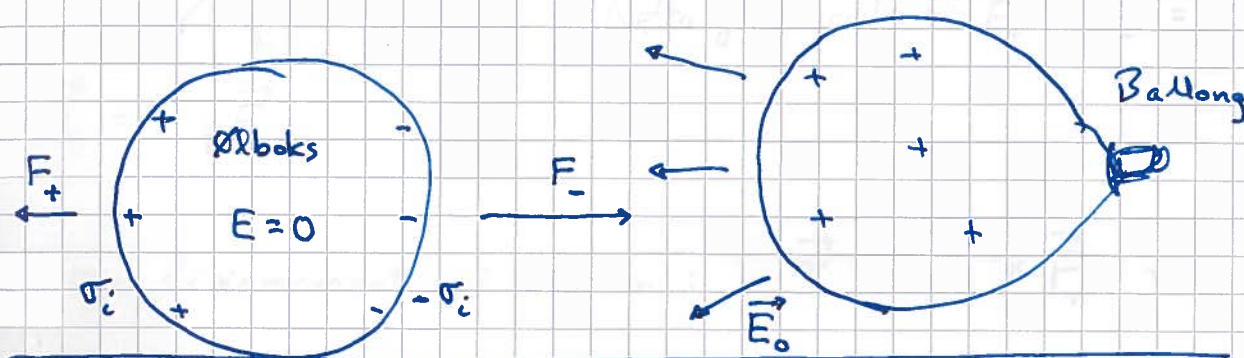
Vi får induert ladning $\pm \sigma_i$ pr flateenhet, som resulterer i et induert felt $\vec{E}_i = -\vec{E}_0$ inni metallet, slik at totalt felt $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i = 0$ inni metallet. Slik det må være i likevekt.

Elektrostatisk skjerming ; Faradaybur :

(29)



Metallboks i inhomogent ytre felt :



Netto tiltrekkende kraft ($F_- > F_+$) pga kortere avstand mellom ballongen og den negative induserte ladningen $-\sigma_i$ på ølboksen.

(Hvis det ytre feltet $\vec{E}_0$ er homogent, blir $F_- = F_+$, dvs ingen nettokraft på ølboksen.)

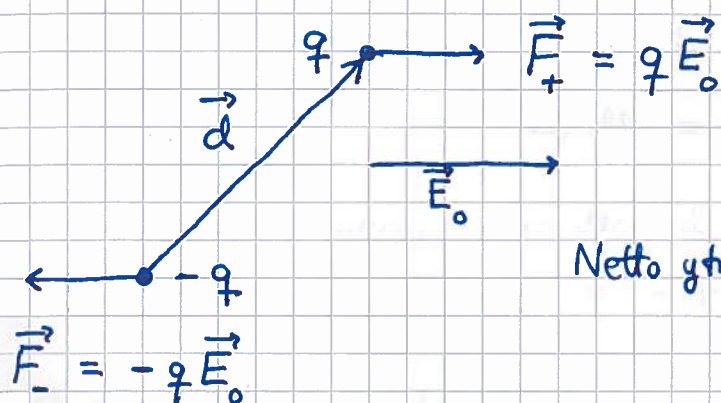
Isolatorer (Dielektrika)

[YF 24.4-5]

(30)

Har ikke frie ladninger, men har bundet ladning på hvert molekyl (atom).

Molekylene er små elektriske dipoler som påvirkes av et ytre felt $\vec{E}_0$:

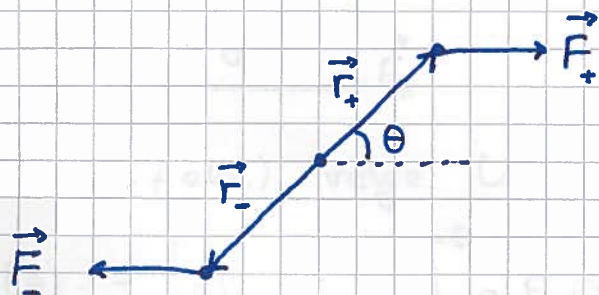


Dipolmoment:
 $\vec{p} = q\vec{d}$

Netto ytre kraft: $\vec{F}_+ + \vec{F}_- = 0$

Ytre dreiemoment på dipolen:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = \vec{\tau}_+ + \vec{\tau}_-$$



Både $\vec{\tau}_+$ og $\vec{\tau}_-$ peker inn i planet. Gir rotasjon med klokke.

$$\tau_+ = \tau_- = \frac{d}{2} \cdot qE_0 \cdot \sin \theta$$

$$\Rightarrow |\tau| = qd \cdot E_0 \cdot \sin \theta = p \cdot E_0 \cdot \sin \theta$$

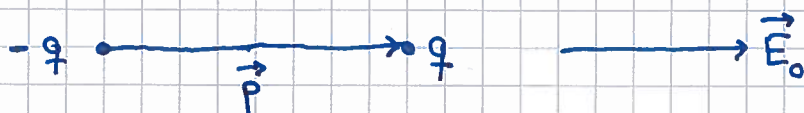
ders

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0}$$

$$= -\vec{E}_0 \times \vec{p} = -pE_0 \sin \theta,$$

når positiv θ måles fra $\vec{E}_0$ til $\vec{p}$

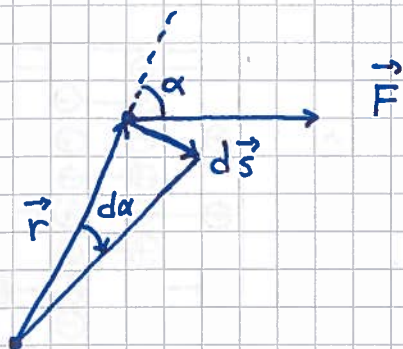
Molekylære dipoler rettes inn langs det ytre feltet:



Potensiell energi for dipol $\vec{p}$ i ytre felt $\vec{E}_0$:

(31)

Arbeid utført av $\vec{F}$ ved rotasjon :



$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ &= F \cdot ds \cdot \cos(\pi/2 - \alpha) \\ &= F \cdot ds \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

$$ds = r \cdot d\alpha$$

$$\Rightarrow dW = F \cdot r \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha = \tau \cdot d\alpha$$

Endringen i pot. energi blir dermed

$$dU = -dW = -\tau \cdot d\alpha$$

Dreiemomentet på dipolen var: $\tau = -p \cdot E_0 \cdot \sin \theta$,
med θ = vinkelen mellom ~~vektoren~~ $\vec{E}_0$ og $\vec{p}$

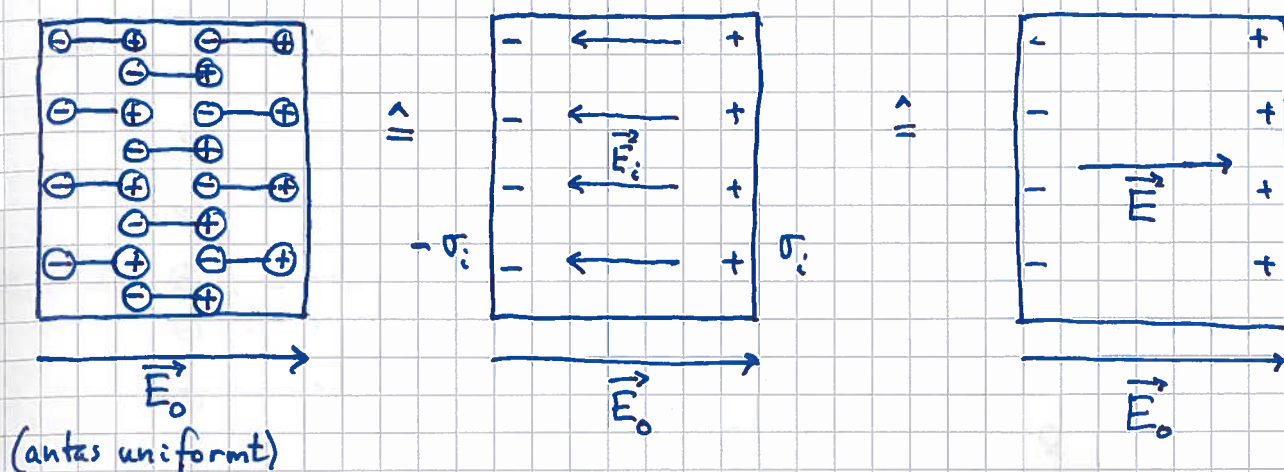


Vi kan (f.eks.) velge $U=0$ når $\theta = \frac{\pi}{2}$. Da får vi:

$$\begin{aligned} U(\theta) &= \int dU = + \int_{\pi/2}^{\theta} p \cdot E_0 \cdot \sin \theta \, d\theta \\ &= -p \cdot E_0 \int_{\pi/2}^{\theta} \cos \theta \, d\theta = -p E_0 \cos \theta \quad (\cos \pi/2 = 0) \\ &= \underline{\underline{-\vec{p} \cdot \vec{E}_0}} \end{aligned}$$

Dvs: Lavest U når $\theta=0$; $U_{\min} = -p \cdot E_0$
Høgest U når $\theta=\pi$; $U_{\max} = +p \cdot E_0$

Innretting av svært mange molekyulære dipoler langs det ytre feltet $\vec{E}_0$ gir en netto, makroskopisk effekt:



- Null netto ladning inni. Indusert ladning pr flateenhet $\pm \sigma_i$ på overflaten
- Indusert felt $\vec{E}_i$ inni, motsatt rettet $\vec{E}_0$, gir svekket totalfelt inni isolatoren: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$; $|\vec{E}| = |\vec{E}_0| - |\vec{E}_i|$.

Hvis stor dielektrisk skive:

$$E_i = \sigma_i / \epsilon_0 \quad (\text{a la eks s22-23})$$

- Lineær respons: E_i blir prop. med E_0 , og dermed blir også E prop. med E_0 .
- Vi definerer isolatorens relative permittivitet ϵ_r :

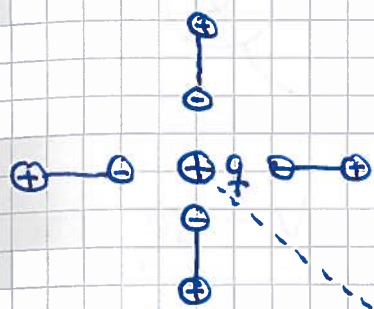
$$\boxed{E = \frac{1}{\epsilon_r} E_0}$$

$$\text{Enhet: } [\epsilon_r] = 1$$

- Noen tallverdier:

	Vakuum	Tørr luft	Plast	Rent vann	Perfekt metall ^(E=0)
ϵ_r	1	1.00054	2-6	80	∞

- Isolatørens permittivitet blir : $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$
- Feltet fra en punktladning q svekkes inne i en isolator pga polarisering av materialet i feltet fra q :



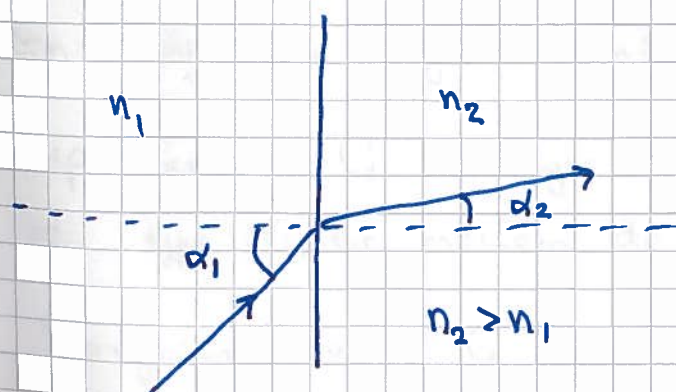
$$E(r) = \frac{E_{vak}(r)}{\epsilon_r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$$

- Lysfarten : $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ i vakuum (299792458 m/s)

I en isolator : $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} < c$ (da $\epsilon_r > 1$)

- Brytningsindeks : $n = \sqrt{\epsilon_r}$

Snells lov : $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$



Synlig lys i vann :
 n varierer mellom
1.33 (rødt) og 1.35 (blått).

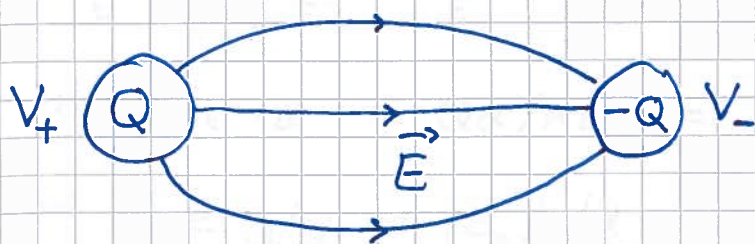
Gir bl.a. regnbuen!

Kondensator og kapasitans

[YF 24]

(34)

En kondensator er rett og sløtt to ledere, adskilt med en isolator.



$$V = V_+ - V_- = - \int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{er prop. med } Q,$$

fordi $\vec{E}$ er prop. med Q , pga Coulombs lov

Kondensatorens kapasitans er:

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q}{V}$$

• Enhet: $[C] = C/V = F$ (farad)

• Symbol i kretser:

• En kondensator lagrer ladning og energi

• Kapasitansen C avhenger av utforming (geometri) og type isolator mellom de to lederne

• Beregning av C :

Anta ladning $\pm Q$ på de to lederne

Regn ut $V = V_+ - V_-$

Da er $C = Q/V$

Eks 1: Luftfylt platekondensator; $C = ?$

Løsn: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q/A}{\epsilon_0}$ mellom platen

$$\Rightarrow V = E \cdot d = Qd/A\epsilon_0 = \text{pot. forskjellen mellom platen}$$

$$\Rightarrow C = Q/V = \underline{\underline{\epsilon_0 A/d}}$$

Med f.eks. $A = 314 \text{ cm}^2$ og $d = 1.0 \text{ mm}$ blir

$$C = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 314 \cdot 10^{-4} / 1.0 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{2.8 \cdot 10^{-10} \text{ F}}}$$

Eks 2: Platekondensator fylt med dielektrikum med rel. perm. ϵ_r ; $C = ?$

Løsn: $E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{Q/A}{\epsilon_r \epsilon_0}$

$$\Rightarrow V = E d = Qd/A\epsilon_r \epsilon_0$$

$$\Rightarrow C = Q/V = \epsilon_r \epsilon_0 A/d$$

dvs en faktor ϵ_r større enn med luft

Hvis f.eks. $\epsilon_r = 5.5$ og A og d som i Eks 1:

$$C = 5.5 \cdot 2.8 \cdot 10^{-10} \text{ F} = \underline{\underline{1.5 \text{ nF}}}$$

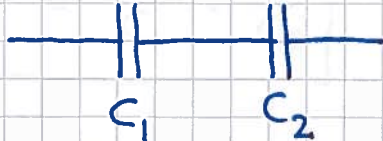
Enhet for ϵ_0 og ϵ :

Vi ser at $[\epsilon_0] = [\epsilon] = [C \cdot d/A] = \underline{\underline{F/m}}$

Kobling av flere kapasitanser [YF 24.2]

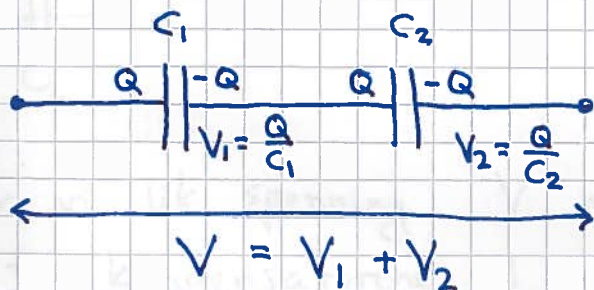
(36)

Seriekobling:

Hvis  skal erstattes av 

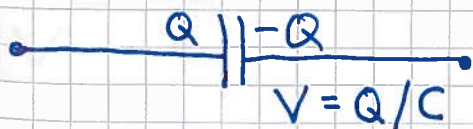
hva er da C ? Dette betyr at den ene C skal oppføre seg på samme måte som seriekoblingen av C_1 og C_2 .

Vi starter med å innse at det må være lik ladning $\pm Q$ på C_1 og C_2 hvis vi sørger for en total potensialforskjell $V = V_1 + V_2$ over seriekoblingen:



Hvorfor? Fordi det sammenhengende "metallstykket" i midten er elektrisk nøytralt i utgangspunktet.

Den ene "ekvivalente" kapasitansen C skal nå lagre like mye ladning, $\pm Q$, for en like stor potensialforskjell (spenning) V :



Da må vi ha:

(37)

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

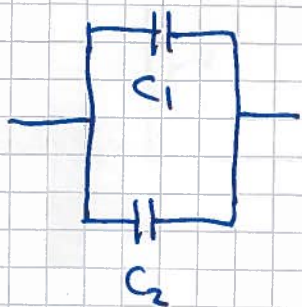
ders

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Dette kan generaliseres til N kapasitanser koblet i serie:

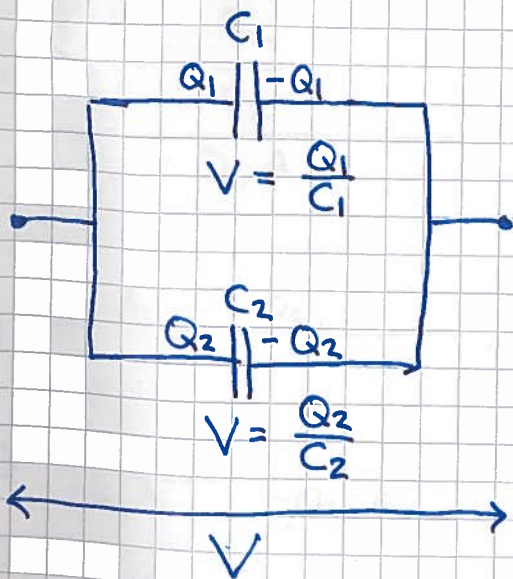
$$\boxed{C^{-1} = \sum_{j=1}^N C_j^{-1}}$$

Parallellkobling:



erstattes av  ; hva er da C ?

Her har vi lik spenning V mellom de to platene i de to kondensatorene 1 og 2:



Samlet ledning kgret på 1 og 2:

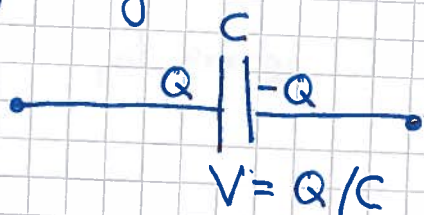
$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$Q_1 = C_1 V$$

$$Q_2 = C_2 V$$

Den ene C skal lagre samme ladning med samme spenning:

(38)



$$Q = CV$$

Dermed:

$$CV = C_1 V + C_2 V$$

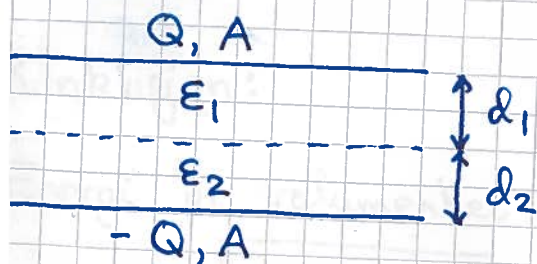
$\Rightarrow$

$$C = C_1 + C_2$$

Og med N stk koblet i parallell:

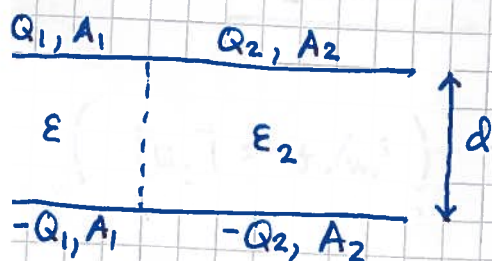
$$C = \sum_{j=1}^N C_j$$

Kondensatorer fylt med ulike isolatorer er å betrakte som serie- eller parallellkobling av flere kapasitanser:



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\epsilon_1 A} + \frac{d_2}{\epsilon_2 A}$$

(seriekobling)



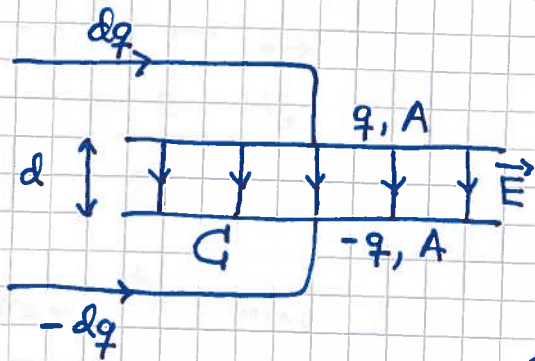
$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_1 A_1}{d} + \frac{\epsilon_2 A_2}{d}$$

(parallellkobling)

Energi i elektrisk felt [YF 24.3]

(39)

Opplading av kondensator krever et arbeid W . "Tilført" arbeid W tilsvarer pot. energi U lagret i feltet $\vec{E}$ mellom platene.



Økt ladning, fra $\pm q$ til $\pm (q + dq)$ gir systemet økt pot. energi:

$$dU = v(q) dq = \frac{q}{C} dq$$

der $v(q) = q/C$ er spenningen mellom platene når de har ladning $\pm q$

Opplading fra $q=0$ til $q=Q$ gir i alt en pot. energi

$$U = \int dU = \int_0^Q q dq / C = Q^2 / 2C = (CV)^2 / 2C = \frac{1}{2} CV^2$$

Med $C = \epsilon_0 A/d$ og $V = E \cdot d$ får vi

$$U = \frac{1}{2} (\epsilon_0 A/d) \cdot (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot (Ad)$$

Vi ser at $A \cdot d$ tilsvarer volumet mellom platene, dvs volumet av området der vi har $E \neq 0$.

Konklusjon:

Energi pr volumenhet "lagret" i et elektrisk felt er

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$([u_E] = \text{J/m}^3)$$

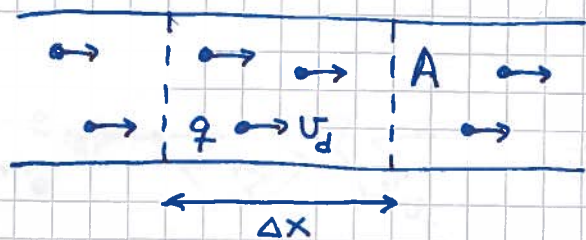
Elektrisk strøm

[YF 25, 26]

(40)

Strøm og strømtektthet

[YF 25.1]



← Leder med n frie ledninger pr volumenhet.

v_d = midlere driftshastighet langs lederen

strøm $\stackrel{\text{def}}{=}$ mengde ladning som passerer tverrsnitt av lederen pr tidsenhet

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dQ}{dt} ; \quad [I] = \frac{C}{s} = A \text{ (ampere)}$$

På tid $\Delta t = \Delta x / v_d$ passerer all fri ladning i volumet $\Delta V = A \Delta x$ tverrsnittet med areal A ; $\Delta Q = q \cdot \Delta N = q \cdot n \cdot \Delta V = qn \Delta x A$

$$\Rightarrow I = \frac{qn \Delta x A}{\Delta x / v_d} = nq v_d A$$

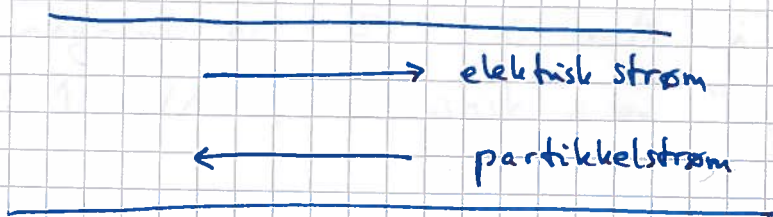
strømtektthet $\stackrel{\text{def}}{=}$ strøm pr flakeenhet

$$j = I / A ; \quad [j] = A / m^2$$

$$\Rightarrow j = nq v_d , \quad \text{ders } \vec{j} = nq \vec{v}_d$$

$$\text{Metall: } q = -e ; \quad j = -nev_d$$

Merk:

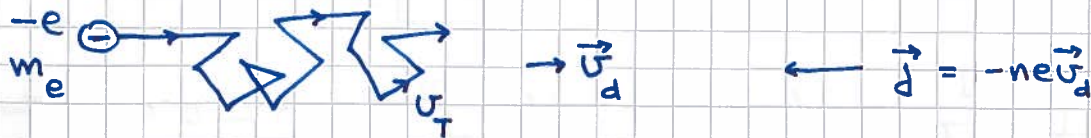


Ohms lov

[YF 25.2, 25.6]

(41)

Felt $\vec{E}$ $\Rightarrow$ Kraft $\vec{F} = -e\vec{E}$ som driver elektroner gjennom metallet:



λ = midlere avstand mellom kollisjoner (midlere fri veilengde)

$\tau = \lambda / v_T$ = midlere tid — " —

v_T = midlere elektronfart ved temp. T (termisk hastighet)

$\vec{v}_d = \vec{a} \cdot \tau = (-e\vec{E}/m_e) \tau$ = midlere driftshastighet

Dermed: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$; $\sigma = ne^2 \tau / m_e$ Ohms lov (på mikroskopisk form)

(etter Paul Drude, ca 1900) σ = materialets konduktivitet, evt. elektrisk ledningsevne

Omtrentlige tallverdier:

Elektronenes midlere kinetiske energi, $K = \frac{1}{2} m_e v_T^2$, er prop. med absolutt temperatur T ;

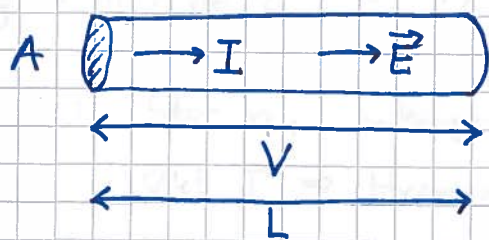
$$\frac{1}{2} m_e v_T^2 = \frac{3}{2} k_B T ; k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K (Boltzmanns konstant)}$$

$$\Rightarrow v_T = \sqrt{3 k_B T / m_e} \sim 10^5 \text{ m/s ved } 300 \text{ K}$$

Til sammenligning er $v_d \sim 10^{-6} \text{ m/s}$ i en kobberledning med $E \sim 1 \text{ mV/m}$; realistisk i en "typisk" elektrisk krets

Ohms lov på makroskopisk form (slik vi kjenner den):

(42)



$$V = E \cdot L ; \quad j = \frac{I}{A} = \sigma E$$

$$\Rightarrow I = \sigma E A = \frac{\sigma A}{L} \cdot V \quad \Rightarrow V = \frac{L}{\sigma A} \cdot I = RI$$

dvs: Lederens motstand (resistans) er

$$R = \frac{L}{\sigma A}$$

Lederens konduktans G : $I = G \cdot V \Rightarrow G = \sigma A / L = 1/R$

Materialets resistivitet ρ : $\rho = 1/\sigma$

Enheter: $[R] = V/A = \Omega$ (ohm); $[G] = \frac{1}{\Omega} = S$ (siemens)

$$[\rho] = \Omega \cdot m ; \quad [\sigma] = \Omega^{-1} m^{-1} = S/m$$

Merk at σ og ρ er materialeegenskaper (og temperatur-
avhengige). R og G er også avhengige av
lederens utforming (lengde L og tverrsnitt A).

Symbol for en motstand i elektriske kretser:



(eventuelt )

Resistivitet og temperatur

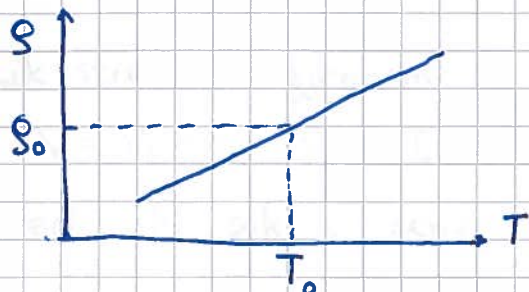
[YF 25.2]

(43)

$$\rho = m_e / n e^2 \tau \sim 1 / n \tau$$

Metall: Stor n , avhenger lite av T .

Økt $T \Rightarrow$ Hyppigere kollisjoner $\Rightarrow$ Kortere $\tau \Rightarrow$ Større ρ



$$\rho(T) = \rho_0 \{ 1 + \alpha (T - T_0) \}$$

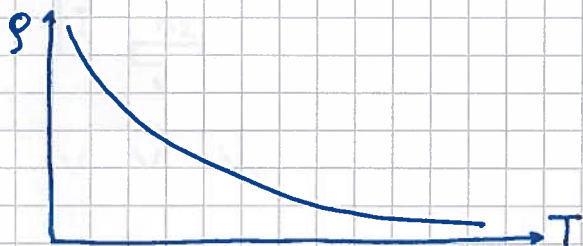
$$\alpha_{Al} \approx \alpha_{Ag} \approx \alpha_{Au} \approx 0.004 \text{ K}^{-1}$$

$$[T] = \text{K (kelvin)}$$

Halvleder: Si, Ge, GaAs, GaN, ...

Isolator ($n \approx 0$) ved $T = 0$. Økt $T \Rightarrow$ Sterk økning i n

$\Rightarrow \rho$ avtar med økende T

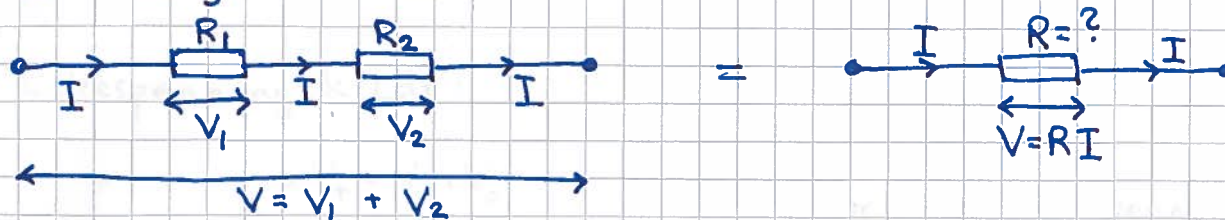


Mer om halvledere til høsten.

Superleder: $\rho = 0$ når $T < T_c =$ kritisk temperatur

Metall når $T > T_c$

Seniekobling:



Lik strøm I gjennom R_1 og R_2

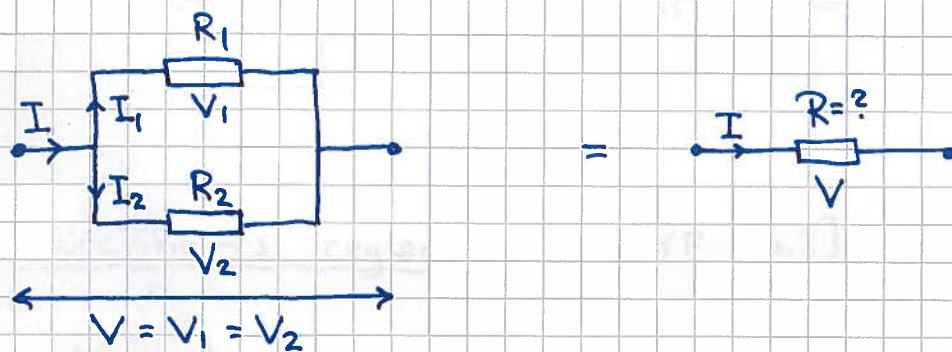
$$\Rightarrow V = V_1 + V_2 = R_1 I + R_2 I = R I$$

$$\Rightarrow \boxed{R = R_1 + R_2}$$

Med N stk i serie:

$$\boxed{R = \sum_{i=1}^N R_i}$$

Parallellkobling:



Lik spenning over R_1 og R_2

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = V/R_1 + V/R_2 = V/R$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Med N stk i parallell:

$$\boxed{R^{-1} = \sum_{i=1}^N R_i^{-1}}$$

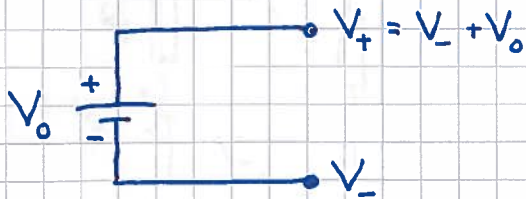
Likestrømkretser

[YF 26, 25]

45

(DC = direct current = likestrøm)

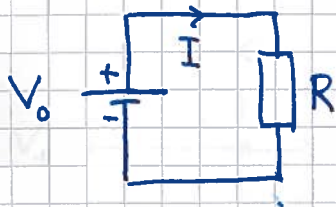
Likespenningskilde:



Sørger for konstant spenning
(potensialforskjell) V_0
mellom polene.

Eks: Kjemisk batteri. Solcelle. ...

Kobles til f.eks. en motstand R og gir lukket krets og strøm:



$$\text{Ohms lov} \Rightarrow V_0 = RI \Rightarrow I = \frac{V_0}{R}$$

Kirchhoffs regler

[YF 26.2]

Ladningsbevarelse $\Rightarrow$

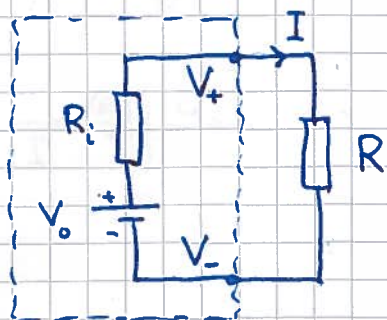
$$\boxed{\sum_j I_j = 0 \quad \text{i alle knutepunkt i en elektrisk krets}} \quad (K1)$$

Energibevarelse $\Rightarrow$

$$\boxed{\sum \text{potensialendringer} = 0 \quad \text{rundt alle sløyfer i en elektrisk krets}} \quad (K2)$$

Reelle spenningskilder har en indre motstand R_i
(som typisk blir større når batteriet går mot slutten) :

46



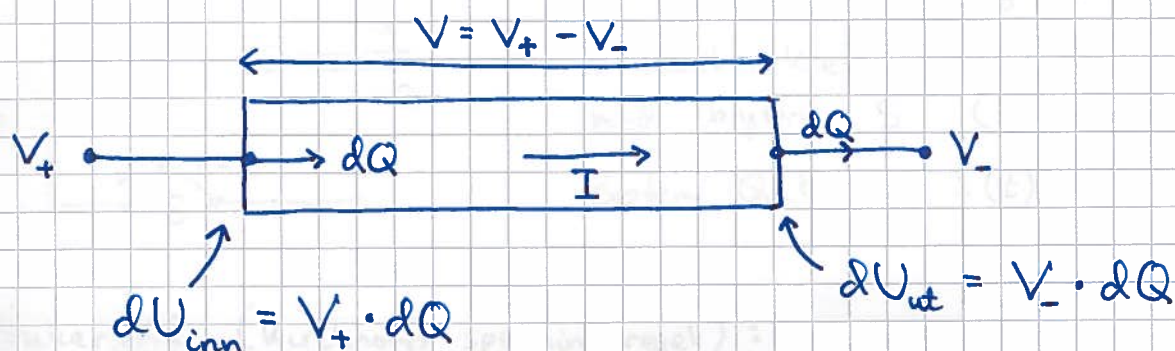
$$K2: V_0 - R_i I - RI = 0$$

$$\Rightarrow I = \frac{V_0}{R_i + R}$$

Spenningen over R ("ytre krets") er :

$$V_+ - V_- = V_0 - R_i I < V_0 \quad (\text{når } I > 0)$$

Elektrisk effekt [YF 25.5]

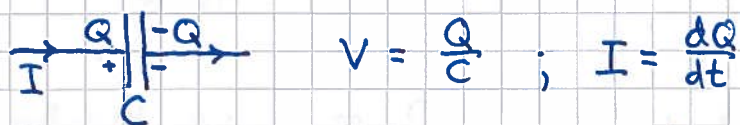
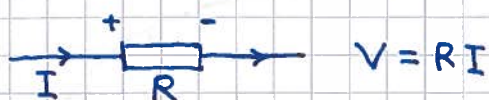


Elektrisk energi omdannes til varmeenergi pga kollisjoner i lederbiten. Effekttap i lederbiten:

$$\begin{aligned} P &= \frac{dU}{dt} = \frac{dU_{inn}}{dt} - \frac{dU_{ut}}{dt} = V_+ \frac{dQ}{dt} - V_- \frac{dQ}{dt} \\ &= V \cdot \frac{dQ}{dt} = \underline{\underline{V \cdot I}} \end{aligned}$$

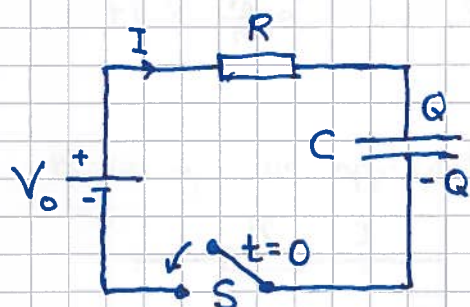
Hvis lederen er en ohmsk motstand :

$$V = RI \quad \Rightarrow \quad P = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$



Velger positiv retning for I inn på platen
med ladning dQ ; da er $I = + dQ/dt$

Opplading av kondensator i RC-krets:



- Før $t=0$ er $Q=0$ og $I=0$
- Vi lukker kretsen ved $t=0$ med bryteren S ("switch")
- Bestem $Q(t)$ og $I(t)$

Braker K2 (Kirchhoffs spenningsregel):

$$V_0 - RI - Q/C = 0$$

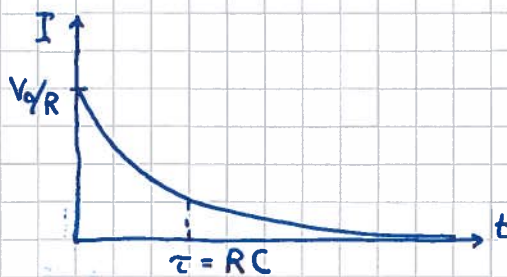
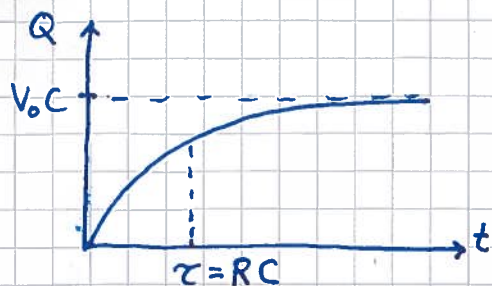
$$\Rightarrow V_0 C - RC \frac{dQ}{dt} - Q = 0$$

$$\Rightarrow -RC \frac{dQ}{dt} = Q - V_0 C$$

$$\Rightarrow \int_0^Q \frac{dQ}{Q - V_0 C} = - \int_0^t \frac{dt}{RC} \Rightarrow \ln \left\{ \frac{Q - V_0 C}{-V_0 C} \right\} = - \frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow \underline{Q(t) = V_0 C \{ 1 - e^{-t/RC} \}}$$

$$\Rightarrow \underline{I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}}$$



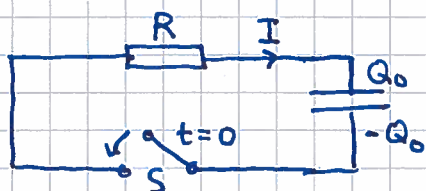
Produktet av R og C er kretsens tidskonstant : $\tau = RC$

Dette angir en typisk tid som det tar for opplading (og utlading) av kondensatoren i en RC -krets.

$$Q(\tau) = V_0 C (1 - 1/e) \approx 0.63 V_0 C ; \quad Q(3\tau) = V_0 C (1 - e^{-3}) \approx 0.95 V_0 C$$

$$I(\tau) = \frac{V_0}{R} e^{-1} \approx 0.37 V_0/R ; \quad I(3\tau) = \frac{V_0}{R} e^{-3} \approx 0.05 V_0/R$$

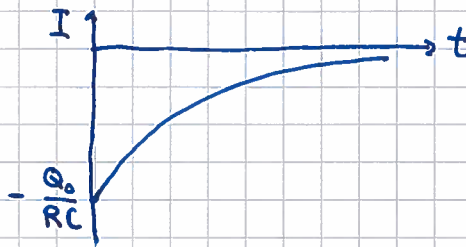
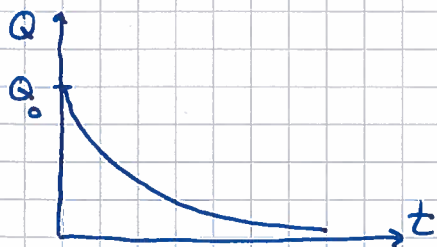
Utlading av oppladet kondensator :



- $Q(0) = Q_0$, $I(0) = 0$
- Krets lukkes ved $t=0$
- Finn $Q(t)$ og $I(t)$

$$K2 : -\frac{Q}{C} - R \frac{dQ}{dt} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \int_{Q_0}^Q \frac{dQ}{Q} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} ; \quad I(t) = - \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$$



Anvendelser : Blinklys, Pacemaker, Blitz, Likerettere ($AC \rightarrow DC$),