

FY6017 Elektromagnetisme Eksamen 4. juni 2020 – 6 sider

FORMLER: Fete symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas forøvrig å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene.

MEKANIKK (Formler fra FY6013 Mekanikk.)

- Newtons andre lov: $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}}$
- Konstant akselerasjon: $v = v_0 + at$ $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$
- Konstant vinkelakselerasjon: $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
- Arbeid: $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$ Effekt: $P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$
- Konservativ kraft og potensiell energi: $U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$
- Friksjon, statisk: $f \leq \mu_s N$ kinetisk: $f = \mu_k N$
- Luftmotstand (liten v): $\mathbf{f} = -k\mathbf{v}$ Luftmotstand (stor v): $\mathbf{f} = -Dv^2\hat{v}$
- Tyngdepunkt: $\mathbf{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i \mathbf{r}_i m_i \rightarrow \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \cdot dm$
- Sirkelbevegelse: $v = r\omega$ Sentripetalakselerasjon: $a = v^2/r$ Baneakselerasjon: $a = dv/dt = r d\omega/dt$
- Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ Statisk likevekt: $\sum \mathbf{F}_i = 0$ $\sum \boldsymbol{\tau}_i = 0$
- Dreieimpuls: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ N2 rotasjon: $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$
- Stivt legeme, refleksjonssymmetri mhp rotasjonsaksen: $\mathbf{L} = \mathbf{L}_b + \mathbf{L}_s = \mathbf{R}_{CM} \times M\mathbf{V} + I_0\boldsymbol{\omega}$
- Kinetisk energi, stivt legeme: $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$
- Treghetsmoment: $I = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow \int r^2 dm$
Kompakt sylinder (skive): $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$ Kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5}MR^2$ Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3}MR^2$
Tynn stang: $I_0 = \frac{1}{12}ML^2$
- Stivt legeme, rotasjon om fast akse: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$
- N2 rotasjon, akse med fast orientering: $\tau = I \frac{d\omega}{dt}$

- Steiners sats (parallellakseteoremet): $I = I_0 + Md^2$
- Gravitasjon: $\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$ $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ $\mathbf{g} = \mathbf{F}/m$
- Enkel harmonisk oscillator: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $T = 2\pi/\omega_0$ $f = 1/T = \omega_0/2\pi$
 Masse i fjær: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ Matematisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{g/L}$
 Fysisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{mgd/I}$ Torsjonspendel: $\omega_0 = \sqrt{\kappa/I_0}$
- Fri, dempet svingning, langsom bevegelse i fluid: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$
 $\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\omega_0^2 = k/m$ $\gamma = b/2m$
 Underkritisk demping ($\gamma < \omega_0$) $x(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)$ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
 Overkritisk demping ($\gamma > \omega_0$) $x(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t}$ $\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$
 Kritisk demping ($\gamma = \omega_0$) $x(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}$
- Tvungen svingning, harmonisk ytre kraft: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$
 (partikulær-)løsning: $x(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$
 amplitude: $A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$
 halvverdibredde: $\Delta\omega \simeq 2\gamma$ Q-faktor: $Q = \omega_0/\Delta\omega$

ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Elektrostatikk

- Coulombs lov:

$$\mathbf{F} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$
- Elektrisk felt og potensial:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_0 \quad \mathbf{E} = -\nabla V \quad \Delta V = \Delta U/q_0 \quad \Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$
- Elektrisk potensial fra punktladning:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$
- Elektrisk dipolmoment; for punktladninger $\pm q$ i innbyrdes avstand $\mathbf{d}$: $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$
- Elektrisk dipol i ytre elektrisk felt: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_0$, $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0$
- Lineær respons:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0/\epsilon_r \quad \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

- Kapasitans:

$$C = q/V$$

Seriekobling, parallellkobling:

$$C = (\sum_j C_j^{-1})^{-1} \quad C = \sum_j C_j$$

- Parallellplatekondensator (ideell; feltstyrke $\sigma/2\epsilon$ fra ett stort og jevnt ladet plan):

$$E = \sigma/\epsilon \quad , \quad C = \epsilon A/d$$

- Energitetthet i elektrisk felt:

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

Elektrisk strøm

- Strømstyrke, strømtetthet:

$$I = dQ/dt \quad , \quad j = I/A$$

- Ohms lov:

$$j = \sigma \mathbf{E} \quad , \quad V = RI$$

- Drudemodellen:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e}$$

- Resistans R og konduktans G :

$$R = G^{-1} = l/\sigma A = \rho l/A, \quad \sigma = \text{konduktivitet}, \quad \rho = \text{resistivitet}$$

$$R(T) = R_0 (1 + \alpha(T - T_0))$$

Seriekobling, parallellkobling:

$$R = \sum_j R_j \quad , \quad R = (\sum_j R_j^{-1})^{-1}$$

- Elektrisk effekt:

$$P = VI$$

- Midlere effekt med vekselspanning:

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} = \frac{1}{2} V_0 I_0$$

Magnetostatikk

- Magnetisk fluks:

$$\phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

- Magnetfelt fra strømførende leder (Biot–Savarts lov):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

- Lang rett leder:

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

- På aksen til sirkulær strømsløyfe:

$$B(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

- Magnetisk dipolmoment; for plan strømsløyfe: $\mathbf{m} = I\mathbf{A} = IA\hat{n}$

- Magnetisk dipol i ytre magnetfelt: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_0$, $U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_0$

- Lineær respons:

$$\mathbf{B} = \mu_r \mathbf{B}_0 \quad \mu = \mu_r \mu_0$$

- Lorentzkraften:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- Magnetisk kraft på strømførende leder; generelt:

$$\mathbf{F} = \int_L d\mathbf{F} = I \int_L d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$$

- Magnetisk kraft på rett strømførende leder:

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

- Energitetthet i magnetfelt:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Elektrodynamikk og elektromagnetisk induksjon

- Faradays induksjonslov:

$$\Delta V = -\frac{d\phi}{dt}$$

- Selvinduktans:

$$L = \frac{\phi}{I}$$

- Gjensidig induktans:

$$M = \frac{\phi_2}{I_1} = \frac{\phi_1}{I_2}$$

- Transformator:

$$V_2/V_1 = N_2/N_1$$

- Spole (ideell):

$$B = \mu(N/l)I \quad , \quad L = \mu N^2 A/l$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Kretser

- Spenning over motstand, kapasitans, induktans:

$$RI \quad Q/C \quad L dI/dt$$

- Tidskonstanter, RC -krets og RL -krets:

$$\tau = RC \quad \tau = L/R$$

- Opplading av kondensator i RC -krets:

$$Q(t) = Q_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

- Oppbygging av strøm i RL -krets:

$$I(t) = I_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

KONSTANTER, OMREGNINGSFAKTORER OG DEKADISKE PREFIKSER

- Fundamentale konstanter:

$$\begin{aligned} G &= 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \quad (g = 9.81 \text{ m/s}^2) \\ m_e &= 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\ m_p = m_n &= 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ u &= 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ e &= 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ \epsilon_0 &= 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &= 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \\ k_B &= 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \\ N_A &= 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \\ h &= 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \\ c &= 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

- Omregningsfaktorer:

$$\begin{aligned} 1 \text{ eV} &= 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\ 1 \text{ \AA} &= 10^{-10} \text{ m} \end{aligned}$$

- Dekadiske prefikser: p = piko = 10^{-12} , n = nano = 10^{-9} , μ = mikro = 10^{-6} , m = milli = 10^{-3} , c = centi = 10^{-2} , k = kilo = 10^3 , M = mega = 10^6 , G = giga = 10^9 , T = tera = 10^{12}
- Geometri:
Areal, sirkulær skive: πr^2 . Kuleflateareal: $4\pi r^2$. Kulevolum: $4\pi r^3/3$.

MATEMATIKK

- Krumningsradius:

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$$

•

$$\frac{d}{dx} e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$$

•

$$\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$$

•

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

MIDDELVERDI OG FEIL I MÅLINGER

- Gauss' feilforplantningslov: $(\Delta q)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q}{\partial a_i} \Delta a_i \right)^2$
- Hvis størrelsen q er et produkt av potenser av a_i ($q = a_1^{N_1} \cdot a_2^{N_2} \cdot \dots$):

$$\frac{\Delta q}{q} = \sqrt{\left(\frac{N_1 \Delta a_1}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{N_2 \Delta a_2}{a_2} \right)^2 + \dots}$$

- Middelverdi (gjennomsnittsverdi): $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$
- Standardavvik (feil i enkeltmåling): $\delta_x = \sqrt{\left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right)}$
- Standardfeil (feil i middelverdi): $\delta_{\bar{x}} = \delta_x / \sqrt{N}$