

FY6017 Elektromagnetisme. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til Test 1.

Oppgave 1

Vi har et elektron pr 2 kjernepartikler, dvs en kroppsmasse $2u$ pr elektron. Med total kroppsmasse f.eks 70 kg blir antall elektroner ca

$$N_e \sim \frac{70}{2 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}} \sim 2 \cdot 10^{28},$$

som tilsvarer en elektrisk ladning

$$|Q_e| \sim 2 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \sim 3 \cdot 10^9 \text{ C} = 3 \text{ GC}.$$

Riktig svar: E.

Oppgave 2

Dette kan betraktes som to dipoler med dipolmoment $p_1 = qa$, med en vinkel på 60 grader i mellom. Vi må gange med $2 \cos 30^\circ = \sqrt{3}$ for å finne summen av komponentene som ikke kansellerer hverandre, slik at $p = \sqrt{3}qa$. Riktig svar: A.

Oppgave 3

$V = 0$ i sentrum av trekanten, siden vi skal legge sammen coulombpotensialet $Q/4\pi\epsilon_0 r$ fra de tre punktladningene, med lik avstand r , og med $Q = -q$ to ganger og $Q = 2q$ en gang. Riktig svar: C.

Oppgave 4

Totalt elektrisk felt i sentrum må av symmetrigrunner ha retning fra sentrum mot midten av forbindelseslinjen mellom de to negative punktladningene $-q$. Avstanden fra sentrum til hver av de tre punktladningene er

$$r = \frac{a/2}{\cos 30^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Bidraget fra $2q$ blir ganske enkelt

$$E_{2q} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0(a^2/3)} = \frac{6q}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Komponenten av bidraget fra de to ladningene $-q$ finner vi ved å gange med $\sin 30^\circ = 1/2$:

$$E_{-q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(a^2/3)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3q/2}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Totalt felt i sentrum blir dermed

$$E = E_{2q} + 2E_{-q} = \frac{9q}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Riktig svar: E.

Oppgave 5

Her er det "god avstand" mellom svaralternativene, så kanskje et raskt estimat kan gi oss riktig svar? Med ladning pr lengdeenhet $\pm\lambda_0$ fordelt på en stav med lengde L må dipolmomentet bli $\lambda_0 L^2$, ganget med en tallfaktor som er av størrelsesorden 1. Med $\lambda_0 = 10^{-9}$ C/m og $L = 10^{-6}$ m er $\lambda_0 L^2 = 10^{-21}$ Cm, slik at B må være riktig svar.

Med "skikkelig" utregning:

En liten bit dx av staven i posisjon $x > 0$, med ladning $dq = \lambda_0 dx$, har sammen med en liten bit dx i posisjon $x - L/2$, med ladning $-dq = -\lambda_0 dx$, et lite dipolmoment $dp = \lambda_0 dx L/2$. Totalt dipolmoment blir da

$$p = \int dp = \frac{\lambda_0 L}{2} \int_0^{L/2} dx = \frac{1}{4} \lambda_0 L^2,$$

dvs $p = 0.25 \cdot 10^{-21}$ Cm. Riktig svar: B.

Oppgave 6

En liten bit dx av tråden i posisjon $x > 0$, med ladning $dq = \lambda(x)dx$, har sammen med en liten bit dx i posisjon $-x$, med ladning $-dq = -\lambda(x)dx$, et lite dipolmoment $dp = \lambda(x)dx2x$. Totalt dipolmoment blir da

$$\begin{aligned} p &= \int dp \\ &= \frac{2\lambda_0}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha x} dx \\ &= \frac{2\lambda_0}{\alpha} \Big|_0^\infty \left(-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \right) \\ &= \frac{2\lambda_0}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Her hadde vi heller ikke trengt å regne: α må ha enhet 1/m, og λ_0 må ha enhet C/m. Dermed er det bare alternativ D som har riktig enhet Cm for elektrisk dipolmoment. Riktig svar: D.

Oppgave 7

Her er $V_1 = V_2 = 0$ siden bidragene til totalt potensial kansellerer fra de to ladningene $\pm Q$ til venstre og fra de to til høyre. I posisjon 3 er vi betydelig nærmere den ene positive ladningen Q enn de tre andre, og siden vi generelt har høyt potensial i nærheten av positiv ladning, er $V_3 > V_1$. Tilsvarende argumentasjon i posisjon 4, men med motsatt fortegn, gir $V_4 < V_1$. Riktig svar: A.

Oppgave 8

Av symmetri grunner er $p = 0$: Dette er summen av to like store dipoler, en i positiv og en i negativ z -retning. Riktig svar: A.

Oppgave 9

Totalt elektrisk felt på positiv x -akse må peke i positiv x -retning. Den positive ladningen $2Q$ i origo gir et bidrag E_{2Q} i positiv x -retning. Hver av de to negative ladningene $-Q$ på z -aksen gir et bidrag E_{-Q} i negativ x -retning (z -komponentene kansellerer hverandre), men $2E_{-Q}$ er mindre enn E_{2Q} . Riktig svar: D.

Oppgave 10

I avstand 2 m fra disse ladningene ser systemet praktisk talt ut som en punktladning $-5q$. Den elektriske feltstyrken er derfor

$$E = \frac{5q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10^{-9} / 4 = 22.5 \text{ N/C}.$$

Riktig svar: B.

Oppgave 11

Systemet er konservativt. Da kan vi bruke prinsippet om energibevarelse: Protonet til høyre har en potensiell energi U i utgangspunktet, men null kinetisk energi. Langt ute på x -aksen har protonet null potensiell energi, og dermed en kinetisk energi K lik opprinnelig potensiell energi U . Vi har

$$U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2a} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 3a} = \frac{e^2}{24\pi\epsilon_0 a},$$

som med $K = m_p v^2 / 2$ gir

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{12\pi\epsilon_0 m_p a}}.$$

Riktig svar: C.

Oppgave 12

Samme argumentasjon som i oppgave 16: I avstand 0.30 m er dette praktisk talt en punktladning $2 \mu\text{C}$. Feltstyrken i avstand 0.30 m er da

$$E = 9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6} / (0.3^2) = 2 \cdot 10^5 \text{ N/C},$$

dvs 200 kN/C. Riktig svar: C.

Oppgave 13

En liten buelengde $ds = R d\theta$ av ringen, ved vinkel θ , og med ladning $dq = \lambda(\theta) ds = \lambda_0 \cos \theta R d\theta$, har sammen med en tilsvarende negativ ladning $-dq$ ved vinkel $\pi - \theta$ et lite dipolmoment $dp = dq \cdot 2R \cos \theta$, siden avstanden fra $-dq$ til dq er $2R \cos \theta$. Så må vi integrere over vinkelen θ fra $-\pi/2$ til $\pi/2$ for å få med hele ringen:

$$\begin{aligned} p &= \int dp \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \lambda_0 \cos \theta R d\theta \cdot 2R \cos \theta \\ &= 2\lambda_0 R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

Ettersom $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, er $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$. Videre er $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ slik at $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$. Dermed er $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$, dvs $\cos^2 \theta = (1/2)(1 + \cos 2\theta)$. Dermed:

$$\begin{aligned} p &= 2\lambda_0 R^2 \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \\ &= 2\lambda_0 R^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \pi \lambda_0 R^2 \end{aligned}$$

Riktig svar: D.

Oppgave 14

En negativ ladning plassert i et elektrisk felt vil påvirkes av en elektrisk kraft slik at bevegelsen blir i retning høyere potensial, og i motsatt retning av feltet \mathbf{E} , men i retning lavere potensiell energi. Riktig svar: B.