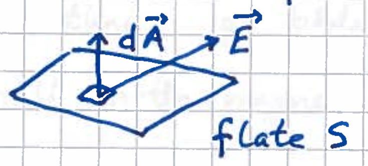
MAXWELLS LIGNINGER

Gauss' lov

Helt analogt til magnetisk fluks (s. 73) defineres elektrisk fluks:

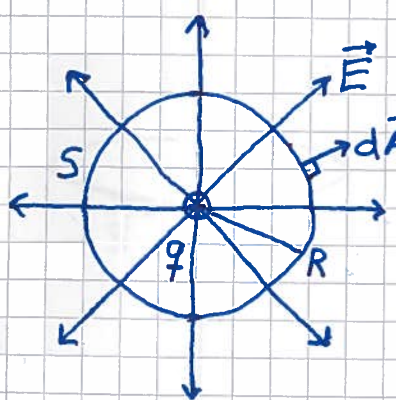
$$\phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$



SI-enhet: $[\phi_E] = \frac{V}{m} \cdot m^2 = V \cdot m$

Og på samme måte som magnetisk fluks ϕ_B gjennom en flate er proporsjonal med antall magn. feltlinjer gjennom flaten, så er elektrisk fluks ϕ_E gjennom en flate prop. med antall elektriske feltlinjer gjennom flaten.

Vi illustrerer Gauss' lov med et enkelt eksempel:
La S være en kuleflate med radius R, med en punktladning q i sentrum.



$d\vec{A} \parallel \vec{E}$ på hele kuleflaten S ; og $E = |\vec{E}|$ er konstant på hele kuleflaten

$$\vec{E} = \frac{q\,\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad d\vec{A} = dA \cdot \hat{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\, dA$$

$$\Rightarrow \Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \underbrace{\oint dA}_{= 4\pi R^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Dvs: $\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \{\text{netto ladning innenfor den lukkede flaten}\}}$

som gjelder generelt, og som er Gauss' lov.

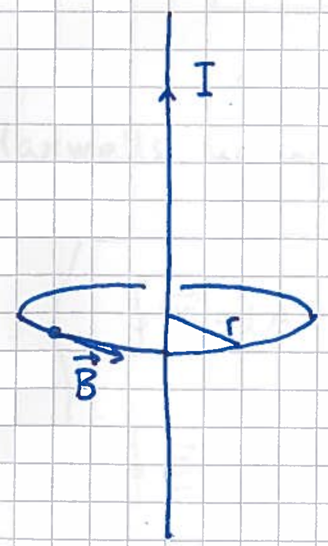
Gauss' lov for $\vec{B}$

Allerede på s. 55 observerte vi at magnetiske feltlinjer danner lukkede kurver. Da innser vi at uansett hva slags lukket flate S vi lager, så må alle magnetiske feltlinjer gå både inn gjennom S og ut av S. Dermed passerer null netto magnetisk fluks gjennom en lukket flate:

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0}$$ som er Gauss' lov for $\vec{B}$

Amperes lov

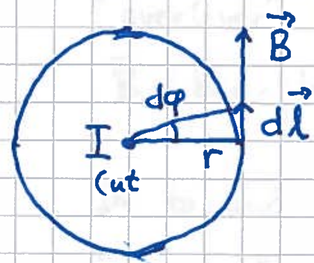
Illustreres med eksemplet på s. 55, $\vec{B}$ omkring en lang, rett strømførende leder:



Vi fant at $\vec{B}$ er tangent til sirkler med sentrum på lederen, og at

$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ i avstand r fra lederen

Sett "ovenfra":



"Bit" av sirkelen: $d\vec{l} = r \cdot d\varphi \cdot \hat{\varphi}$, der $\hat{\varphi}$ er enhetsvektor tangentielt til sirkelen

Magnetfelt: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\varphi}$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \underbrace{\oint d\varphi}_{=2\pi} = \mu_0 I$$

Dvs:

$$\boxed{\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot \{\text{netto strøm som omsluttes av den lukkede kurven som vi integrerer rundt}\}}$$

Som gjelder generelt, og som er Amperes lov

Konservativt elektrostatisk felt

På s. 21: $\Delta V = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}$ = potensialforskjellen mellom to posisjoner i og f

Hvis i og f er samme sted, blir integralet rundt en lukket kurve, og da er selvsagt $V_i = V_f$, dvs $\Delta V = 0$:

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0}$$

som uttrykker at elektrostatisk kraft og felt er konservative

Maxwells ligninger for statiske felt er nå etablert:

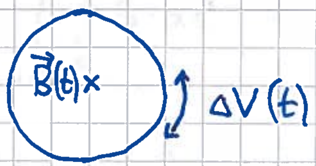
$$\boxed{\begin{aligned} \oint \vec{E}\cdot dA &= \frac{q}{\varepsilon_0} \\ \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} &= 0 \\ \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} &= 0 \\ \oint \vec{B}\cdot d\vec{s} &= \mu_0 I \end{aligned}}$$

Gauss' lov for $\vec{E}$ og $\vec{B}$ "overlever" selv om $\vec{E}$ og $\vec{B}$ blir tidsavhengige.

De to andre må da "justeres".

Indusert elektrisk felt

La oss se på en sirkulær leder plassert i et tidsavhengig magnetfelt $\vec{B}(t)$:



Da vet vi at det induseres en spenning i lederslløyfa:

$$\Delta V(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A}$$

Her er $\Phi_B(t)$ den magn. fluks som omsluttes av lederslløyfa, og "retningen" på $\Delta V(t)$ er hele tiden i henhold til Lenz' lov.

Den induserte spenningen $\Delta V(t)$ vil representere en "drivende kraft" på ladninger i lederslløyfa. Følgelig må det eksistere et elektrisk felt $\vec{E}(t)$ i lederslløyfa, slik at

$$\Delta V(t) = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

Dermed har vi etablert <u>Faraday - Henrys lov</u>:

$$\boxed{\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{A}}$$

Her er c den lukkede kurven som omslutter flaten S.

Hvis $\vec{B}$ er statisk (og kurven c er fast), blir høgre side null, og vi er tilbake til

$$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$$

som alltid gjelder for et statisk felt $\vec{E}$.

Vi innser at et "Faraday-indusert" tidsavhengig felt $\vec{E}(t)$ <u>ikke</u> kan være konservativt, siden $\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{s} \neq 0$.

Ampere – Maxwells lov

Amperes lov erstattes av Ampere – Maxwells lov dersom feltene er tidsavhengige:

$$\boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{A}}$$

Vi ser fra dette at et tidsavhengig elektrisk felt $\vec{E}(t)$ induserer et tidsavhengig magnetfelt $\vec{B}(t)$! (Også når $I=0$ på høyre side.)

Maxwells ligninger

Vi kan nå sammenfatte:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q/\varepsilon_0$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A}$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

Maxwells ligninger (på såkalt integralform)

Med to matematiske teoremer (divergensteoremet og Stokes' teorem) kan disse integralligningene skrives om til differensialligninger:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Maxwells ligninger på differensialform.

ρ = ladning pr volumenhet

$\vec{J}$ = strøm pr flateenhet

Elektromagnetiske bølger

I "tomt rom" (vakuum) er $\rho = 0$ og $\vec{j} = 0$. Maxwells ligninger er da:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \ , \quad \nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \ , \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \, \partial \vec{E}/\partial t$$

Dette er 4 koblede 1. ordens diff. ligninger for $\vec{E}$ og $\vec{B}$. De kan omformes til 2 stk "dekoblede" 2. ordens diff. ligninger:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \ ; \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$$

Dette er 3-dimensjonale bølgeligninger for $\vec{E}$ og $\vec{B}$, på samme form som f. eks. transversale utsving på en streng eller ei snor.

Dvs: Maxwells ligninger gir mulighet for løsninger $\vec{E}(\vec{r},t)$ og $\vec{B}(\vec{r},t)$ som tilsvarer at $\vec{E}$ og $\vec{B}$ forplanter seg som bølger, med bølgehastighet

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \simeq 3 \cdot 10^8 \ \mathrm{m/s} \ ,$$

som vi kjenner igjen som c, lyshastigheten i vakuum.