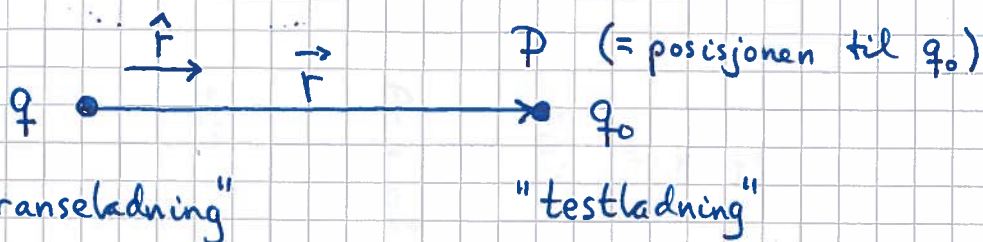


Elektrisk felt

[YF 21.3 - 21.5]

⑦



Kraft på q_0 fra q : $\vec{F} = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$

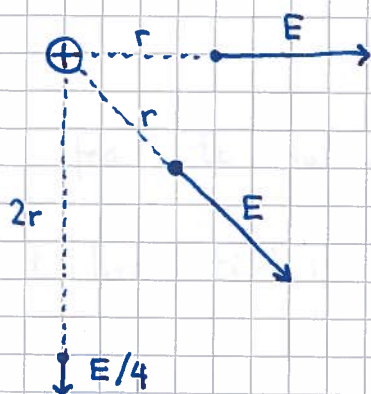
Elektrisk felt $\stackrel{\text{def}}{=}$ El. kraft pr ladningsenhet

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{F} / q_0 ; [E] = \text{N/C}$$

Ladningen q omgir seg med elektrisk felt

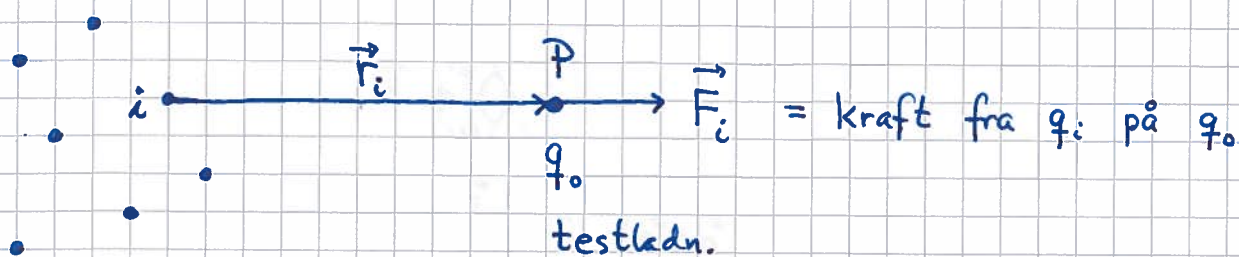
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Retning : Radielt bort fra positiv ladning
— " — inn mot negativ — " —



Kraft og felt fra flere ladninger:

⑧



ref. ladn.

$\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$

Superposisjonsprinsippet ("SPP"): Krefter adderes vektorielt.

$\Rightarrow$ Total kraft på q_0 fra $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$:

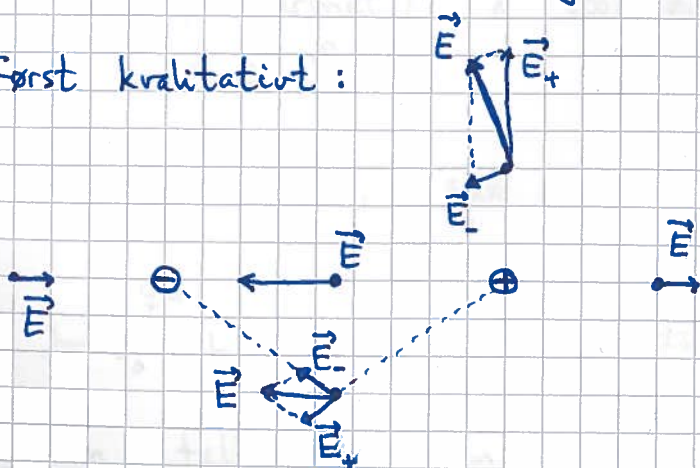
$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_i \frac{q_i q_0}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{r}_i$$

$\Rightarrow$ El. felt i pos. P fra $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{r}_i$$

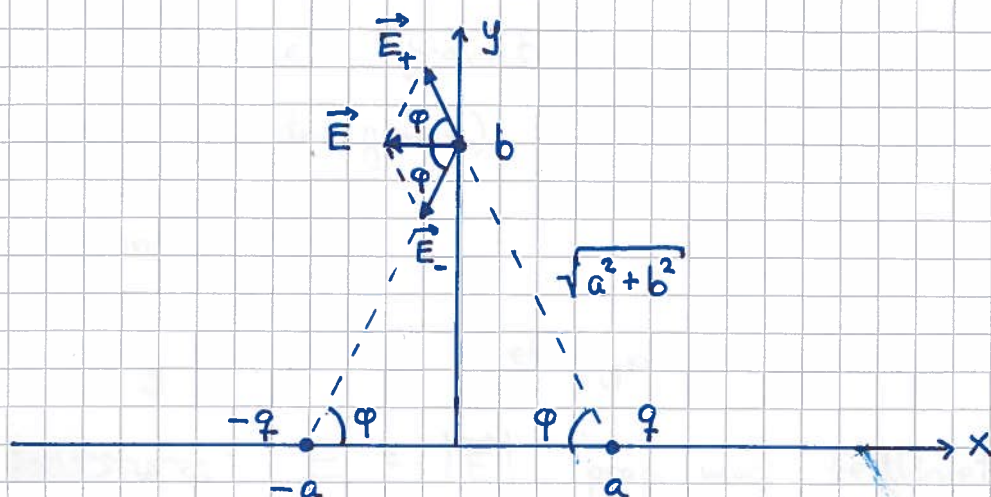
Eks: $\vec{E}$ fra to punktladninger $\pm q$

Først kvalitativt:



Eks: $\pm q$ i $x = \pm a$; finn $\vec{E}$ i $y = b$, på y-aksen

(9)



$$\bullet E_+ = E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(a^2+b^2)}$$

$$\bullet \text{ Pga symmetri er } E_y = 0; \quad \vec{E} = -\hat{x} \cdot E; \quad E = |\vec{E}|$$

$$\bullet E = E_+^x + E_-^x$$

$$\bullet E_+^x = E_-^x = E_+ \cdot \cos\varphi; \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{E} = -\hat{x} \cdot \frac{2qa}{4\pi\epsilon_0(a^2+b^2)^{3/2}}}$$

Dette er en elektrisk dipol (mer om det snart).

Hva blir E (tilnærmet) i stor avstand fra dipolen, dvs når $b \gg a$?

Da er $a^2 + b^2 \approx b^2$, slik at

$$E \approx \frac{qa}{2\pi\epsilon_0 \cdot b^3}; \quad \text{dvs feltstyrken "avtar som" } 1/b^3,$$

raskere enn feltet fra en enkelt punktladning ($1/r^2$).

Feltlinjer for $\vec{E}$

[YF 21.6]

(10)

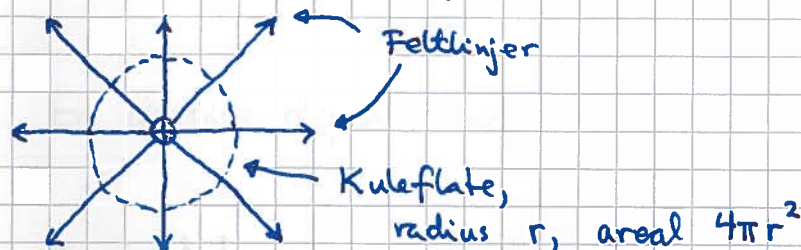
Gir en visuell framstilling av $\vec{E}$ i hele området omkring ladningen(e).

"Reglene" er:

Retning: $\vec{E} \parallel$ feltlinjene

Feltstyrke: $E = |\vec{E}|$ prop. med feltlinjetettheten, dvs antall feltlinjer som krysser en flate, pr flateenhet

Eks 1: Punktladning



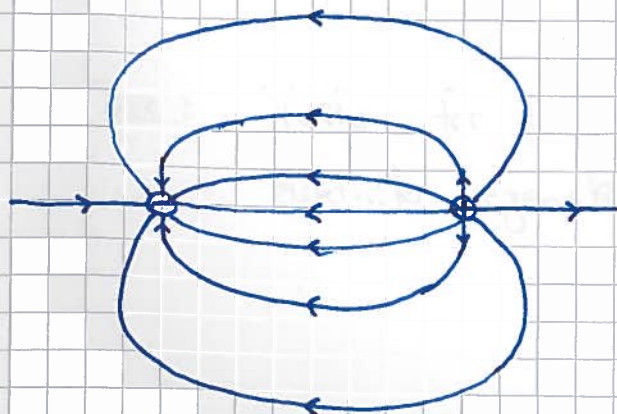
Anta N feltlinjer ut gjennom kuleflaten (inn hvis $q < 0$)

$\Rightarrow$ Feltlinjetetthet på kuleflaten er $N/4\pi r^2$

Samtidig er feltstyrken på kuleflaten $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$

Siden begge "går som" $1/r^2$, er E prop med N/A ; OK!

Eks 2: Elektrisk dipol



Vi noterer oss at feltlinjene starter på pos. og ender på neg. ladning.

(Eller ∞ langt borte)

Elektriske dipoler og dipolmoment

[YF 21.7]

11

Enkel dipol :

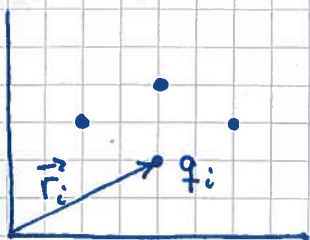


Har dipolmoment

$$\boxed{\vec{p} = q \vec{d}}$$

$$[p] = C \cdot m$$

Hvis flere ladninger q_i i posisjoner $\vec{r}_i$:



$$\boxed{\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i}$$

En elektrisk dipol har alltid null nettoladning : $\sum_i q_i = 0$

Anvendelser :

- Mange molekyler er elektriske dipoler:
 H_2O , CO , NH_3 osv
- Molekyler som i utgangspunktet ikke er dipoler (CO_2 , CH_4 osv) blir dipoler hvis de plasseres i et ytre elektrisk felt.

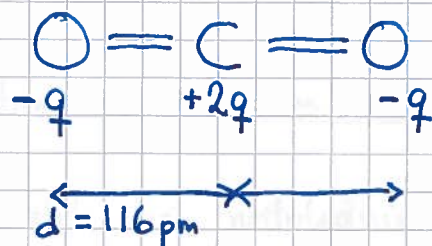
Stoffet polariseres av det ytre feltet.

- Dvs : Viktig for å forstå ulike materials elektriske egenskaper!

Eks 1: Hvorfor er $p=0$ for CO_2 ?

(12)

Løsn: Pga symmetri:



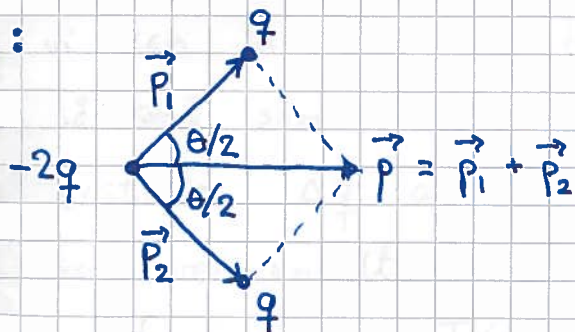
$\Rightarrow$ Kan betraktes som sum av to motsatt rettede dipoler:

$-q \xrightarrow{d} +q \quad +q \xleftarrow{-d} -q$

$$\vec{p} = q\vec{d} - q\vec{d} = \underline{\underline{0}}$$

Eks 2: Anta punktladningsmodell for H_2O , med ladn. $+0.33e$ på hver H og $-0.66e$ på O, bindingslengde $0.96 \text{ \AA}$, bindingsvinkel 104.5° , og bestem molekylets dipolmoment.

Løsn:



$$p_1 = p_2 = q \cdot d$$

med $q = 0.33e$ og

$$d = 0.96 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0.96 \text{ \AA}$$

Fra fig. ser vi at $p = 2 q d \cos \frac{\theta}{2}$

$$= 2 \cdot 0.33e \cdot 0.96 \text{ \AA} \cdot \cos 52.25^\circ$$

$$= \underline{\underline{0.39 e \text{ \AA} \approx 6.2 \cdot 10^{-30} \text{ C m}}}$$

Kontinuerlige ladningsfordelinger

(13)

Dagligdagse (makroskopiske) legemer som er tilført netto ladning, har typisk et overskudd eller underskudd på svært mange elektroner.

⇒ Lite hensiktsmessig å summere krefter og felt fra enkeltladninger.

I stedet betrakter vi nettoladningen som kontinuerlig fordelt, på en eller annen måte. (Mer om hvordan og hvorfor ladning fordeler seg senere.)

Vi antar så at en liten mengde ladning Δq på en liten bit av legemet (lite volum ΔV , lite areal ΔA eller liten lengde Δl) kan betraktes som en punktladning.

Da kan vi bruke Coulombs lov og superpos.prins. på samme måte som før (s. 8).

Og vi kan la Δq (og tilhørende ΔV , ΔA eller Δl) bli så små som vi vil, dvs vi kan la $\Delta q \rightarrow 0$.

Da erstattes Δq av dq (en "infinitesimal" ladning), og sum over enkeltladninger erstattes av integral over ladningsfordelingen. Tilsvarende blir $\Delta V \rightarrow dV$, $\Delta A \rightarrow dA$ og $\Delta l \rightarrow dl$.

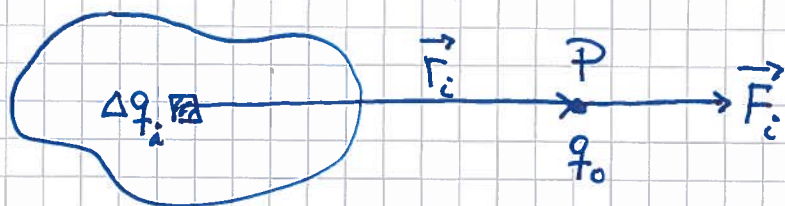
Og vi kan innføre ladnings tetthet, i ulike "dimensjoner":

$$1D: dq = \lambda \cdot dl ; \lambda = \text{ladn. pr lengdeenhet} ; [\lambda] = C/m$$

$$2D: dq = \sigma \cdot dA ; \sigma = \text{ladn. pr flateenhet} ; [\sigma] = C/m^2$$

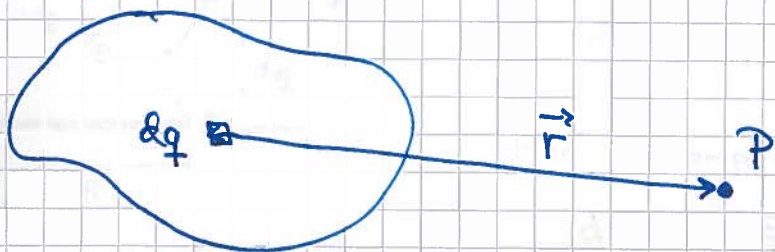
$$3D: dq = \rho \cdot dV ; \rho = \text{ladn. pr volumenhet} ; [\rho] = C/m^3$$

Kraft på q_0 i pos. P fra ladn. fordeling:



$$\vec{F} = \sum_i \frac{\Delta q_i \cdot q_0}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{r}_i \xrightarrow{\Delta q_i \rightarrow 0} \int \frac{q_0 \hat{r} dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

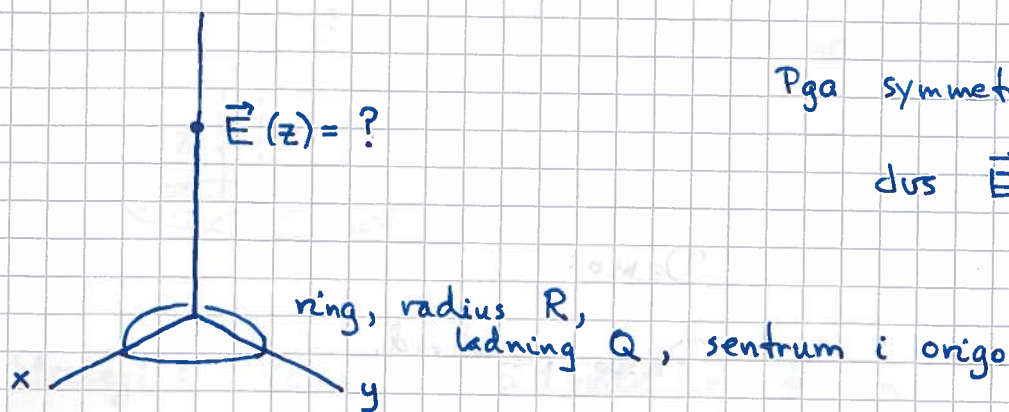
$\Rightarrow$ El. felt fra ladn. fordeling:



$$\vec{E} = \int \frac{\hat{r} dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

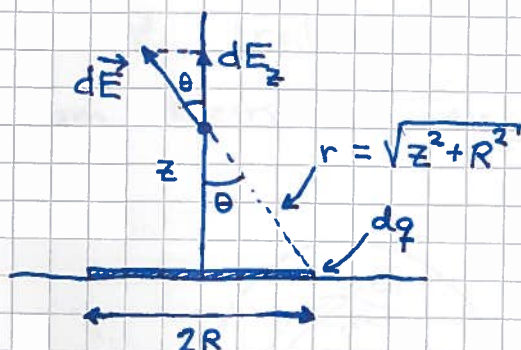
Eks: $\vec{E}$ på akse til jevnt ladet ring

(15)



Pga symmetri: $E_x = E_y = 0$

$$\text{dvs } \vec{E}(z) = E_z(z) \hat{z}$$



Felt fra liten bit av ringen, ladn. dq :

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Med z -komponent

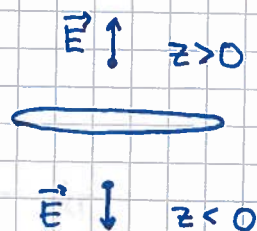
$$dE_z = dE \cdot \cos \theta ; \cos \theta = z/r$$

Alle biter av ringen er i samme avstand $r = \sqrt{z^2 + R^2}$ fra z -aksen:

$$\Rightarrow E_z = \int dE_z = \int \frac{z dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \underbrace{\int dq}_{=Q} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

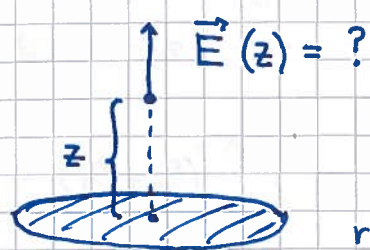
Er svaret fornuftig?

- Enhet: $[E_z] = [Qz/\epsilon_0 z^3] = [Q/\epsilon_0 z^2]$; OK
- $E_z(0) = 0$, som ventet pga symmetri
- Hvis $z \gg R$, er $z^2 + R^2 \approx z^2$ og $E_z \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$, som ventet, fordi nå ser ringen tilnærmet ut som en punktladning Q i origo
- $E_z(z) = -E_z(-z)$, som ventet:



Eks: $\vec{E}$ på aksen til jevnt ladet sirkulær skive

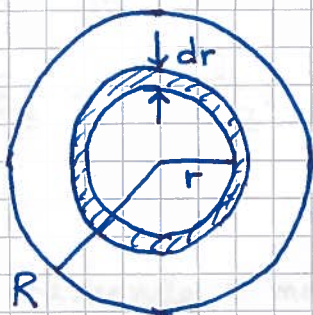
(16)



Pga symmetri er $\vec{E}(z) = E_z(z) \cdot \hat{z}$

radius R , ladning Q , sentrum i origo

Strategi: Vi vet hva feltet er fra en tynn ring (forrige eksempel). Skiva kan betraktes som en sum av mange tettliggende ringer, fra innerst (radius $r \approx 0$) til ytterst (radius $r \approx R$), omtrent som tverrsnittet av en løk:



Bidrag til E_z fra tynn ring med radius r , bredde dr , og dermed ~~areal~~ areal $dA = 2\pi r \cdot dr$:

$$dE_z = \frac{dq \cdot z}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}}$$

Ladningen dq på denne tynne ringen:

$$\frac{dq}{Q} = \frac{dA}{A} \Rightarrow dq = Q \cdot \frac{dA}{A} = Q \cdot \frac{2\pi r dr}{\pi R^2}$$

Total feltstyrke E_z blir summen, dvs integralet, av bidrag fra alle ringene, fra $r=0$ til $r=R$:

$$E_z = \int dE_z = \int_{r=0}^R \frac{(Q \cdot 2\pi r dr / \pi R^2) \cdot z}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}}$$

Integralet som her må løses: $\int_0^R \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr$

Med litt trening/erfaring ser vi at integranden her er den deriverte av $-1/\sqrt{r^2+z^2}$:

$$\frac{d}{dr} \left\{ -(r^2+z^2)^{-1/2} \right\} = -(-\frac{1}{2})(r^2+z^2)^{-3/2} \cdot 2r = \frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

Dermed:

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^R \left(-\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \right) = \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \right) \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left\{ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} \right\} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+R^2/z^2}} \right\} \end{aligned}$$

- Fornuftig for $z \gg R$: Da er $(1+R^2/z^2)^{-1/2} \approx 1 - \frac{R^2}{2z^2}$
og $E_z \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$; rimelig, som punktladning Q i origo

- Litt overraskende, men nyttig resultat for $z \ll R$:

Da er vi nær skiva. Eller vi kan betrakte det som fellet fra ei svært stor skive:

$$E_z \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} = \underline{\underline{\frac{\sigma}{2\epsilon_0}}}$$

der vi innførte

$$\sigma = Q/\pi R^2 = \text{skivas ladning pr flateenhet}$$

Dvs: Fellet fra ei svært stor, uniformt ladet skive er konstant, uavhengig av avstanden z fra skiva!

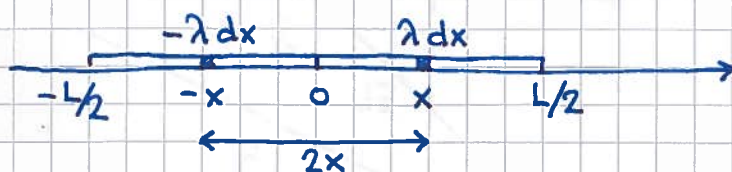
Eks: Dipolmoment for "stardipol"

(18)



$\pm \lambda = \text{ladn. pr lengdeenhet}$

Løsn: Kan betrakte staven som sum av mange enkle dipoler bestående av ladninger $\pm dq = \pm \lambda dx$ i innbyrdes avstand $2x$:



$\Rightarrow$ Stavens totale dipolmoment:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \int d\vec{p} = \int_0^{L/2} \lambda dx \cdot 2x \cdot \hat{x} = 2\lambda \hat{x} \int_0^{L/2} x dx = 2\lambda \hat{x} \cdot \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{L/2} \\ &= 2\lambda \hat{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L^2}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{4} \lambda L^2 \hat{x}}}\end{aligned}$$

Fornuftig?

• Enhet: $[\lambda L^2] = \frac{C}{m} \cdot m^2 = C \cdot m$, OK

• Samme p som for punktladn. $\pm \lambda \cdot \frac{L}{2}$ i innbyrdes avstand $L/2$; ikke urimelig!