

FY6017 Elektromagnetisme. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 1.

Oppgave 1.

a) **C**

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = m\mathbf{a}$$

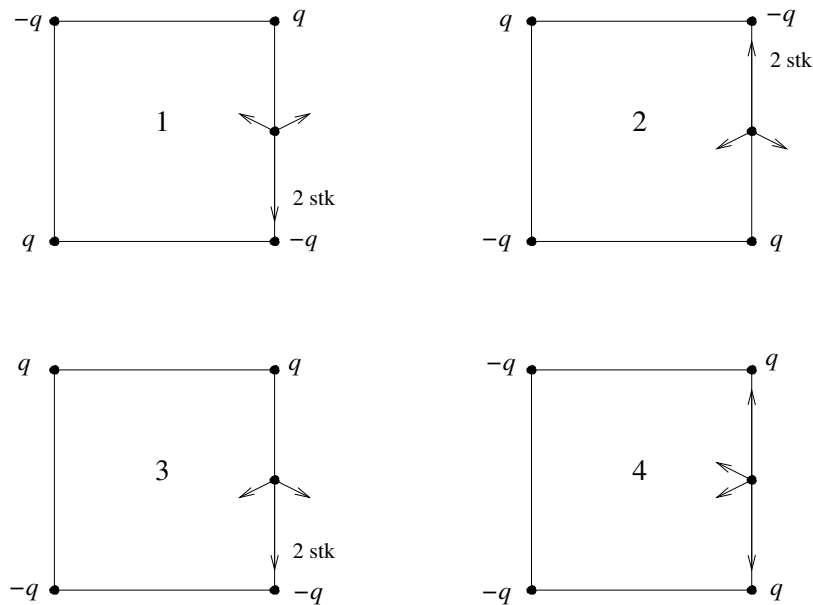
Newtons 2. lov. Her er $q = -e$, så elektronets akselerasjon blir

$$\mathbf{a} = -\frac{e}{m}\mathbf{E}$$

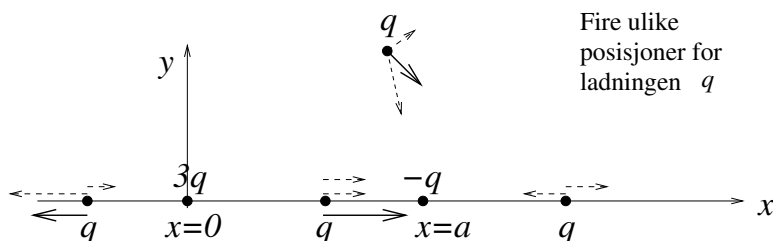
altså mot venstre.

b) **C**

Totalt elektrisk felt i P er vektorsummen av bidragene fra de fire punktladningene. Konfigurasjonen i figur 3 gir den største feltstyrken. (Ingen feltbidrag har her komponent oppover.)



Oppgave 2



a) Punktladningen q er i likevekt dersom kraften på den er lik null. Her virker det to krefter, en frastøtende fra $3q$ og en tiltrekkende fra $-q$, og disse to kan bare kansellere hverandre dersom de har eksakt motsatt retning. Det er ikke mulig dersom q er plassert utenfor x -aksen, f.eks. som i figuren over. (Her er de to enkeltkomponentene av kraften angitt med stiplede piler og totalkraften med heltrukken pil.) Derfor må eventuelle likevektsposisjoner være på x -aksen.

b) Vi har fått oppgitt at det er *en* likevektsposisjon x_0 for q på x -aksen. Vi kan ikke ha x_0 mellom 0 og a , for på dette intervallet peker de to kraftkomponentene i samme retning. Vi kan heller ikke ha x_0 til venstre for $x = 0$, for da er avstanden mellom q og $3q$ alltid mindre enn avstanden mellom q og $-q$, og følgelig den frastøtende kraften $3q^2/4\pi\epsilon_0 x_0^2$ alltid større enn den tiltrekkende kraften $q^2/4\pi\epsilon_0 (a - x_0)^2$. Altså må $x_0 > a$. Vi bestemmer x_0 ved å sette total kraft lik null:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 x_0^2} \hat{x} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (x_0 - a)^2} \hat{x} \\ \Rightarrow \frac{3}{x_0^2} &= \frac{1}{(x_0 - a)^2} \\ \Rightarrow 3x_0^2 - 6ax_0 + 3a^2 &= x_0^2 \\ \Rightarrow 2x_0^2 - 6ax_0 + 3a^2 &= 0 \\ \Rightarrow x_0 &= \frac{6a}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{36a^2 - 24a^2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}a \simeq 2.37a \end{aligned}$$

Da forutsetningen var $x_0 > a$, er løsningen med negativt fortegn foran kvadratroten ikke en aktuell løsning. (Den tilsvarer $x \simeq 0.63a$, hvor begge kraftkomponenter er like store og har *samme* retning.)

Stabiliteten av likevektsposisjonen x_0 bestemmes kanskje enklest ved å se på nettokraften når $x \gg x_0$. Da "ser" punktladningen q tilnærmet en punktladning $3q - q = 2q$ og må følgelig erfare en netto frastøtende kraft. Vi vet at kraften er null bare i $x = x_0$. Da må kraften peke mot høyre for alle $x > x_0$, også for en liten forflytning til høyre for x_0 , mens den må peke mot venstre for en liten forflytning til venstre for x_0 . Dermed er likevekten ustabil mhp en forflytning langs x -aksen.

Alternativt, med litt regning: La oss først forenkle notasjonen ved å innføre funksjonen $f(x)$:

$$\mathbf{F}(x) = F(x)\hat{x} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{(x-a)^2} \right) \hat{x} \equiv \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} f(x)\hat{x}$$

Deretter bestemmer vi df/dx i $x = x_0$:

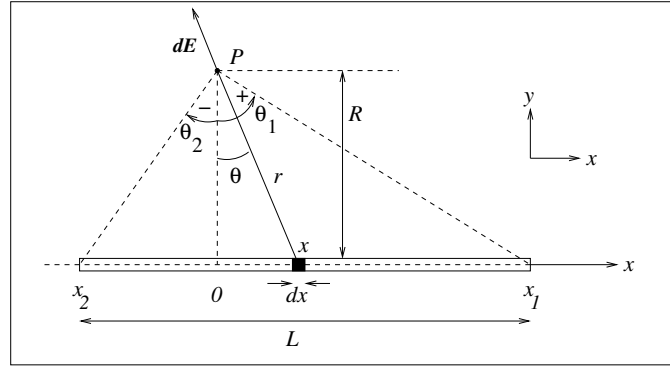
$$\left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} = -\frac{6}{x_0^3} + \frac{2}{(x_0 - a)^3} \simeq -\frac{6}{(2.37a)^3} + \frac{2}{(1.37a)^3} \simeq \frac{0.33}{a^3} > 0$$

Da $f(x_0) = 0$ og $f'(x_0) > 0$, er likevekten ustabil.

Oppgave 3

a) Med "linjeladning" (dvs: ladning pr lengdeenhet) λ må ladningene dq og Q på henholdsvis en liten lengde dx og på hele staven bli

$$dq = \lambda dx \quad Q = \lambda L$$



b) Elektrisk felt fra lengdeelement dx i posisjon x :

$$d\mathbf{E} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = A \frac{dx}{r^2} \hat{r}$$

der vi har innført $A = \lambda/4\pi\epsilon_0$. Fra figuren ser vi at denne vektoren har komponentene

$$dE_x = -dE \sin \theta = -\frac{A dx}{r^2} \sin \theta \quad dE_y = dE \cos \theta = \frac{A dx}{r^2} \cos \theta$$

Her har vi valgt $x = 0$ når $\theta = 0$, og fortegnet stemmer med oppgaveteksten, dvs $\theta > 0$ når $x > 0$. Vi bruker tipset i oppgaven og uttrykker dx og $1/r^2$ ved vinkelen θ :

$$\begin{aligned} x &= R \tan \theta \Rightarrow dx = \frac{R d\theta}{\cos^2 \theta} \\ r &= \frac{R}{\cos \theta} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \theta}{R^2} \\ \Rightarrow \frac{dx}{r^2} &= \frac{d\theta}{R} \end{aligned}$$

De søkte komponentene E_x og E_y av feltet $\mathbf{E}$ i punktet P fra hele staven får vi ved å integrere dE_x og dE_y :

$$\begin{aligned} E_x &= \int dE_x = -\frac{A}{R} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \sin \theta d\theta = \frac{A}{R} \Big|_{\theta_2}^{\theta_1} \cos \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \\ E_y &= \int dE_y = \frac{A}{R} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \cos \theta d\theta = \frac{A}{R} \Big|_{\theta_2}^{\theta_1} \sin \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \end{aligned}$$

Kommentar: Her kunne en ha vært "uheldig" og startet med sammenhengen $x = r \sin \theta$, som gir $dx = r \cos \theta d\theta + \sin \theta dr$, ettersom både θ og r varierer med x . Men det går bra likevel: Vi har $\cos \theta = R/r$, dvs $r = R/\cos \theta$, og dermed

$$dr = -R \frac{1}{\cos^2 \theta} (-\sin \theta) d\theta$$

slik at

$$\begin{aligned} \frac{dx}{r^2} &= \frac{r \cos \theta d\theta + \sin \theta dr}{r^2} \\ &= \frac{\cos \theta d\theta \cdot \cos \theta}{R} + \frac{\sin \theta \cdot R \sin \theta d\theta}{R^2} \\ &= \frac{d\theta}{R} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \frac{d\theta}{R} \end{aligned}$$

c) Med P like langt fra stavens to ender er $\theta_1 = -\theta_2$ og følgelig $\cos \theta_1 - \cos \theta_2 = 0$ og $\sin \theta_1 - \sin \theta_2 = 2 \sin \theta_1 = L/\sqrt{R^2 + L^2/4}$. Dermed:

$$E_x = 0$$

og

$$E = E_y = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 R \sqrt{R^2 + L^2/4}}$$

Langt unna staven, dvs $R \gg L$: Vi kan nå erstatte kvadratroten med R , idet vi kan neglisjere $L^2/4$ i forhold til R^2 . Vi får da:

$$E \simeq \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Dette er det samme som feltet fra en punktladning Q i avstand R . Ikke uventet: Langt unna ser staven essensielt ut som en punktladning med total ladning $Q = \lambda L$.

d) En uendelig lang stav oppnår vi ved å la $\theta_2 \rightarrow -\pi/2$ og $\theta_1 \rightarrow \pi/2$. Da blir igjen $E_x = 0$ og følgelig

$$E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Med andre ord: Feltet fra en uendelig lang linjeladning faller av som en over avstanden R .

Oppgave 4

a) Arealet av en tynn ring med radius R og bredde dR er $dA = 2\pi R dR$, slik at ladningen på en slik ring blir

$$dq = \sigma dA = 2\pi\sigma R dR$$

Arealet av skiva er $A = \pi R_0^2$, så skivas totale ladning blir

$$Q = \sigma A = \pi\sigma R_0^2$$

Hvis en ikke husker hva arealet av ei sirkelformet skive er (!), kan en selvsagt bestemme totalladningen Q ved å integrere dq :

$$Q = \int dq = \int_0^{R_0} 2\pi\sigma R dR = 2\pi\sigma \left| \frac{R^2}{2} \right|_0^{R_0} = \pi\sigma R_0^2$$

Og om en heller ikke husker hva omkretsen av en ring er (!), kan ladningen på den tynne ringen bestemmes ved å starte med en liten vinkel $d\phi$ og arealet avgrenset mellom R og $R + dR$. Dette arealet er $Rd\phi \cdot dR$, og integrerer vi dette uttrykket over ϕ fra 0 til 2π , får vi nettopp $2\pi R dR$ som blir arealet av den tynne ringen med radius R og bredde dR .

b) Vi deler skiva opp i tynne ringer med bredde dR (se figur nedenfor). Alle punkter på ringen ligger i samme avstand r fra punktet på z -aksen. Diametralt motsatte punkter (evt arealer dA) fører til at x - og y -komponentene til feltet forsvinner (jfr eksemplet fra forelesningene). z -komponenten blir

$$dE_z = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$$

Da r er konstant rundt hele ringen, kan en la dQ være ladningen på hele den tynne ringen:

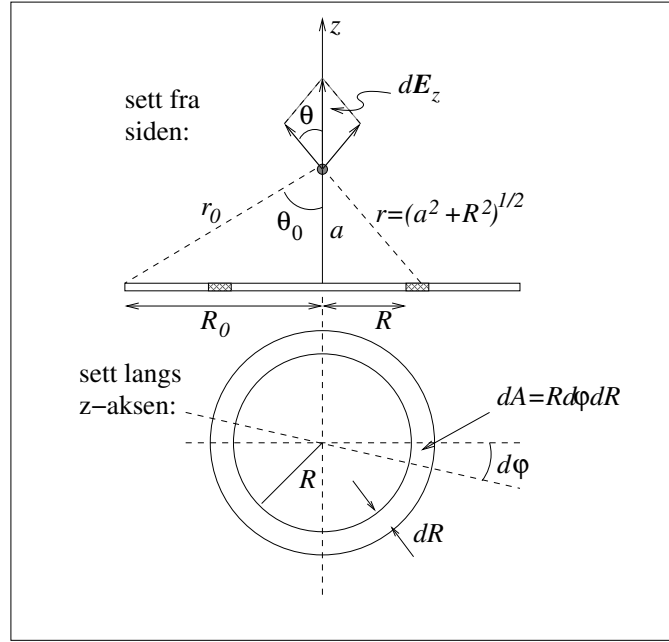
$$dQ = \sigma R dR \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi\sigma R dR$$

Dermed blir feltet fra hele skiva

$$E_z = \int dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{R_0} \frac{2\pi\sigma R a dR}{(a^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \left| \frac{(-1)}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right|_0^{R_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R_0^2}} \right)$$

Her har vi benyttet at

$$\cos \theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$$



Et alternativ ville ha vært å bruke vinkelen θ som integrasjonsvariabel:

$$\begin{aligned}
 \tan \theta &= \frac{R}{a} \Rightarrow d(\tan \theta) = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{dR}{a} \\
 r &= \frac{a}{\cos \theta} \\
 \int_0^{R_0} \frac{R dR}{r^2} \cos \theta &= \int_0^{\theta_0} \left(\frac{\cos \theta}{a} \right)^2 a \tan \theta \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta} \cos \theta = \int_0^{\theta_0} \sin \theta d\theta \\
 &= 1 - \cos \theta_0 = 1 - \frac{a}{r_0} = 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R_0^2}}
 \end{aligned}$$

der r_0 og θ_0 er definert i figuren over.

c) Når $a \gg R_0$, kunne en i første omgang (som i oppgave 1c) tenke seg å erstatte $\sqrt{a^2 + R_0^2}$ med a . Da får vi imidlertid bare den "trivielle" løsningen $E_z = 0$, mens vi er interessert i det dominerende ikke-forsvinnende bidraget til E_z . Det betyr at vi må rekkeutvikle $\sqrt{a^2 + R_0^2}$ og ta med så mange ledd at vi alt i alt ender opp med noe som er forskjellig fra null:

$$\begin{aligned}
 E_z &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{a}{a\sqrt{1 + \frac{R_0^2}{a^2}}} \right) \\
 &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \left(1 - \frac{R_0^2}{2a^2} + \dots \right) \right) \\
 &\simeq \frac{\sigma R_0^2}{4\epsilon_0 a^2} \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}
 \end{aligned}$$

Her har vi brukt tilnærmelsen som var gitt i oppgaveteksten, $(1 + \alpha)^{-1/2} \simeq 1 - \alpha/2$, med $\alpha = R_0^2/a^2 \ll 1$. Dette er feltet i avstand a fra en punktladning $Q = \sigma A$, der $A = \pi R_0^2$ er arealet av sirkelskiva. Som forventet: Er vi tilstrekkelig langt borte, ser vi ikke forskjell på ei ladet skive og en punktladning.

I den motsatte grensen, $R_0 \gg a$, kan vi neglisjere leddet $a/\sqrt{a^2 + R_0^2}$ i forhold til 1. Vi får da

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Altså et uniformt elektrisk felt som verken avhenger av avstanden a eller skivas utstrekning R_0 . Dermed må dette være feltet utenfor et *uendelig stort plan* med ladningstetthet σ . Det er kanskje ikke umiddelbart opplagt at feltet da blir *uavhengig av avstanden* til planet, men slik er det altså! Selv om vi i praksis ikke har uendelig store flater til rådighet, er dette et viktig resultat: Med et stort ladet plan genererer vi et tilnærmet uniformt elektrisk felt i nærheten av planet, så lenge vi ikke kommer for nær planets ytterkanter. Vi skal bruke dette resultatet flere ganger senere, ikke minst i tilknytning til kondensatorer.