

Einsteins relativitetsteori nødvendiggjør magnetiske krefter!



$q \oplus$  i ro

$q$  er i ro og "ser" en elektrisk nøytral men strømførende leder

$\Rightarrow$  Kraft på  $q$ :  $F = 0$



$q \oplus$  i beregelse  
 $\vec{F}$   
 $\vec{u}$

$q$  er nå i beregelse og ser en negativt ladet leder, fordi elektronene i ledere ( $\ominus$ ) har større relativ fart enn atomkjernene i ledere ( $\oplus$ )

Einstein: Lysfarten i vakuum er  $c$

i alle inertialsystem. Fører bl.a. til

lengdekontraksjon, dvs objekt i beregelse er kortere

enn når det er i ro:  $L = L_0 \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2}$

$$\Rightarrow \text{Avstand mellom } \ominus : L_- = L_0 \cdot \sqrt{1 - u_-^2/c^2} ; u_- \approx v + v_d$$
$$\text{--- " --- } \oplus : L_+ = L_0 \cdot \sqrt{1 - u_+^2/c^2} ; u_+ = v < u_-$$

$\Rightarrow L_- < L_+ \Rightarrow q$  i beregelse ser leder med netto negativ ladning  
 $\Rightarrow q$  påvirkes av elektrisk kraft  $\vec{F}$

Men vi er i ro relativt ledere, som for oss er nøytral, så vi måler ingen elektrisk kraft på  $q$ . Vi måler en magnetisk kraft  $\vec{F}_m$ , som kan uttrykkes via et magnetfelt  $\vec{B}$ . Strømmen i ledere,  $I$ , skaper magnetfeltet  $\vec{B}$ .

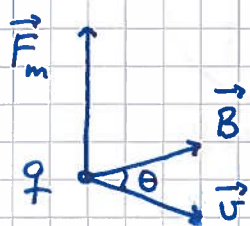
## Magnetisk kraft [YF 27.2] ~~XXXXXXXXXX~~

(50)

Fra før: Lading(er) omgir seg med elektrisk felt  $\vec{E}$ .  
 $\Rightarrow$  El. kraft  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  på (en annen) lading  $q$

Elektrisk strøm omgir seg med magnetfelt  $\vec{B}$

$\Rightarrow$  Magn. kraft  $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$  på lading  $q$  i bevegelse med hastighet  $\vec{v}$



$$F_m = |\vec{F}_m| = qvB \sin \theta$$

$\vec{F}_m \perp \vec{B}$  og  $\vec{F}_m \perp \vec{v}$ ; høyrehandsregel!

Enhet (SI):  $[B] = \frac{N}{C \cdot m/s} = \frac{N}{A \cdot m} = T$  (tesla)

Evt:  $1 G = 10^{-4} T = 1 \text{ gauss}$

Eks:  $\vec{B}$  i Trondheim (pga strømmer inni jordkloden.)

$$B = |\vec{B}| \approx 52 \mu T; B_{\perp} \approx 50 \mu T, B_{\parallel} \approx 13.6 \mu T$$

$$\vec{B}_{\parallel} = B_N \hat{N} + B_{\theta} \hat{\theta}; B_N \approx 13.58 \mu T, B_{\theta} \approx 0.78 \mu T$$

([ngdc.noaa.gov/geomag-web](http://ngdc.noaa.gov/geomag-web))

(Sjekk f.eks. Sydney og Honolulu)

Med både el. felt  $\vec{E}$  og magnetfelt  $\vec{B}$  til stede:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

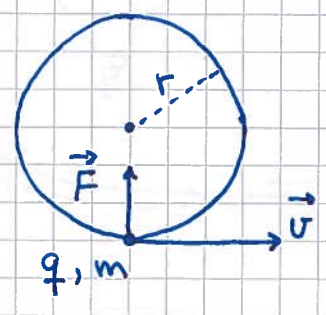
Lorentzkraften

# Ladning i uniformt $\vec{B}$ -felt [YF 27.4]

Notasjon:  $\otimes$   $\vec{B}$  inn i planet (pil sett bakfra)  
 $\odot$   $\vec{B}$  ut av planet (pil sett forfra)

Anta  $\vec{B}$  inn i planet og  $\vec{v} \perp \vec{B}$ , slik at  $F = qvB$ :

$\vec{B} \otimes$



Med  $\vec{F} \perp \vec{v}$  til enhver tid:

• Tilført effekt:  $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$ , dvs magnetisk kraft  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  kan aldri gjøre et arbeid!

- Da er  $K = \frac{1}{2}mv^2 = \text{konstant}$ , og vi må få uniform sirkelbevegelse
- Vet da at akselerasjonen er  $a = v^2/r$ , rettet inn mot sirkelens sentrum

Newtons 2. lov (N2) gir da:

$$qvB = mv^2/r \Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$$

Vinkelhastigheten (= vinkelfrekvensen):  $\omega = \frac{v}{r}$

Kalles i denne sammenhengen syklotronfrekvensen,

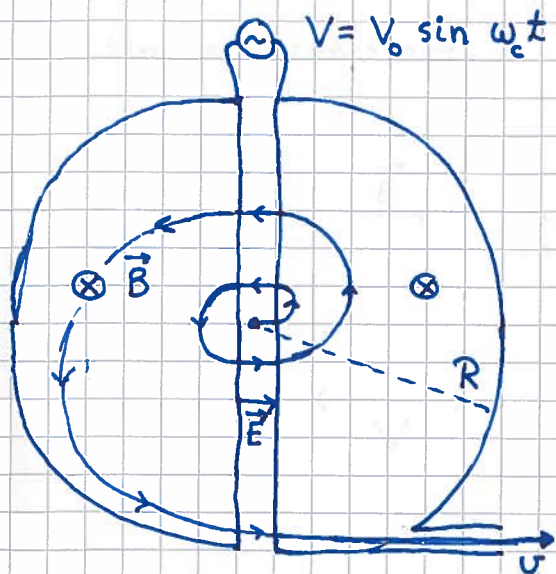
$$\omega_c = qB/m$$

Merk at  $\omega_c$ , og dermed perioden (omløpstida)  $T = 2\pi/\omega_c$ , blir uavhengig av farten  $v$  og kin.energi  $K$ , fordi  $v$  er prop. med sirkelradien  $r$ .

# Eks 1: Partikkelakselerator, "cyclotron"

(E.O. Lawrence, 1934; NP 1939)

(52)



$V = V_0 \sin \omega_c t$  = vekselspanning som sørger for elektrisk felt  $\vec{E}(t)$  mellom de to halvsirkelformede hule elektrodene, med retning på  $\vec{E}$  slik at partiklene med ladning  $q$  i hver passasje akselereres av kraften  $\vec{F} = q\vec{E}$ .  
 $\Rightarrow K$  øker  $\Rightarrow$  sirkelbanens  $r$  øker, inntil  $r \approx R$  = elektrodens radius

Partikler (ladning  $q$ , masse  $m$ ) ut når

$$qvB = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \frac{qBR}{m} \Rightarrow K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m}$$

Med f.eks.  $m = m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$  kg (protoner),  $B = \frac{1T}{0.01}$  og  $R = 0.3$  m (Lawrence, <sup>1932</sup> ~~1934~~) oppnås

$$v = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 0.3}{1.67 \cdot 10^{-27}} \text{ m/s} = \underline{2.9 \cdot 10^7 \text{ m/s}}$$

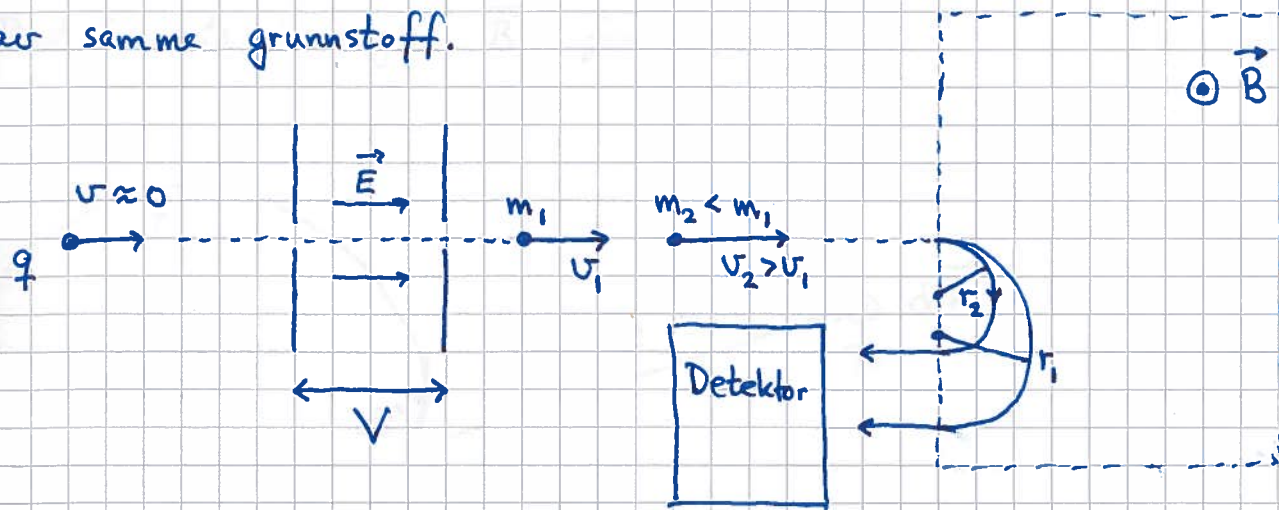
$$K = \frac{1}{2} m_p v^2 = 6.9 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 4.3 \cdot 10^6 \text{ eV} = \underline{4.3 \text{ MeV}}$$

$$f_c = \omega_c / 2\pi = qB / 2\pi m_p = \underline{15 \text{ MHz}}$$

(Når  $v$  nærmer seg  $c$ , lysfarten i vakuum, må man regne relativistisk. Da er fremdeles  $F = dp/dt$  (N2), men nå er bevegelsesmengden (impulsen) ikke lenger  $p = mv$ , men derimot

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \quad \text{Mer om det i FY6019 !}$$

Kan f.eks. brukes til å separere ioner med ulike masse, f.eks. isotoper av samme grunnstoff.



Ionene akselereres i  $\vec{E}$ -feltet mellom elektrodene med potensialforskjell (spenning)  $V$ . Energibevarelse gir:

$$qV = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

Ionene avbøyes og følger sirkelbane i det uniforme  $\vec{B}$ -feltet:

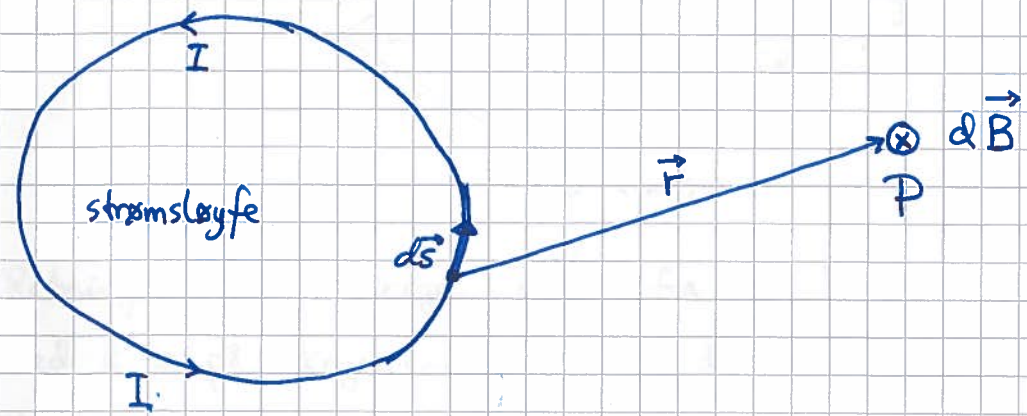
$$r = mv/qB = \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{2qV}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mV}{q}}$$

Med lik ladning  $q$  vil isotoper med ulik masse  $m$  følge baner med ulik radius  $r$  og treffe detektoren på ulike steder.

# Biot - Savarts lov [YF 28.2]

Coulombs lov gir  $\vec{E}$  fra ladning  $q$

Biot-Savarts lov gir  $\vec{B}$  fra strøm  $I$



$I$  = strømstyrke ; like stor i hele strømsløyfa ("ledersløyfa")

$d\vec{s}$  = liten bit av strømsløyfa (inkl. lengde og retning)

$P$  = en posisjon der vi ønsker å finne magnetfeltet,  $\vec{B}_P$

$\vec{r}$  = avstandsvektoren fra  $d\vec{s}$  til  $P$

$d\vec{B}$  = bidraget til  $\vec{B}_P$  fra  $d\vec{s}$ , dvs pga strømmen  $I$  som går i lederbiten  $d\vec{s}$

Da er:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Fellet i  $P$  fra hele strømsløyfa, som i praksis alltid danner en lukket sløyfe, bestemmes nå ved å summere bidragene fra alle små biter av sløyfa. Med infinitesimale  $d\vec{s}$  betyr dette å

integreere:

$$\vec{B}_P = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Biot-Savarts lov  
(1820)

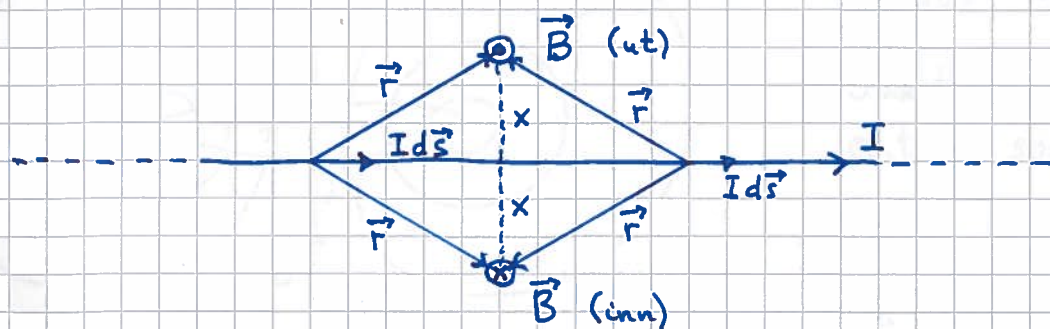
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} / \text{A}$  = vakuumpërmeabiliteten

$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  = farten til E.M. bølger i vakuum = 299792458 m/s

Eksempler (der vi ikke tar alle matematiske detaljer) :

(55)

Eks 1:  $\vec{B}$  fra lang, rett strømførende leder [YF 28.3]



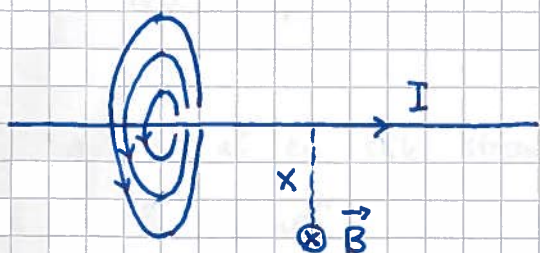
Retningen til bidraget  $d\vec{B}$  fra et "strømelement"  $I d\vec{s}$  finner vi ved å se på kryssproduktet  $I d\vec{s} \times \vec{r}$ .

Vi ser at over lederen, i planet, peker alle bidrag  $d\vec{B}$  ut av planet.

Og under lederen peker alle  $d\vec{B}$  inn i planet.

Av symmetigrunner er det da klart at  $\vec{B}$  overalt må ha retning tangentielt til sirkler med sentrum på lederen.

$\Rightarrow$  Feltlinjene for  $\vec{B}$  (som for  $\vec{E}$ : Linjer  $\parallel \vec{B}$ . Tetthet prop. med  $|\vec{B}|$ )  
må være sirkler konsentriske med lederen:



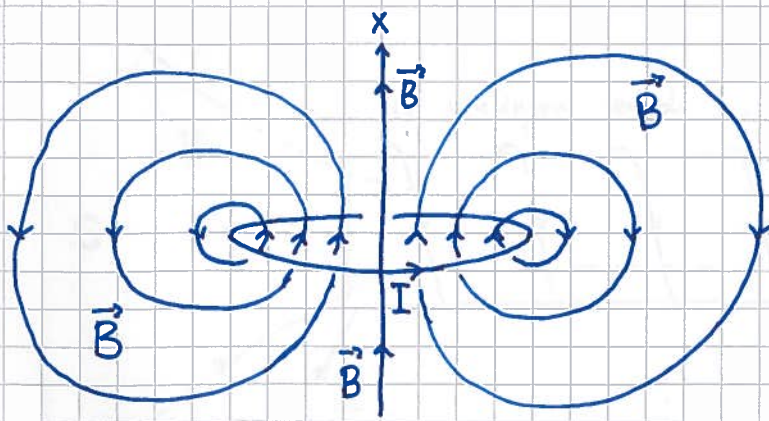
$x$  = avstand fra lederen

Biot-Savarts lov gir

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad (\text{lang, rett leder})$$

- H.h.regel (nr 2?) gir sammenheng mellom retningen på  $I$  vs  $\vec{B}$  :  
Tommel langs  $I$ , de 4 andre krummer langs  $\vec{B}$ .

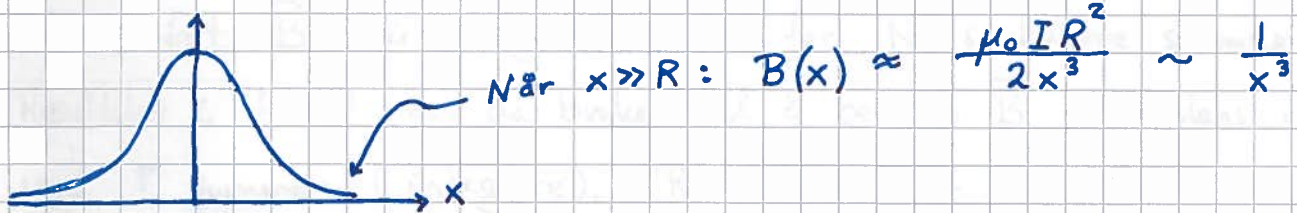
- Vi ser at feltlinjene for  $\vec{B}$  her er lukkede. Dette gjelder alltid. Uttrykker at vi ikke har "magnetiske ledninger", evt. magn. "monopoler".



- Strømsløyfe i  $yz$ -planet, radius  $R$ .
- Svært nær lederen er  $\vec{B}$  omtrent som for lang, rett leder.
- På  $x$ -aksen er  $\vec{B} \parallel \hat{x}$  pga symmetri.

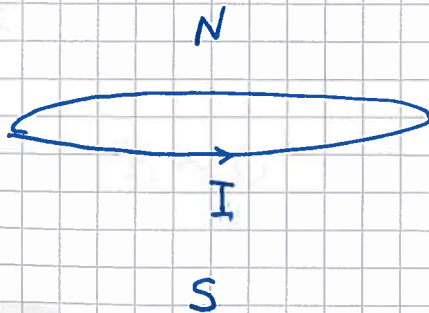
På  $x$ -aksen gir Biot-Savarts lov:

$$B(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

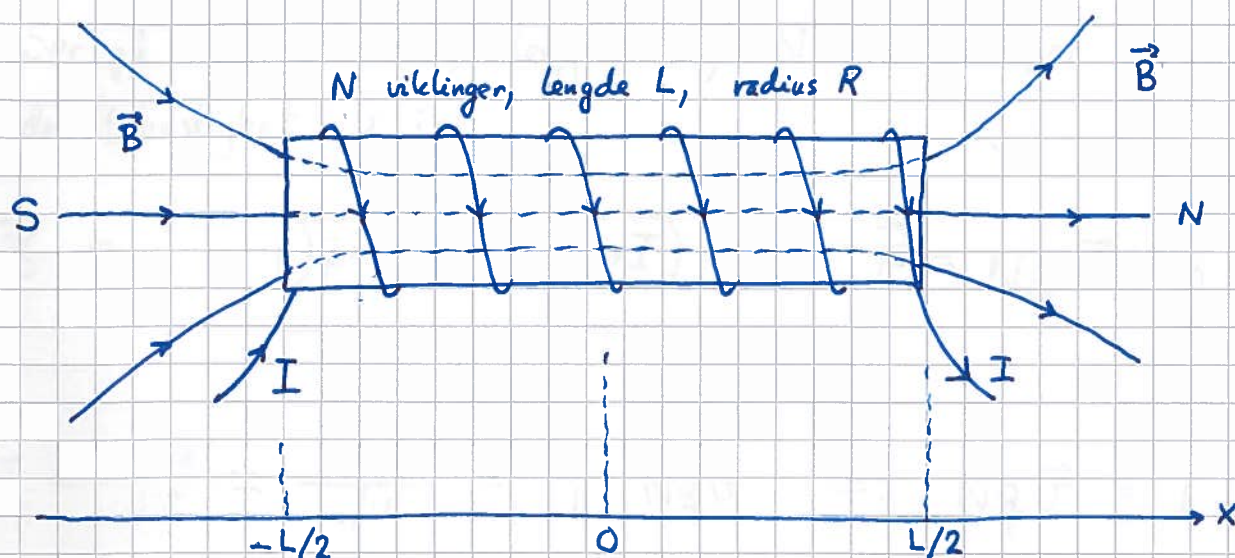


På 1.samling (s.9) fant vi at  $\vec{E}$ -feltet fra en elektrisk dipol avtar med 3. potens av avstanden (for stor avstand  $x$ ).

Vi skal se at en slik strømførende sløyfe er en magnetisk dipol, der de to "polene" kan kalles  $N$  (nord) og  $S$  (sør):



4 fingre langs  $I \Rightarrow$  tommel mot  $N$



Vi antar  $N$  tettpakkede viklinger på lengden  $L$ , slik at antall viklinger pr lengdeenhet (= vikleings tettheten) er  $n = N/L$ .

Totalt felt  $\vec{B}$  blir da (omtrent) som for  $N$  sirkulære strømsløyfer. Resultatet i Eks 2 kan da brukes til å beregne  $\vec{B}$  på spolens akse, ved å summere (integreere). Resultatet er:

$$B(x) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left\{ \frac{L/2 - x}{\sqrt{(L/2 - x)^2 + R^2}} + \frac{L/2 + x}{\sqrt{(L/2 + x)^2 + R^2}} \right\}$$

Anta at spolen er lang, dvs  $L/2 \gg R$ . Da er:

- Inni spolen, ikke for nær endene, dvs  $|x| \ll L/2$ :

$$\boxed{B \approx \mu_0 n I} \quad \leftarrow \text{Viktig resultat!}$$

Viser seg å gjelde overalt inni spolen, ikke bare på akse.

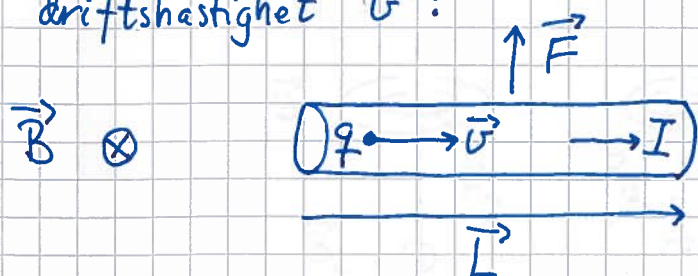
- Utenfor spolen:  $B \approx 0$

- Ved spolens ender,  $x = \pm L/2$ :  $B \approx \frac{1}{2} \mu_0 n I$

Magnetisk kraft på strøm

[YF 27.6]

Ser på liten lederbit, lengde  $L$ ,  $N$  frie ledninger  $q$  med driftshastighet  $\vec{v}$ :

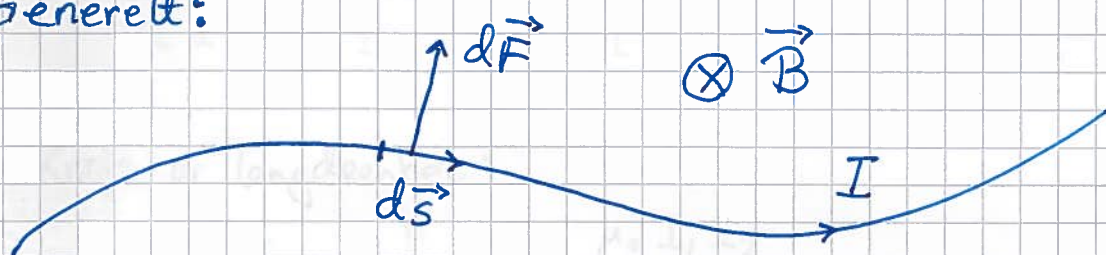


$$\vec{F} = Nq \vec{v} \times \vec{B}$$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Nq}{L/v} = \frac{1}{L} Nq v \Rightarrow Nq \vec{v} = I \vec{L}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}}$$

Generelt:



$$d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}$$

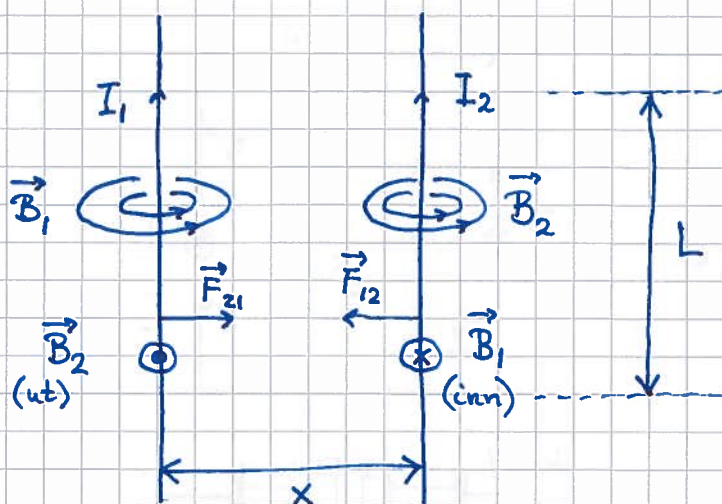
$\Downarrow$

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = I \int d\vec{s} \times \vec{B}$$

= total kraft på lederen

# Eks 1: Kraft mellom parallelle strømmer [YF 28.4]

59



Innbyrdes kraft på lengden  $L$ :

$$F_{12} = F_{21} = F \quad (\text{Newtons 3. lov})$$

$$F = I_1 L B_2 \quad (= I_2 L B_1) = I_1 L \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x}$$

Kraft pr lengdeenhet:

$$f = \frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}$$

$$I_1 \parallel I_2 \Rightarrow \text{tiltrekkende}$$

$$I_1 \parallel -I_2 \Rightarrow \text{frastøtende}$$

Med  $x = 1\text{m}$  og  $L = 1\text{m}$  og  $I_1 = I_2 = 1\text{A}$

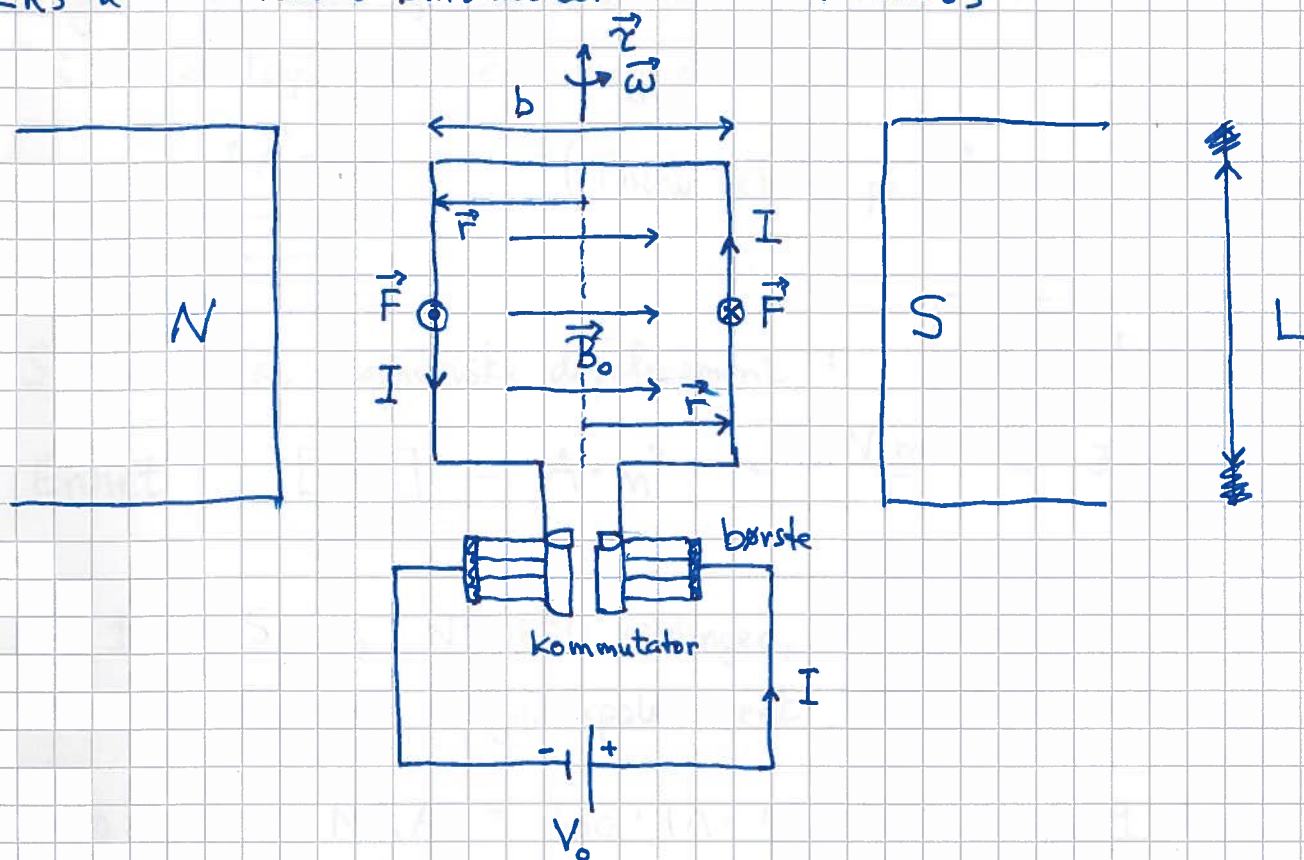
blir  $F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ . (Fremdeles grunnlaget for selve

definisjonen av  $1\text{A}$ . Kan bli erstattet av en annen def. i nærmeste framtid...)

# Eks 2: Likestrømsmotor

[YF 27.8]

(60)

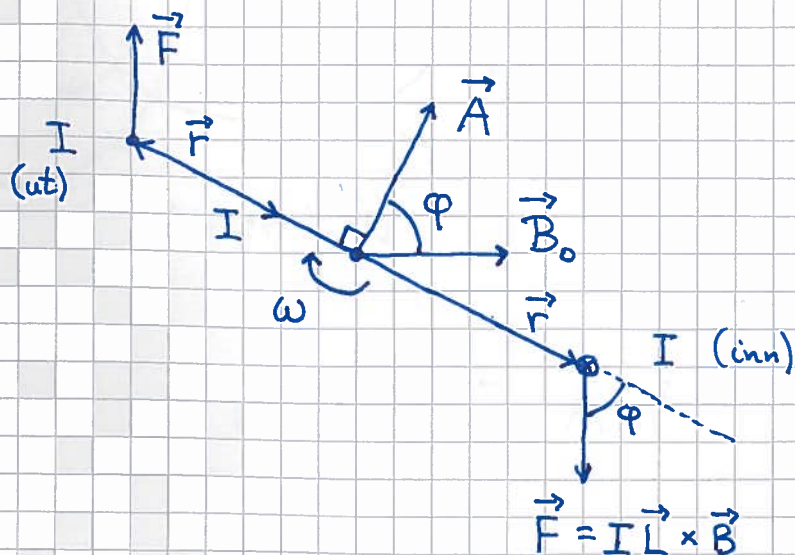


Kommutatoren roterer med ledersløyfa og sørger for strømretning som i figuren hele tiden, og dermed dreiemoment  $\vec{\tau}$  på ledersløyfa hele tiden.

$$\tau = |\vec{\tau}| = \left| \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \right| = 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot ILB_0 \cdot \sin\varphi$$

der  $\varphi$  = vinkel mellom  $\vec{r}$  og  $\vec{F}$ .

Sett langs rotasjonsaksen:  
(dvs:  $\vec{\tau}$  inn i planet)



$\vec{A}$  = "arealvektoren" =  $A \cdot \hat{n}$

$$A = L \cdot b$$

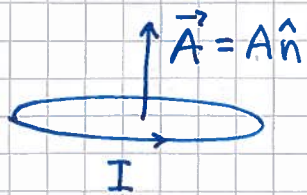
$$\vec{\tau} = I \vec{A} \times \vec{B}_0$$

$$\tau = IAB_0 \sin\varphi$$

Hvis spole med  $N$  viklinger:  $\tau = N I A B_0 \sin\varphi$  ;  $\vec{\tau} = N I \vec{A} \times \vec{B}_0$

## Magnetisk dipol og dipolmoment [YF 27.7]

En strømsløjfe er en magnetisk dipol.



(Positiv retning på  $\vec{A}$  med h.h.regel.)

Strømsløjfes magnetiske dipolmoment :

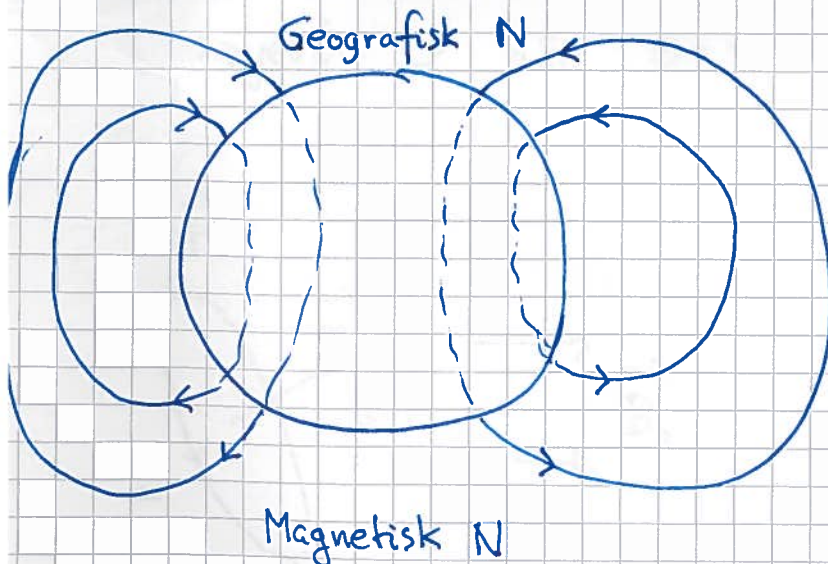
$$\vec{m} = I \vec{A}$$

Enhet :  $[m] = A \cdot m^2 = \frac{N \cdot m}{T} = J/T$

Eks 1 : Spole,  $N = 1600$  viklinger, tværsnitt  $A = 4 \text{ cm}^2$ .  
Hva er magn. dipolmoment når  $I = 1 \text{ A}$ ?

Løsn:  $m = NIA = 1600 \cdot 1 \text{ A} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = \underline{\underline{0.64 \text{ Am}^2}}$

Eks 2 : Jordas magn. dipolmoment



$$m \approx 8 \cdot 10^{22} \text{ Am}^2$$

Magnetisk dipol i ytre magnetfelt  $\vec{B}_0$  :

For ledersløyfa i DC-motoren fant vi at (s. 60)

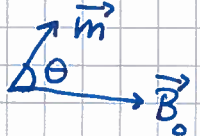
$$\vec{\tau} = I \vec{A} \times \vec{B}_0 = \vec{m} \times \vec{B}_0,$$

som viser seg å holde generelt for magn. dipol i ytre felt  $\vec{B}_0$ .

Sammenlign med elektrisk dipol  $\vec{p}$  i ytre felt  $\vec{E}_0$  (s 30-31):

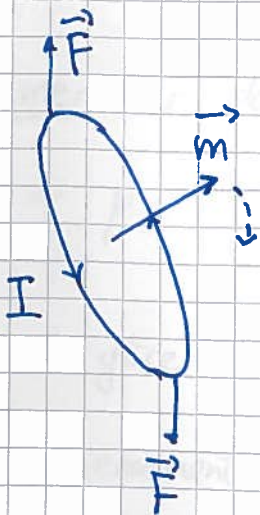
$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0 ; \quad U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

På samme vis som vi utledet  $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$  kan en vise at magn. dipol  $\vec{m}$  i ytre felt  $\vec{B}_0$  har potensiell energi

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0 = -m B_0 \cos \theta$$


$\Rightarrow$  lavest  $U$  når  $\theta = 0$  :  $U_{\min} = -m B_0$

høyst  $U$  når  $\theta = \pi$  :  $U_{\max} = +m B_0$



$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0$$

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$$