

ELEKTRISITET OG MAGNETISME

①

I. Elektrostatikk. Ledere og isolatorer

OS2 5-8 ; YF 21-24 ; LHL 19-20

ca 10F ; 2,5 uker

II. Strøm. Likestrømkretser (DC)

OS2 9-10 ; YF 25-26 ; LHL 21-22

ca 4F ; 1 uke

III. Magnetostatikk. Magnetisme

OS2 11-12 ; YF 27-28 ; LHL 23, 26

ca 6F ; 1,5 uker

IV. Elektromagnetisk induksjon. Vekselstrømkretser (AC)

OS2 13-15 ; YF 29-31 ; LHL 24, 25, 27

ca 6F ; 1,5 uker

I. Elektrostatikk [OS2 5-8; YF 21-24; LHL 19-20]

(2)

Elektriske ladning [OS2 5.1; YF 21.1; LHL 19.1]

Materie = molekyler, atomer

Atom = kjerne og elektroner

Kjerne = protoner og nøytroner = kjernepartikler

Kjernepartikkel = 3 kvarker

Elementærpartikler = naturens udelelige byggeklosser,
med kvantisert elektrisk ladning

Partikkel	Symbol	Ladning
Elektron	e	$-e$
Opp - kvark	u	$+2e/3$
Ned - kvark	d	$-e/3$
Elektron - nøytrino	ν_e	0
Foton	γ	0

OSU

(I alt 17 elementærpartikler i Standardmodellen
for partikkelfysikk.)

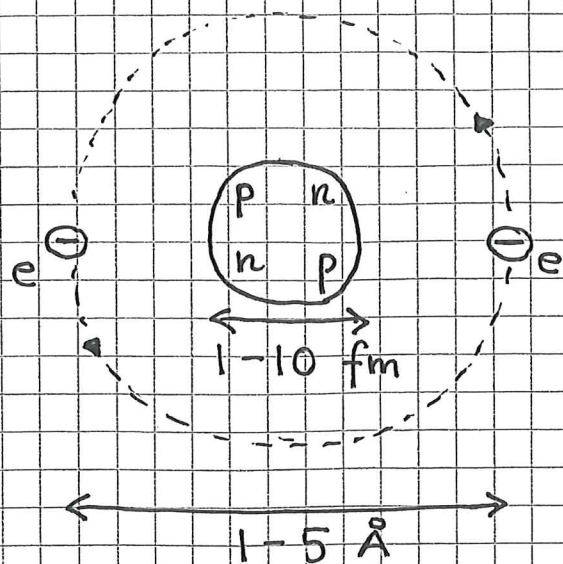
e = elementærladningen (Robert Millikan, oljedråpeforsøk
1909, nobelpris 1923)

Nøytron (n) : $1u + 2d \Rightarrow q_n = 0$

Proton (p) : $2u + 1d \Rightarrow q_p = e$

Symbol for ladning : q, Q

Klassisk bilde av atom: (Niels Bohr 1913, NP1922) (3)



$$m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_p \approx m_n \approx 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Dvs: Nesten all masse i kjernen

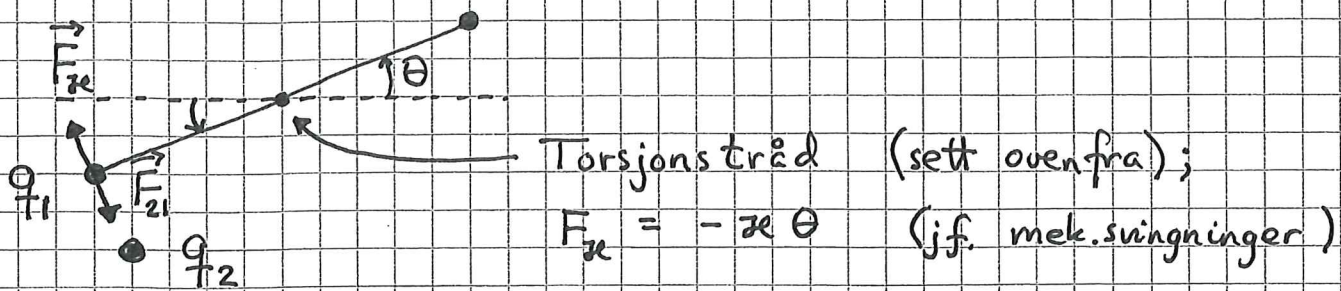
$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$$

$$1 \text{ Å (ångström)} = 10^{-10} \text{ m}$$

- Nøytralt atom med atomnummer Z har Z protoner og Z elektroner; $Q = Ze - Ze = 0$
- Ioner er atomer eller molekyler med $Q \neq 0$, f.eks:
 O^{2-} = oksygenatom med 10 elektroner; $Z=8$; $Q = -2e$
 O_2^- = oksygenmolekyl med 17 elektroner; $Q = -e$
- Isotoper er atomer av samme grunnstoff med ulikt antall nøytroner i kjernen, f.eks:
 ^{16}O , ^{17}O , ^{18}O har hhv 8, 9, 10 nøytroner
- Netto elektrisk ladning i et isolert system er bevart.
 Eks: β^- decay
 $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ ($\bar{\nu}_e$ = antielektronnøytrino, $q=0$)
 F.eks $^{234}_{90}\text{Th} \rightarrow ^{234}_{91}\text{Pa} + e + \bar{\nu}_e$ (+ energi)
 Halveringstid $t_{1/2} \approx 24$ døgn
 Th = thorium; Pa = protactinium

Coulombs lov [OS2 5.3 ; YF 21.3 ; LHL 19.3] (4)

C.A. de Coulomb ca 1785 :

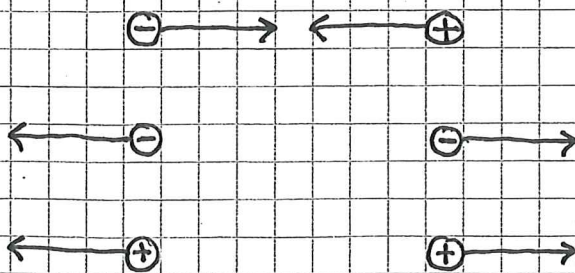


Coulomb fant at $F_{21} \sim q_1 \cdot q_2 / r_{12}^2$, dvs

$$\vec{F}_{21} = K_e \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Samme form som gravitasjonsloven ($F_{21} = G \cdot m_1 m_2 / r_{12}^2$),
og N3 er oppfylt ($\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$).

Samme type ladning $\Rightarrow$ Frastøtning
Ulik type ladning $\Rightarrow$ Tiltrekning



Enhet for ladning [OS2 5.1; TF 21.3; LHL 19.1] (5)

SI: $[Q] = C$ (coulomb)

- $1C = 1As$ = mengde ladning som passerer tverrsnittet av en leder ~~per~~ pr sekund når strømstyrken er $1A$ (ampere)

- $1C$ er ladningsmengden på hver av to like legemer som i innbyrdes avstand $1m$ frastøter hverandre med en kraft $8.987551787 \cdot 10^9 N$; dvs

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 N m^2 / C^2$$

$$\epsilon_0 = 8.854187817 \cdot 10^{-12} C^2 / N m^2$$

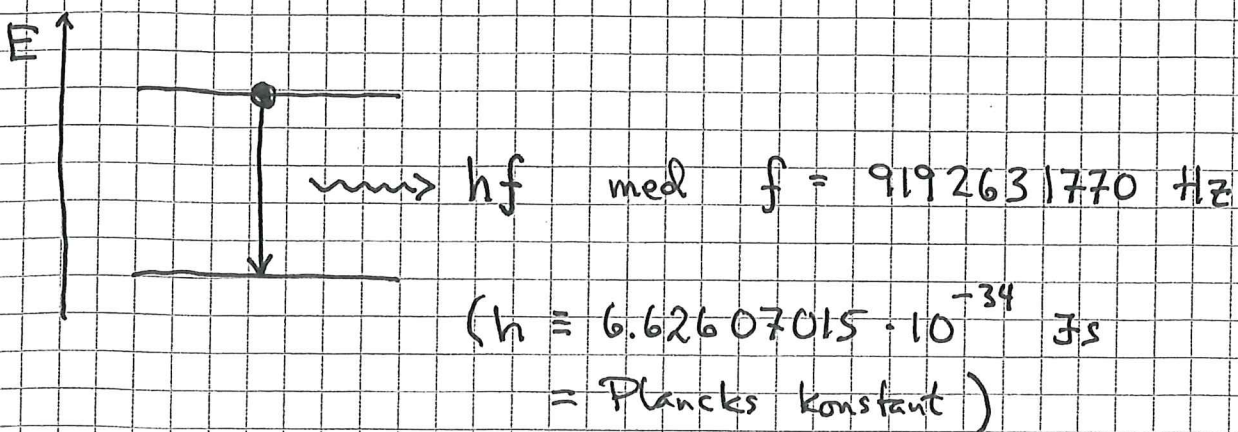
= vakuumpermittiviteten

- Etter ²⁰~~19~~.05.2019:

$$e \equiv 1.602176634 \cdot 10^{-19} C$$

$$\Rightarrow 1A = 1C/s$$

$1s = 9192631770$ perioder av stråling pga en elektronovergang mellom hyperfinsplittede nivåer i ¹³³Cs



Elektrisk felt [OS2 5.4-5.5 ; YF 21.3-5 ; LHL 19.3-5]

⑥



Referanseladning

Testladning

Kraft fra q på q_0 : $\vec{F} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$

Elektrisk felt $\stackrel{\text{def}}{=}$ El. kraft pr ladningsenhet

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{F}/q_0 ; [E] = \text{N/C}}$$

(Tilsvarende : $m \xrightarrow{\vec{r}} m_0$)

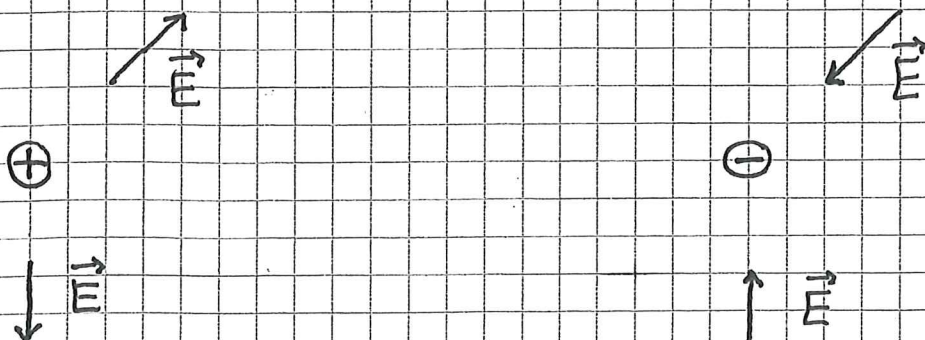
Kraft fra m på m_0 : $\vec{F} = -G \frac{mm_0}{r^2} \hat{r}$

Gravitasjonsfelt (Tyngdefelt) : $\vec{g} = \vec{F}/m_0$)

Punktladning q omgir seg med et el. felt $\vec{E}$
som i avstand $\vec{r}$ er

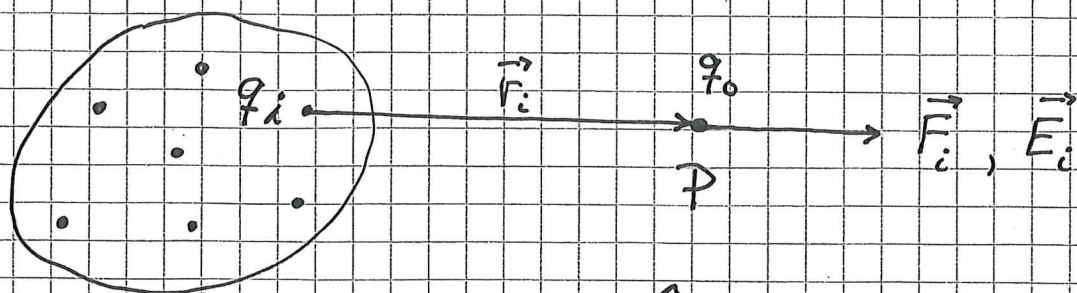
$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}}$$

Radielt bort fra pos. ladm. og radielt inn mot neg. ladm. :



(7)

Superposisjonsprinsippet gjelder for krefter, og dermed for elektrisk felt: Total kraft og totalt felt fra flere ladninger er vektorsummen av enkeltbidragene.

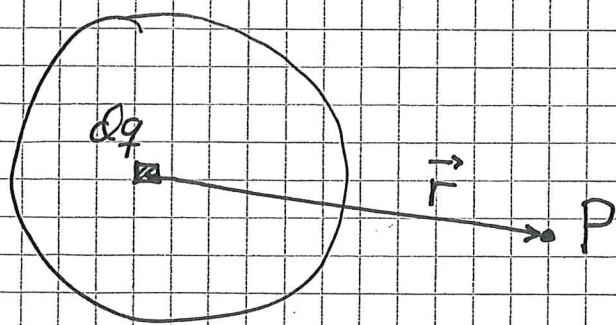


$$\vec{E} = \vec{F}/q_0 = \sum_i \frac{q_i q_0 \hat{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2 q_0} = \sum_i \frac{q_i \hat{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} = \sum_i \vec{E}_i$$

= el. felt i posisjon P fra ref. ladm. $\{q_1, \dots, q_n\}$

Dersom kontinuerlig fordeling av ref. ladm.:

$$q_i \rightarrow dq \quad ; \quad \sum_i \rightarrow \int$$



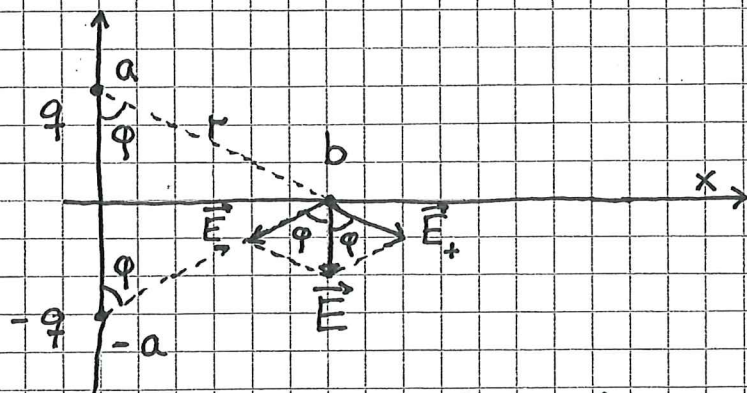
El. felt i pos. P:

$$\vec{E} = \int \frac{\hat{r} dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Ekse 1: Elektrisk dipol

(8)

Punktladn. $\pm q$ i $y = \pm a$; hva er $\vec{E}$ i $x = b$ (på x-aksen)?



$$\vec{E} = -E \hat{y}$$

$$E = 2E_+ \cos \varphi \quad (E_- = E_+)$$

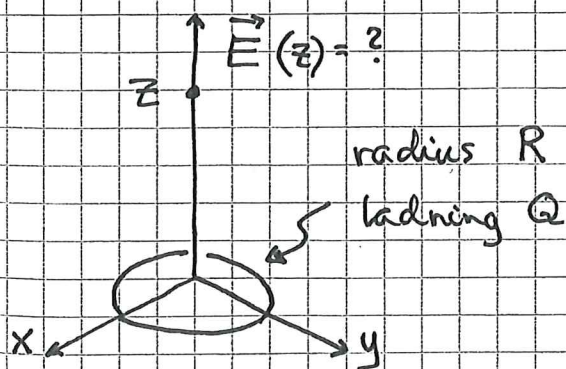
$$E_+ = q / 4\pi\epsilon_0 (a^2 + b^2)$$

$$\cos \varphi = a / \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\hat{y} \cdot 2qa / (a^2 + b^2)^{3/2} 4\pi\epsilon_0$$

$E(r) = \frac{2qa}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sim 1/r^3$; dvs $E(r)$ går raskere mot null enn for en punktladning når r øker.

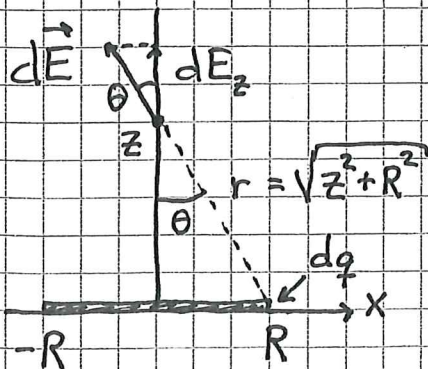
Ekse 2: Jevn ladet ring



Pga symmetri er

$$\vec{E}(z) = E_z(z) \hat{z}$$

på z-aksen.



Bidrag fra liten ladning dq , f.eks. på x-aksen:

$$dE_z = dE \cdot \cos \theta$$

$$dE = dq / 4\pi\epsilon_0 r^2$$

$$\cos \theta = z/r$$

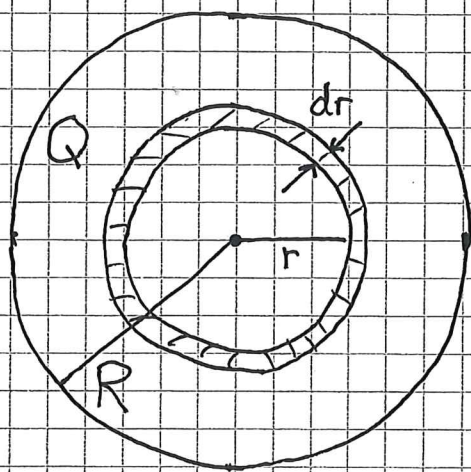
$$\Rightarrow E_z(z) = \int dE_z = \frac{z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int dq = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (9)$$

Rimelig: Riktig enhet. $E_z(0) = 0$. $E_z(-z) = -E_z(z)$.

$$E_z(z) \stackrel{z \gg R}{\approx} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}; \text{ som punktladn. } Q \text{ i origo.}$$

Eks 3: Jevnt ladet skive

= sum av tynne ringer (jfr samme type ide ved beregning av treghetsmoment for ring og skive)



Ladning på tynn ring med radius r og bredde dr :

$$dq = Q \cdot \frac{dA}{A} = Q \cdot \frac{2\pi r dr}{\pi R^2}$$

Bidrar med el. felt

$$dE_z = \frac{dq \cdot z}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}}$$

på z -aksen (symmetriaksen; ut av planet)

$\Rightarrow$ Totalt el. felt på symmetriaksen:

$$E_z = \int dE_z = \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[- (r^2 + z^2)^{-1/2} \right]_0^R$$

$$= \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right\}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/z^2}} \right\}$$

Svaret er rimelig: Langt unna skiva er $z \gg R$.

Da er $(1 + R^2/z^2)^{-1/2} \approx 1 - R^2/2z^2$ slik at

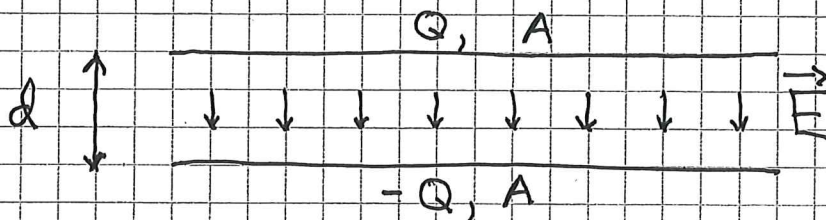
$E_z \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$, som er felt i avstand z fra en punktladning Q i origo.

Nær skiva, for $z \ll R$, er feltet konstant:

$$E_z \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

med $\sigma = Q/\pi R^2$ = skivas ladning pr flateenhet.

Et nyttig resultat: En parallelplatekondensator er to parallelle metallplater som kan tilføres like stor ladning med motsatt fortegn, $\pm Q$:



Med liten avstand d mellom platene blir

$$E \approx 2 \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\sigma = Q/A)$$

mellom platene, og

$$E \approx 0$$

utenfor platene.

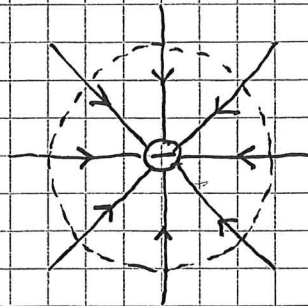
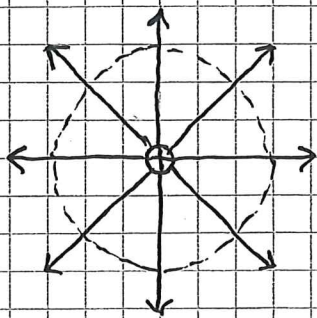
Feltlinjer for $\vec{E}$ [OS2 5.6; YF 21.6; LHL 19.6] (11)

Gir et visuelt bilde av $\vec{E}$ i området omkring ladningen(e). Retning: Feltlinjene $\parallel \vec{E}$ overalt.

Feltstyrke: $E = |\vec{E}|$ er prop. med antall feltlinjer som krysser en flate, pr flateenhet.

Eks 1: Punktladning

Feltlinjer starter / ender på pos. / neg. ladning og går radielt utover / innover:



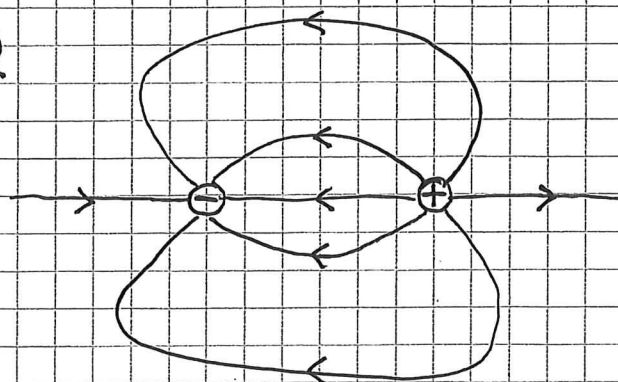
Med N feltlinjer ut/inn gjennom kuleflate med radius r og areal $4\pi r^2$ blir

feltlinjetettheten $N/A = N/4\pi r^2$

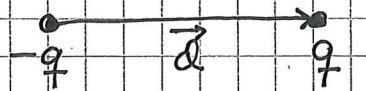
og feltstyrken $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$

på kuleflaten. Dvs, både N/A og E er prop. med $1/r^2$, slik at E er prop. med N/A , som foreskrevet.

Eks 2: Dipol



Elektrisk dipolmoment [OS2 5.7; YF 21.7; LHL 19.10] (12)

Enkel dipol,  har dipolmoment

$$\boxed{\vec{p} = q \vec{d}}$$

$$[p] = C \cdot m$$

System med flere punktladninger q_i i pos. $\vec{r}_i$:

$$\boxed{\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i}$$

Kontinuerlig ladningsfordeling:

$$\boxed{\vec{p} = \int \vec{r} dq}$$

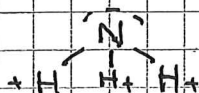
NB: Har alltid null nettoladning for en elektrisk dipol,

$$Q = \sum_i q_i = 0 \quad \text{evt} \quad Q = \int dq = 0$$

Anvendelser:

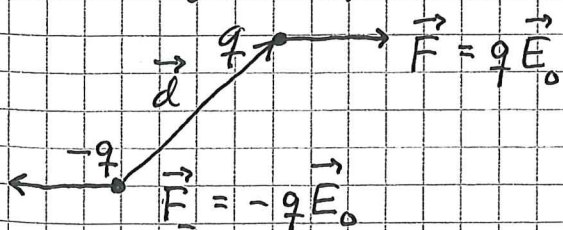
- Molekyler som H_2O , NH_3 ... er permanente el. dipoler.

$|\vec{p}|$ sier i hvor stor grad molekylet er polarisert



- Symmetri kan gi $p = 0$: $O = C = O$

- Molekylære dipoler rettes inn langs et ytre felt $\vec{E}_0$:

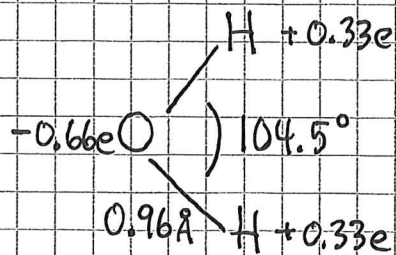


Stoffet polariseres.

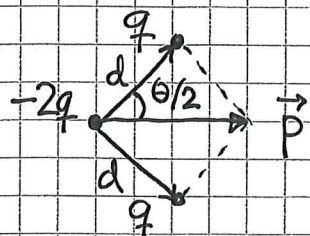
(Mer om materialers elektriske egenskaper snart!)

Eks 1: H_2O , punktladningsmodell

(13)



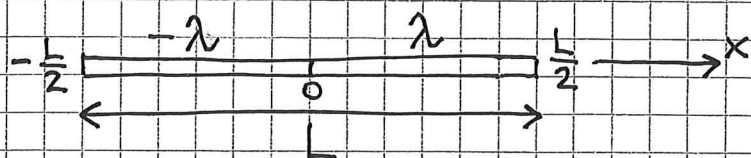
Hva er $\vec{p}$?



$$p = 2 q d \cos \frac{\theta}{2} = 2 \cdot 0.33e \cdot 0.96 \text{ Å} \cdot \cos 52.25^\circ$$

$$= \underline{0.39 \text{ e Å}} = 6.2 \cdot 10^{-30} \text{ C m}$$

Eks 2: Stabdipol



$\pm \lambda =$ ladning pr lengdeenhet

Ladningsparet $\pm dq = \pm \lambda dx$ i posisjon $\pm x$ bidrar med

$$d\vec{p} = 2 \times \lambda dx \hat{x}$$

$\Rightarrow$ Totalt dipolmoment:

$$\vec{p} = \int d\vec{p} = \int_0^{L/2} 2 \times \lambda dx \hat{x} = 2\lambda \hat{x} \int_0^{L/2} \frac{1}{2} x^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4} \lambda L^2 \hat{x}}}$$

Enhet: $[\lambda L^2] = \frac{C}{m} \cdot m^2 = C \cdot m$; OK,

$p = \frac{1}{4} \lambda L^2$ tilsvarer to punktladninger $\pm \lambda \cdot \frac{L}{2}$

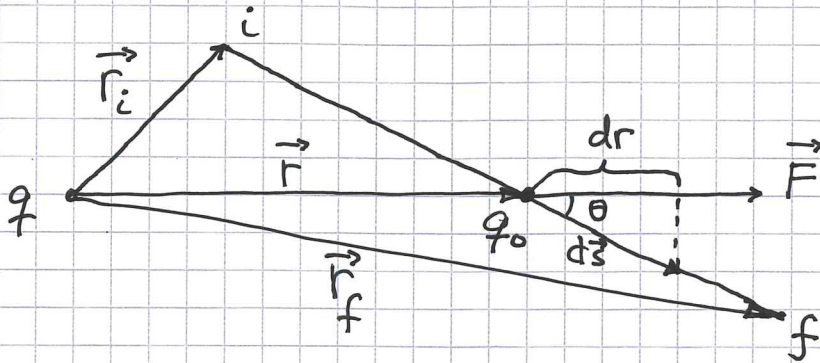
i innbyrdes avstand $L/2$; ikke ureimelig !!

Potensiell energi. Elektrisk potensial

(14)

[OS2 7.1-2 ; YF 23.1-2 ; LHL 19.9, 20.3]

Pot. energi U for ladningspar q og q_0 :



$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot d\vec{s} &= F \cdot ds \cdot \cos \theta \\ &= F \cdot dr\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_f - U_i \stackrel{\text{def}}{=} - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{r_i}^{r_f} \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r_f} - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r_i}\end{aligned}$$

Her er det da naturlig å velge $U=0$ for $r \rightarrow \infty$ slik at

$$U(r) = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r}$$

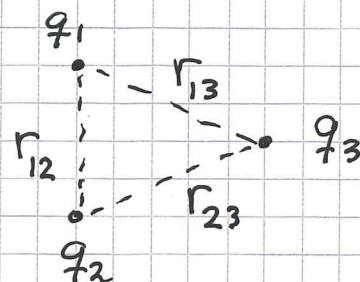
er pot. energi for ladningsparet q, q_0 i innbyrdes avstand r .

Jf. gravitasjon og massepar M og m , der M (f.eks) er jordmassen. Da var det naturlig å velge $U=0$ for avstand $r=R$ = jordradien mellom m og (sentrum av) M , slik at

$$U(r=R+h) = \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{R+h} \stackrel{h \ll R}{\approx} m \cdot \frac{GM}{R} \cdot h = mgh$$

I et system med flere ladninger vil alle q_i og q_j vekselvirke parvis og bidra med

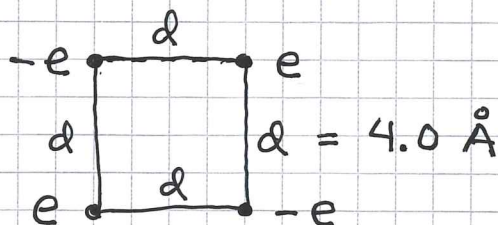
$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}}$$



til total pot. energi U , dvs

$$\begin{aligned} U &= U_{12} + U_{13} + \dots + U_{1n} \\ &\quad + U_{23} + \dots + U_{2n} + \dots + U_{n-1,n} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n U_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i < j} U_{ij} \\ &= \underline{\underline{\sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}}}}} \end{aligned}$$

Eks: Bestem U og dipolmomentet p for systemet



Løsn:

$$\begin{aligned} U &= \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 d} \left\{ 4 \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \\ &= \left[9 \cdot 10^9 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2 / 4.0 \cdot 10^{-10} \right] \cdot (-2.59) \text{ J} \\ &= \underline{\underline{-1.5 \cdot 10^{-18} \text{ J}}} \end{aligned}$$

$p = 0$ (sum av $\longrightarrow$ og $\longleftarrow$, hver med abs.verdi $e \cdot d = 4.0 \text{ eÅ}$)

Elektrisk potensial $\stackrel{\text{def}}{=}$ pot. energi pr ladningsenhet

(16)

$$\Rightarrow V = \frac{U}{q_0} ; [V] = \frac{J}{C} = V \text{ (volt)}$$

For ladd. par q, q_0 i innbyrdes avstand r :

$U = qq_0 / 4\pi\epsilon_0 r$. Punktladd. q omgir seg dermed med potensialet

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Coulombpotensialet

Potensialforskjell mellom to posisjoner f og i :

$$\Delta V = \Delta U / q_0 = - \int_i^f (\vec{F} / q_0) \cdot d\vec{s} = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

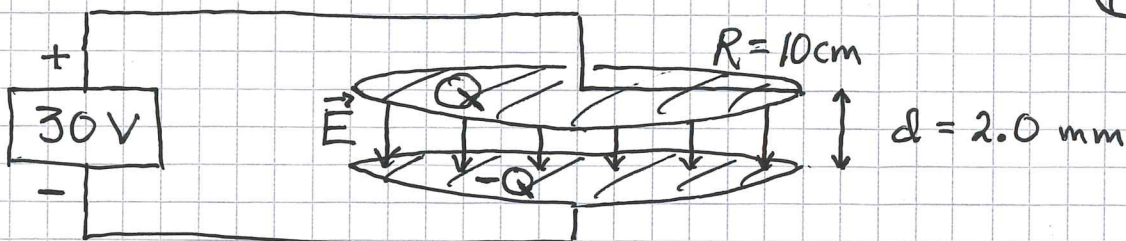
- Ser at $[E] = V/m$ (mer brukt enn N/C)
- Energienheten eV (elektronvolt) = elementærladningen e multiplisert med potensialforskjellen $1V$

$$\Rightarrow \underline{1 eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} C \cdot 1 J/C = \underline{1.6 \cdot 10^{-19} J}$$

Hensiktsmessig energienhet på atomært nivå!

Eks :

(17)



Bestem ladningen $\pm Q$ på metallplatene.

Løsn : Fra s. 10 er $E = \sigma/\epsilon_0 = Q/A\epsilon_0$ mellom platene og $E=0$ utenfor. Da blir

$$\Delta V = V_+ - V_- = - \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot d = \frac{Q \cdot d}{A \cdot \epsilon_0}$$

slik at

$$Q = \frac{\Delta V A \epsilon_0}{d} = \frac{30V \cdot \pi \cdot (0.10m)^2 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2}{2.0 \cdot 10^{-3} m}$$

$$= 4.2 \cdot 10^{-9} C = \underline{\underline{4.2 nC}}$$

Siden $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$, peker $\vec{E}$ i retning lavere potensial.

Vi vet fra før at $\vec{E}$ har retning fra pos. ladn. mot neg. ladn.

Dermed må det være høyere potensial ved pos. ladn. enn ved neg. ladn. i et system.

I eks. ovenfor: 30 V høyere pot. på pos. ladd plate enn på neg. ladd plate.

Beregning av $\vec{E}$ fra V [OS2 7.4; YF 23.5; LHL 19.9] (18)

$$\begin{array}{ccc} \vec{r} & \xrightarrow{d\vec{s}} & \vec{r} + d\vec{s} \\ V & & V + dV \end{array}$$

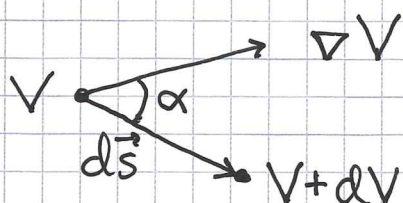
$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\ &= \left\{ \hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} \right\} \cdot \{ \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz \} \\ &= \underbrace{\nabla V} \cdot d\vec{s} \\ &= \text{gradienten til } V \end{aligned}$$

Dessuten er $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$

Da må vi ha sammenhengen

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

Tolkning av vektoren ∇V :



$$\begin{aligned} dV &= \nabla V \cdot d\vec{s} \\ &= |\nabla V| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

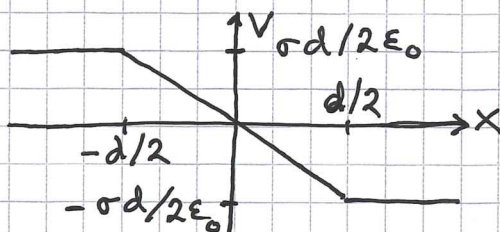
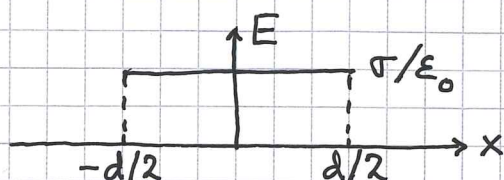
$\Rightarrow$ Får max. potensialendring dV når forflytningen $d\vec{s}$ foretas i samme retning som ∇V .

Dvs: ∇V er vektor som peker i den retningen som V øker raskest, og da er $|\nabla V|$ endringen i V pr lengdeenhet. Samtidig er $|\vec{E}| = |\nabla V|$.

Eks: Bestem $\vec{E}(x)$ og $V(x)$ mellom to store plater i $x = \pm d/2$ med ladning hver $\mp \sigma$ pr flateenhet. Velg $V=0$ i $x=0$.

Løsn: For $|x| < d/2$ er $\vec{E} = \hat{x} \sigma/\epsilon_0$, og dermed $dV/dx = -\sigma/\epsilon_0$, dvs $V(x) = -\sigma x/\epsilon_0$.

Utenfor platene, $|x| > d/2$, er $E=0$, og dermed $V=\text{konstant}$.

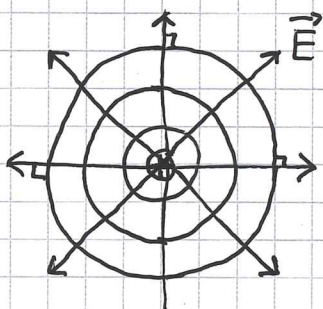


Equipotensialflater [OS2 7.5; YF 23.4; LHL 19.11]

er flater med $V = \text{konst}$. Hvis $d\vec{s}$ er en forflytning på en equipotensialflate, er $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$, dvs $\vec{E} \perp d\vec{s}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} \perp \text{equipotensialflatene}}$$

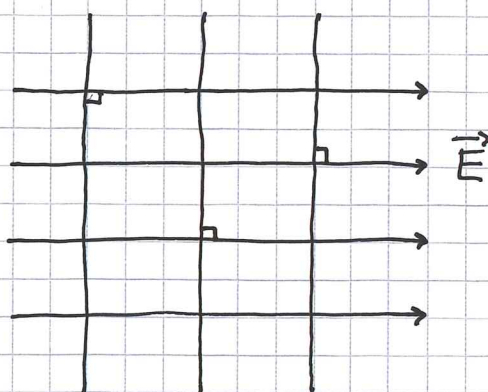
Eks 1: Punktladning



$\vec{E}$ radielt

$\Rightarrow$ equipot. flater er kuleskall

Eks 2: Uniformt $\vec{E}$ -felt



$\dots V_0 \quad V_0 - \Delta V \quad V_0 - 2\Delta V \dots$

equipot. flater er plan
normalt på $\vec{E}$

Materialers elektriske egenskaper

(20)

Ledere. Metaller [OS2 7.5; YF 22.5; LHL 19.8]

Har frie ladninger (typisk 1 eller 2 frie elektroner pr atom i et metall) som vil settes i bevegelse hvis de utsettes for en nettokraft.

Dermed, i elektrostatisk likevekt :

- $\vec{E} = 0$ inni et metall.

$\vec{E} \neq 0$ ville gi kraft $\vec{F} = -e\vec{E}$ på de frie elektronene, og dermed ikke likevekt.

- All netto ladning ligger på overflaten av et metall.

Ikke uten videre opplagt! Skyldes at $F(r) \sim 1/r^2$.

Se evt. Gauss' lov (ikke pensum).

- På overflaten til et metall (med nettoladning) står $\vec{E}$ normalt på overflaten.

$E_{||} \neq 0$ ville gi kraft $F_{||} = -eE_{||}$ på de frie elektronene.

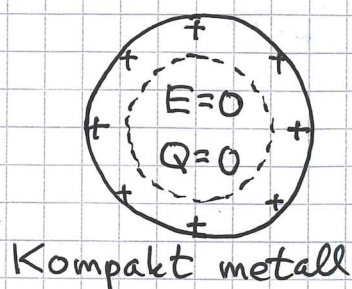
$E_{\perp} = \sigma/\epsilon_0$; σ = overflatens ladn. pr flateenhet.

- Et stykke metall i likevekt er et ekvipotensial.

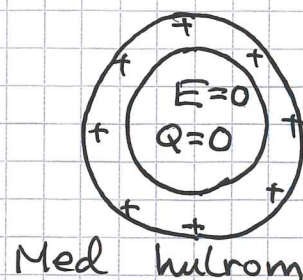
$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$; inni er $\vec{E} = 0$ og på overflaten er $\vec{E} \perp d\vec{s}$.

- Metall med hulrom har $E=0$ i hulrommet og all nettoladning på ytre overflate.

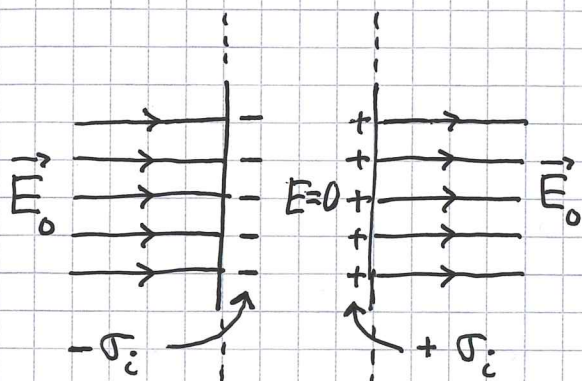
Bevis:



Ta bort en bit inni. Dette påvirker ingen nettoladning!

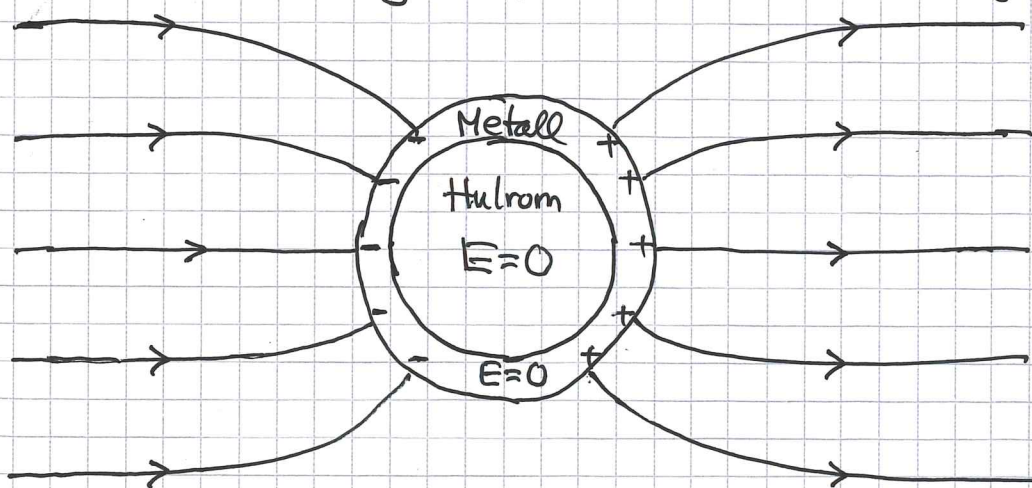


Eks 1: Metallskeiv i uniformt ytre felt $\vec{E}_0$



Ytre felt $\vec{E}_0$ trekker frie elektroner til venstre overflate. Likevekt når induisert overflateledning er $\pm \sigma_i$ med $\sigma_i = \epsilon_0 E_0$. Tilhørende induisert felt er da $\vec{E}_i = -\vec{E}_0$, og totalt felt inni er $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i = 0$.

Eks 2: Faradaybur; elektrostatisk skjerming

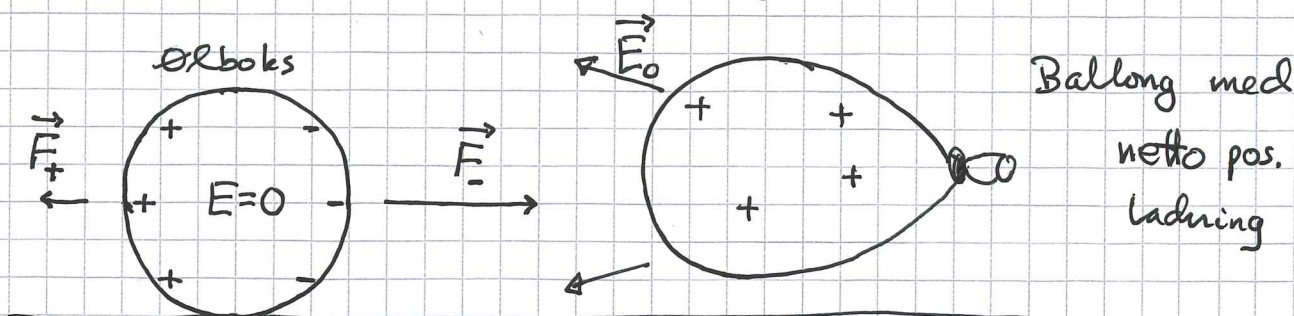


Ytre felt $\vec{E}_0$
(Totalt felt $\vec{E}$ blir forskjellig fra $\vec{E}_0$ nær metallboksen.)

Med uniformt ytre felt $\vec{E}_0$ blir det null nettokraft på metallboksen.

Eks 3: Metallboks i inhomogent felt

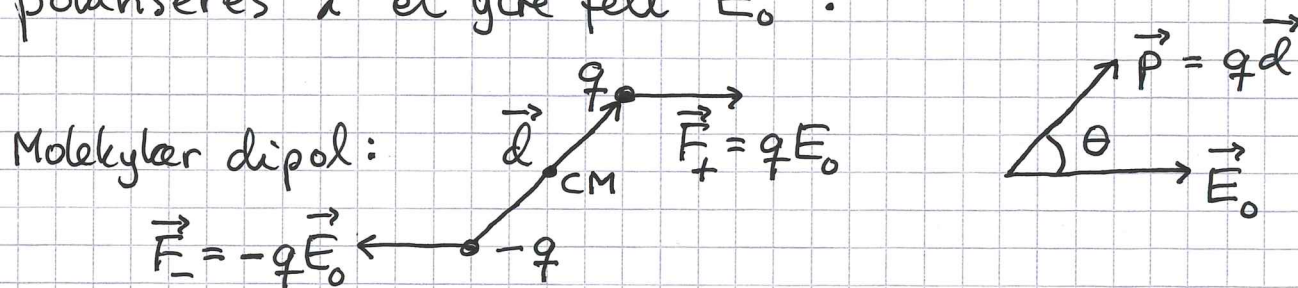
(22)



Pga kortere avstand til ølboksens negative ladning blir $F_- > F_+$, og dermed en netto tiltrekkende kraft.

Dielektrikum. Isolator [OS2 8.5; YF 24.4-5; LHL 20.5]

Har ikke frie elektroner, men bundet ladning som polariseres i et ytre felt $\vec{E}_0$:



Dreiemoment på dipolen:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = \dots \text{øvring} \dots = \vec{p} \times \vec{E}_0$$

Pot. energi:

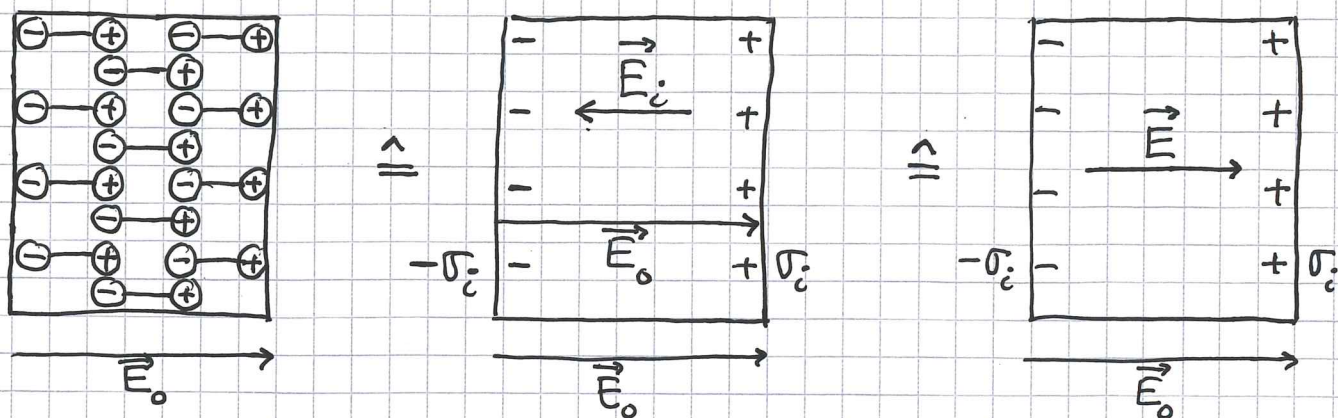
$$U = - \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int \tau d\theta = \dots = - \vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

(der vi valgte $U=0$ for $\theta = \pm \pi/2$, dvs $\vec{p} \perp \vec{E}_0$)

Dermed: En tendens til innretting av molekylære dipolmoment i samme retning som det ytre feltet $\vec{E}_0$.

Makroskopisk effekt:

(23)



- Får induert ladning $\pm \sigma_i$ pr flateenhet på overflaten
- Null nettoladning inni isolatoren
- Det induerte feltet inni isolatoren, $E_i = \sigma_i / \epsilon_0$, gir et svekket totalt felt inni: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$; $E = E_0 - E_i$
- Antar lineær respons: E_i prop. med E_0 , og dermed E prop. med E_0
- Definerer isolatorens relative permittivitet:

$$\epsilon_r = E_0 / E ; \quad \text{dvs } E = E_0 / \epsilon_r \quad (\epsilon_r \geq 1)$$

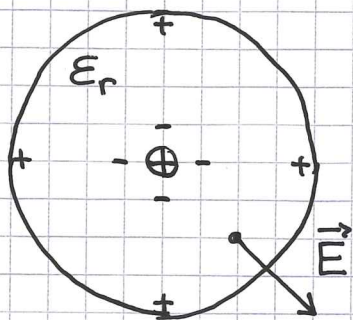
Tallverdier:

Stoff	Vakuum	Tørr luft	Plast	Rent vann	Perfekt metall
ϵ_r	1	1.00054	2-6	80	∞

- Definerer isolatorens permittivitet:

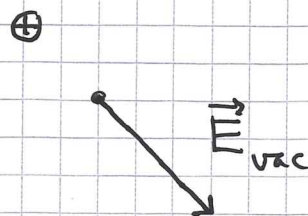
$$\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$$

- Ladning q omgitt av isolator gir svekket felt inni isolatoren pga industert ladning og industert motsatt rettet felt:



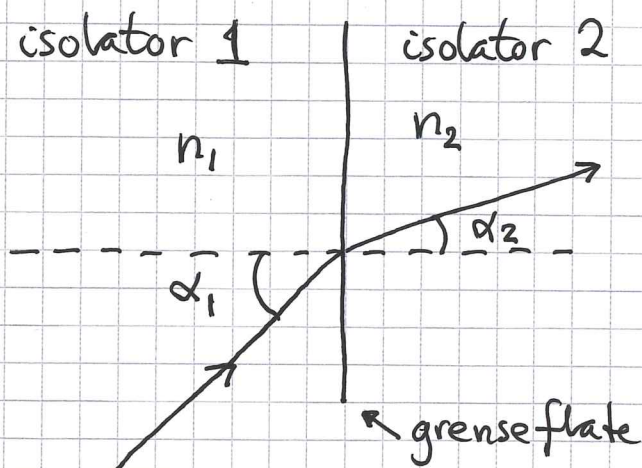
$$E(r) = q / 4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2$$

$$= q / 4\pi \epsilon r^2$$



$$E_{vac}(r) = q / 4\pi \epsilon_0 r^2$$

- Lysfarten i isolator: $v = c / \sqrt{\epsilon_r} < c$
($c = 299792458 \text{ m/s}$ = lysfarten i vakuum)
- Lysbrytning i grenseflate mellom to isolatorer:



$$n = \sqrt{\epsilon_r} = \text{brytningsindeks}$$

Snells lov:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

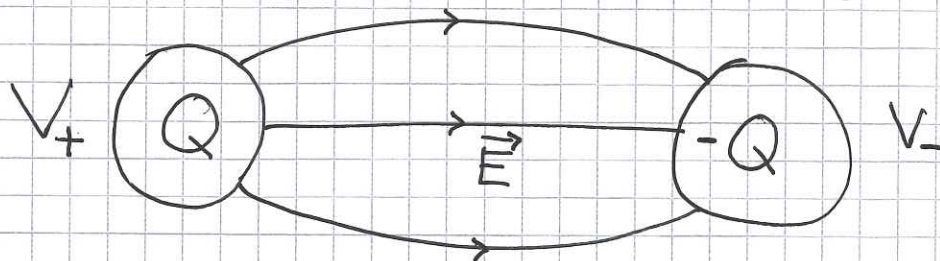
* Grunnlag for mikroskop, teleskop etc ($n \approx 1.5$ i glass, for synlig lys).

* I vann er $n = 1.33$ for rødt lys og $n = 1.35$ for blått lys. Gir regnbue!

Kondensator og kapasitans [OS2 8; YF 24; LHL 20] (25)

(capacitor) (capacitance)

En kondensator består av to ledere adskilt av en isolator; anta at lederne ~~er~~ er tilført en nettoladning $\pm Q$:



Potensialforskjellen, evt. spenningen, mellom lederne:

$$V = V_+ - V_- = - \int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Siden $\vec{E}$ er prop. med Q (Coulombs lov), er også V prop. med Q :

$$\boxed{C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q}{V}} = \text{kondensatorens kapasitans}$$

• Enhet: $[C] = C/V = F$ (farad)

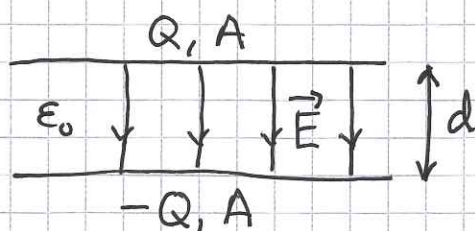
• Kretssymbol:

• Kan lagre ladning og energi

• C avhenger av utforming (geometri) og type isolator mellom lederne. C avhenger ikke av Q eller V .

• Beregner C ved å anta ladning $\pm Q$ og regne ut V (evt. via $\vec{E}$); da er $C = Q/V$.

Eks 1: Luftfylt platekondensator



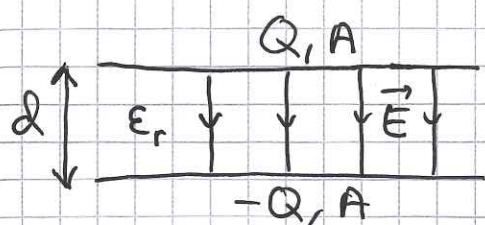
$$E = \sigma/\epsilon_0 = Q/A\epsilon_0$$

$$V = Ed = Qd/A\epsilon_0$$

$$\Rightarrow \underline{C = \epsilon_0 A/d}$$

Med $d = 2.0 \text{ mm}$ og $A = \pi \cdot (0.10 \text{ m})^2$ er $\underline{C \approx 0.14 \text{ nF}}$

Eks 2: Platekondensator fylt med dielektrikum



$$E = \sigma/\epsilon = Q/A\epsilon_r\epsilon_0$$

$$V = Ed = Qd/A\epsilon_r\epsilon_0$$

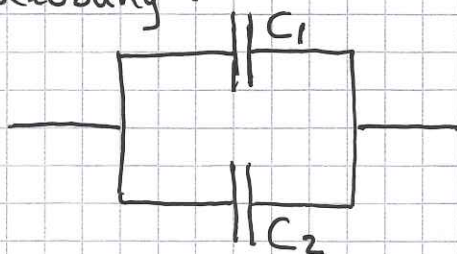
$$\Rightarrow \underline{C = \epsilon_r \epsilon_0 A/d}; \text{ dvs } C \text{ økes med faktoren } \epsilon_r$$

Vi ser nå at $[\epsilon] = \text{F/m}$; dvs $\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

Kobling av flere kapasitanser [OS2 8.2; YF 24.2; LHL 20.2]

Parallellkobling:

Hvis

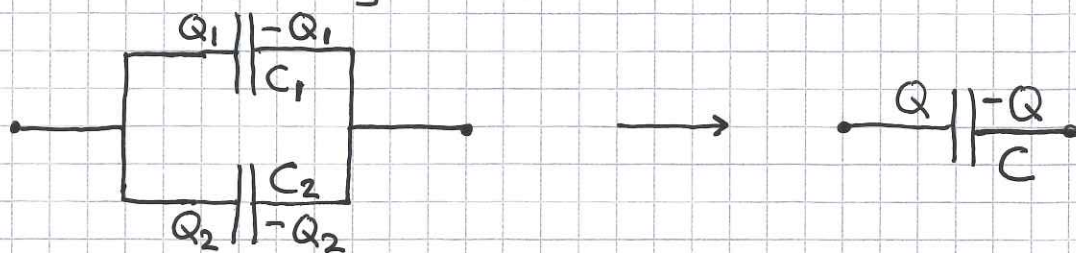


skal erstattes av



og oppføre seg likt, hva må da C være?

Vi har lik spenning, $V_1 = V_2 = V$, over C_1 og C_2 : (27)



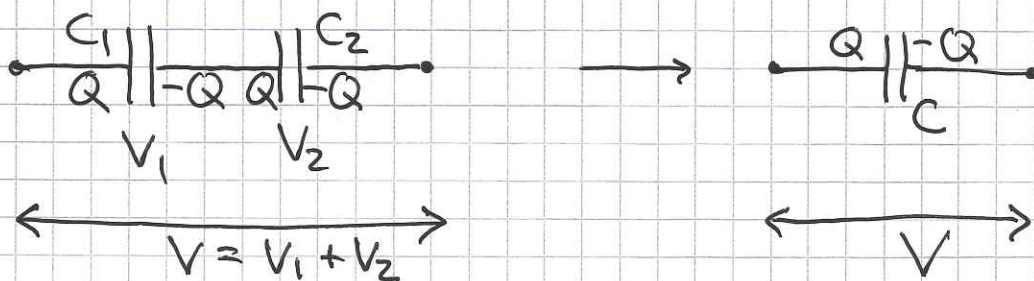
Dvs: $V = Q_1 / C_1 = Q_2 / C_2 = Q / C$ og $Q_1 + Q_2 = Q$

$\Rightarrow C_1 V + C_2 V = C V \Rightarrow \boxed{C = C_1 + C_2}$

Med N stk. koblet i parallell: $\boxed{C = \sum_{j=1}^N C_j}$

Seriekobling: Hvis $\text{---} \overset{C_1}{\parallel} \text{---} \overset{C_2}{\parallel} \text{---}$ skal erstattes av $\text{---} \overset{C}{\parallel} \text{---}$, hva må da C være?

Vi har nå lik ladning $\pm Q$ på C_1 og C_2 :

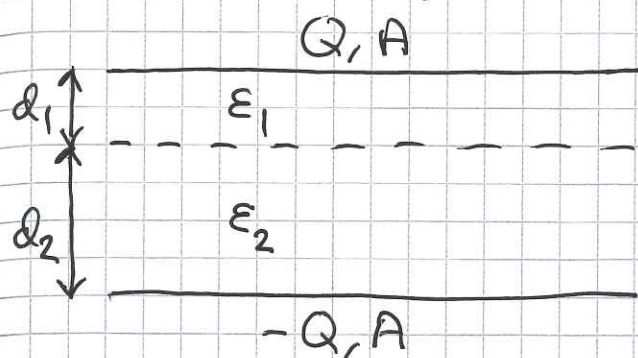


$\Rightarrow \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$

Med N stk koblet i serie:

$\boxed{C^{-1} = \sum_{j=1}^N C_j^{-1}}$

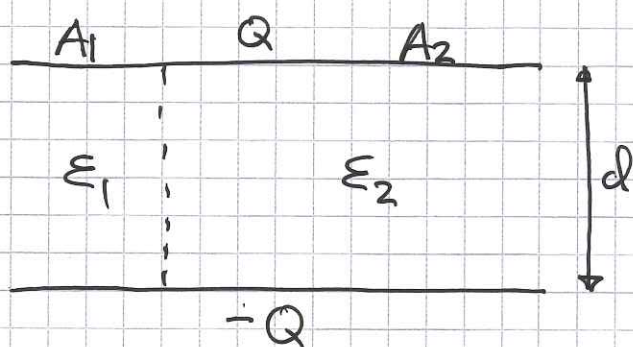
En kondensator fylt med ulike dielektrika blir som en parallell- eller seriekobling:



$$C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$$

med

$$C_j = \epsilon_j A / d_j \quad ; \quad j=1,2$$



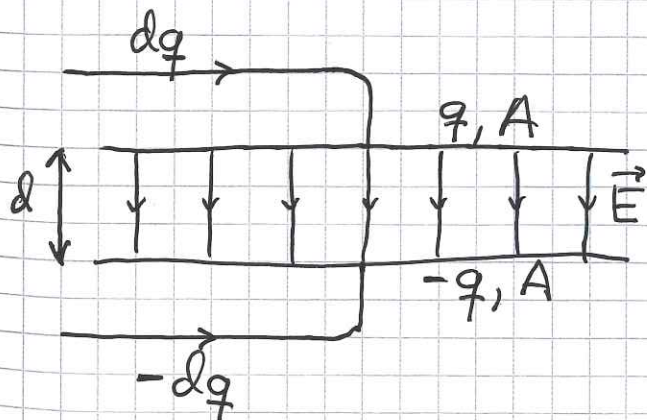
$$C = C_1 + C_2$$

med

$$C_j = \epsilon_j A_j / d \quad ; \quad j=1,2$$

Energi lagret i $\vec{E}$ -felt [OS2 8.3; YF 24.3; LHL 20.4]

Opplading av kondensator fordrer et arbeid W , som tilsvarende pot. energi U lagret i $\vec{E}$ -feltet mellom platene.



En økning av ladningen, fra $\pm q$ til $\pm (q + dq)$, gir en økning i lagret potensiell energi:

$$dU = v(q) dq = \frac{q}{C} dq$$

Opplading fra $q=0$ til $q=Q$ gir pot.energi

(29)

$$U = \int dU = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2$$

Med $C = \epsilon_0 A/d$ og $V = Ed$ gir dette

$$U = \frac{1}{2} (\epsilon_0 A/d) (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot (Ad)$$

der $A \cdot d =$ volumet mellom platene, dvs der $E \neq 0$.

Tolkning:

Energien pr volumenhets i det elektriske feltet er

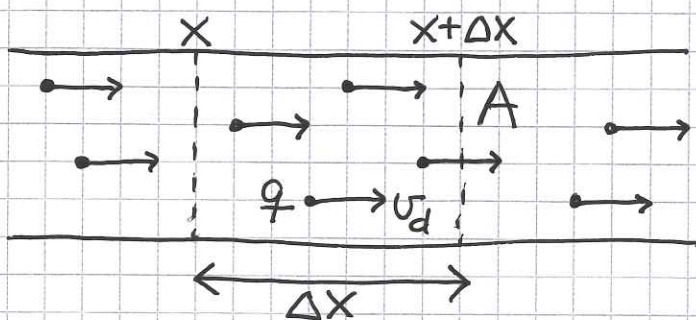
$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Et resultat som gjelder generelt.

ELEKRISK STRØM [OS2 9,10; YF 25,26; LHL 21,22] (30)

Strøm og strømtethet [OS2 9.1-2; YF 25.1; LHL 21.1]

Ser på leder med n frie ladninger pr volumenhet, med midlere driftshastighet v_d langs lederen:



(Merk: Lederen er typisk elektrisk neutral.)

strøm def = mengde ladning som passerer tverrsnitt av lederen pr tidsenhet

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dQ}{dt}$$

$$\text{Enhet: } [I] = C/s = A \text{ (ampere)}$$

All fri ladning $\Delta Q = q \cdot \Delta N = q \cdot n \cdot \Delta V$ i volumet $\Delta V = A \cdot \Delta x$ passerer tverrsnittet ved $x + \Delta x$ i løpet av tiden $\Delta t = \Delta x / v_d$

$$\Rightarrow I = q n A \Delta x / (\Delta x / v_d) = n q v_d A$$

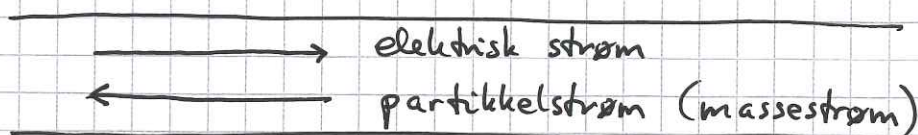
Strømtethet def = strøm pr flateenhet

$$j = I/A = n q v_d \quad \text{med enhet } [j] = A/m^2$$

altså $\boxed{\vec{j} = n q \vec{v}_d}$

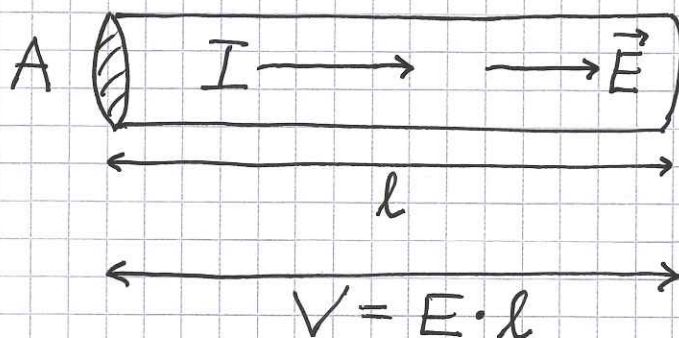
I metaller er $q = -e$: $\vec{j} = -ne\vec{v}_d$

(31)



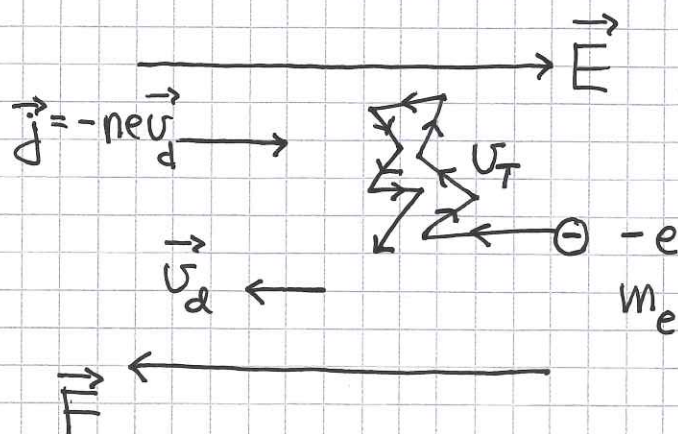
Ohms lov [OS2 9.2-4; YF 25.2, 25.6; LHL 21.2, 21.4]

En spenning V over en leder med lengde l og tverrsnitt A gir et felt $\vec{E}$ i ledere, og dermed en kraft $\vec{F} = -e\vec{E}$ på frie elektroner i ledere, og dermed en strøm I i ledere :



$$j = I/A$$

De frie elektronene akselereres pga $\vec{F}$, men pga kollisjoner oppnår de bare en viss midlere driftshastighet $\vec{v}_d$ langs ledere :



d = midlere avstand mellom kollisjoner

$\tau = d/v_T$ = midlere tid mellom kollisjoner

v_T = midlere elektronfart ved temperatur T

$\vec{v}_d \approx \vec{a} \cdot \tau \stackrel{N2}{=} -\frac{e\vec{E}}{m_e} \cdot \tau$ = midlere driftshastighet

Dermed: $\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}}$

med

$\sigma = ne^2\tau/m_e$ = materialets konduktivitet
(elektrisk ledningsevne)

Dette er Ohms lov, på mikroskopisk form, i henhold til Drude-modellen (Paul Drude, ca 1900)

Med $j = I/A$ og $E = V/l$ fås

$$\boxed{V = RI}$$

Ohms lov

med motstand (resistans) $R = l/\sigma A$

Konduktans G : $I = G \cdot V \Rightarrow G = \sigma A/l = R^{-1}$

Resistivitet ρ : $\rho = \sigma^{-1}$

Enheder: $[R] = V/A = \Omega$ (ohm)

$[G] = \Omega^{-1} = S$ (siemens)

$[\rho] = \Omega m$; $[\sigma] = \Omega^{-1} m^{-1} = S/m$

Merk at σ og ρ er materialegenskaper.

G og R avhenger også av størrelse / utforming.

Kretssymbol: $\boxed{R}$ eller  R

RMS-hastighet vs driftshastighet

(33)

Ved absolutt temperatur T bidrar hvert kvadratiske ledd i energifunksjonen med $\frac{1}{2}k_B T$ pr partikkel. (Ekuipartisjonsprinsippet.) Her er $k_B \approx 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$; Boltzmanns konstant. For elektroner:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m_e \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = 3 \cdot \frac{1}{2} k_B T$$

$$\Rightarrow v_T = v_{RMS} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3k_B T / m_e} \sim 10^5 \text{ m/s ved } 300\text{K}$$

Driftshastigheten v_d er typisk mye mindre enn v_T ; la oss gjøre et estimat med en kobberledning med tverrsnitt 1.5 mm^2 og strømstyrke 1 A . Cu har molar masse 63 g og massetetthet ca 9 g/cm^3 . Med 1 fritt elektron pr Cu-atom blir det da ca 10^{29} frie elektroner pr m^3 ,

$$\frac{9 \cdot 10^6 \text{ g/m}^3}{63 \text{ g/mol}} = \frac{10^6}{7} \cdot 6 \cdot 10^{23} \text{ el./m}^3 \approx 10^{29} \text{ el./m}^3$$

Dermed:

$$v_d = j / n \cdot e = I / A \cdot n \cdot e = (1 / 1.5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{29} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}) \text{ m/s} \\ \approx 10^{-4} \text{ m/s}$$

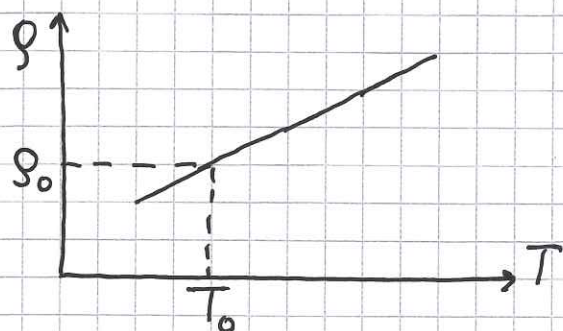
Dvs: $v_d / v_T \lesssim 10^{-9} \quad !!$

Resistivitet og temperatur [OS2 9.3; YF 25.2; LHL 21.2+5] (34)

Drudemodellen: $\rho = \frac{m_e}{e^2 n \tau} \sim \frac{1}{n \tau}$

Metaller: Cu, Al, Ag, Fe, ...

Stor n som avhenger lite av T . Hyppigere kollisjoner når T øker, dvs mindre τ og større ρ . Exp. gir lineær $\rho(T)$:



$$\rho(T) = \rho_0 \{ 1 + \alpha \cdot (T - T_0) \}$$

$$\alpha \approx 0.004 \text{ K}^{-1} \text{ for Cu, Al, Ag}$$

Halvledere: Si, Ge, GaAs, GaN, ...

Isolator med $n \approx 0$ ved $T \approx 0$. Økt T gjør at elektroner løsrives og n øker sterkt; dermed avtar ρ med økende T . (Også forurensningsatomer - doping - øker n og reduserer ρ .)



Viktige anvendelser:

Solceller: Fotoner med energi hf ($h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} =$ Plancks konstant; $f =$ lysets frekvens) absorberes av elektroner i halvlederen; disse blir frie elektroner som gir elektrisk strøm.

Lysemitterende dioder (LED): Frie elektroner i halvlederen fanges i tilstander med lavere energi ("hull"); frigjort energi sendes ut som fotoner.

Eks:

$(\text{Al}_x \text{Ga}_{1-x})\text{As}$ $\lambda = 560 - 870 \text{ nm}$ (gult - rødt)

$(\text{In}_x \text{Ga}_{1-x})\text{As}$ $\lambda = 360 - 620 \text{ nm}$ (blått - gult)

$\Rightarrow$ Kan kombineres og gi hvitt lys med LED-pærer.

(Nobelpriis fysikk 2014)

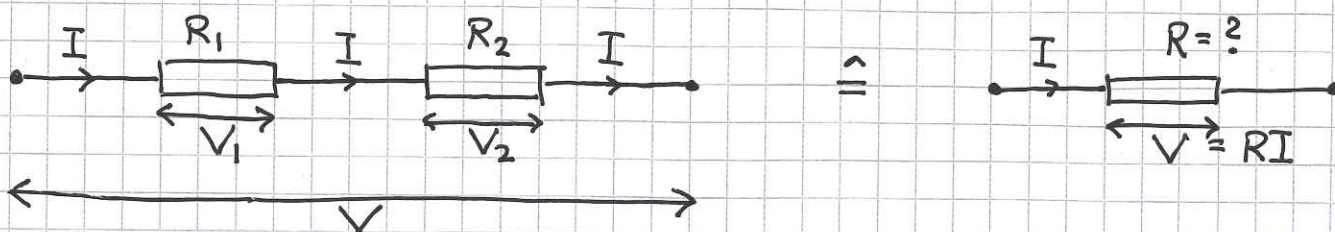
$(\lambda = c/f = \text{lysets bølgelengde}; \quad c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s})$

Kobling av flere motstander

(36)

[OS2 10.2; YF 26.1; LHL 21.3]

Seriekobling:



Lik strøm I gjennom R_1 og R_2 , og $V = V_1 + V_2$ gir

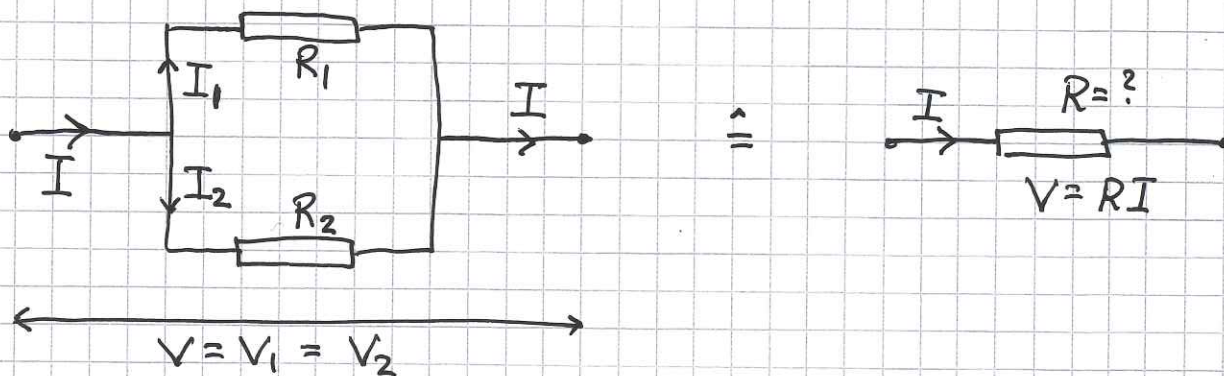
$$V = R_1 I + R_2 I = RI, \text{ dvs}$$

$$\boxed{R = R_1 + R_2}$$

Med N stk i serie:

$$\boxed{R = \sum_{j=1}^N R_j}$$

Parallellkobling:



Lik spenning over R_1 og R_2 , og $I = I_1 + I_2$ gir

$$\frac{V}{R} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}, \text{ dvs}$$

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Med N stk i parallell:

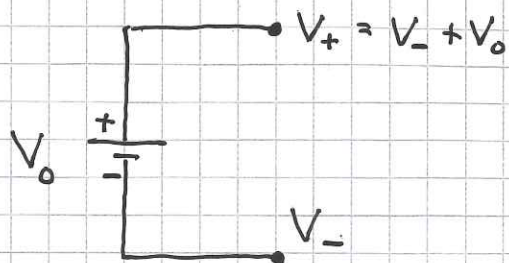
$$\boxed{R^{-1} = \sum_{j=1}^N R_j^{-1}}$$

Likestrømkretser [OS2 10; YF 26 (25); LHL 22]

37

DC = direct current = likestrøm

Likespenningskilde :



Sørger for konstant spenning
 $V_0 = V_+ - V_-$ mellom polene.

Eks: Kjemisk batteri, solcelle

Kirchhoffs lover (regler) [OS2 10.3; YF 26.2; LHL 22.3]

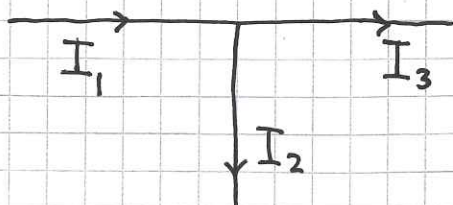
K1: Knutepunktregel (Strømregel)

Ladning hoper seg ikke opp på ulike steder i en elektrisk krets. (Med unntak av platen i en kondensator.)

Da må netto strøm inn mot et knutepunkt være lik netto strøm ut av knutepunktet.

$$\boxed{\sum_j I_j = 0 \quad \text{i alle knutepunkt i el. krets}} \quad K1$$

Eks:



Velg f.eks. positivt
fortegn inn og negativt
fortegn ut.

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$\underbrace{I_1}_{\text{inn}} = \underbrace{I_2 + I_3}_{\text{ut}}$$

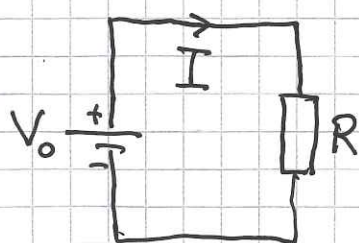
K2: Sløferegel (Spenningsregel)

(38)

På et gitt sted i en el. krets må en ladning ha en entydig potensiell energi. Dvs, potensialet på ethvert sted må være entydig. Da må summen av alle potensialendringer rundt enhver lukket sløkke være null.

$$\boxed{\sum_j V_j = 0 \text{ rundt alle sløyfer i el. krets}} \quad K2$$

Eks 1: Ideell spenningskilde og motstand

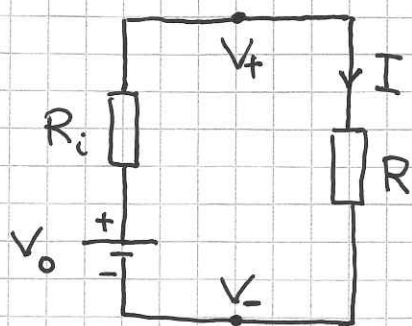


Velg f.eks. pos. fortegn på potensialskninger.

$$\Rightarrow V_0 - RI = 0$$

$$\Rightarrow I = V_0 / R$$

Eks 2: Reell spenningskilde har indre motstand R_i



$$V_0 - R_i I - RI = 0$$

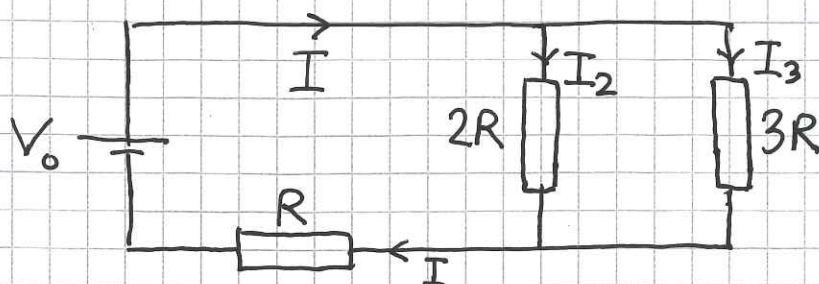
$$\Rightarrow I = \frac{V_0}{R_i + R}$$

Spennning over ytre krets R : $V_+ - V_- = V_0 - R_i I < V_0$
når $I > 0$

Gamle batterier: Større og større R_i

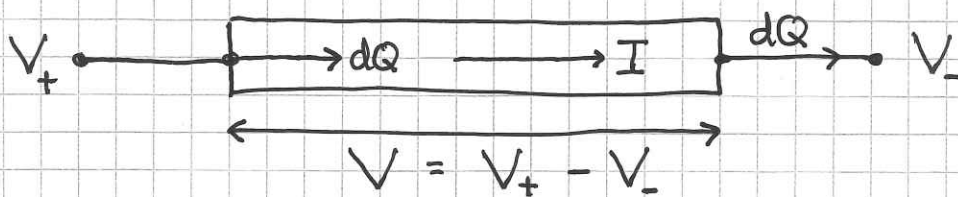
$\Rightarrow$ Mindre og mindre polspenning $V_+ - V_-$
når $I > 0$

Eks 3:



$$V_0 = I \cdot R_{\text{tot}} ; R_{\text{tot}} = R + \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{3R} \right)^{-1} = \frac{11}{5} R$$

$$\Rightarrow I = \frac{5V_0}{11R} , I_2 = \frac{3}{5} I = \frac{3V_0}{11R} , I_3 = \frac{2}{5} I = \frac{2V_0}{11R}$$

(Lik spenning over $2R$ og $3R$.)Elektrisk effekt [OS2 9.5 ; YF 25.5 ; LHL 22.2]Energi som følger med ladning dQ inn i lederbiten:

$$dU_{\text{inn}} = V_+ \cdot dQ$$

Energi ut med dQ ved potensial V_- :

$$dU_{\text{ut}} = V_- \cdot dQ$$

Differansen omdannes til varmeenergi i lederbiten. Effekttap:

$$\underline{P} = \frac{dU}{dt} = \frac{dU_{\text{inn}} - dU_{\text{ut}}}{dt} = (V_+ - V_-) \frac{dQ}{dt} = \underline{\underline{VI}}$$

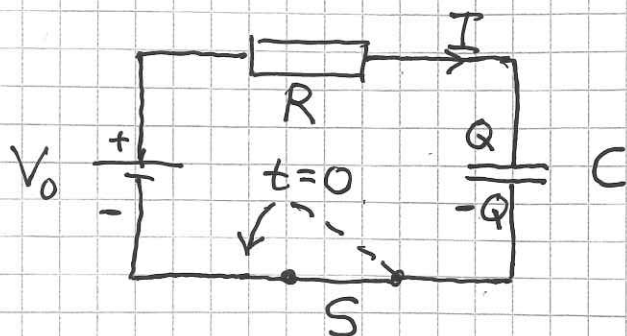
Hvis ohmsk motstand : $V = RI$

Da er: $P = VI = RI^2 = V^2/R$

RC-kretser [OS2 10.5; VF 26.4; LHL 22.4]

(40)

Opplading av kondensator i RC-krets:



- $Q=0$, $I=0$ inntil $t=0$
- Bryter S lukkes ved $t=0$
- Finn $Q(t)$ og $I(t) = dQ/dt$

$$K2: V_0 - RI - \frac{Q}{C} = 0$$

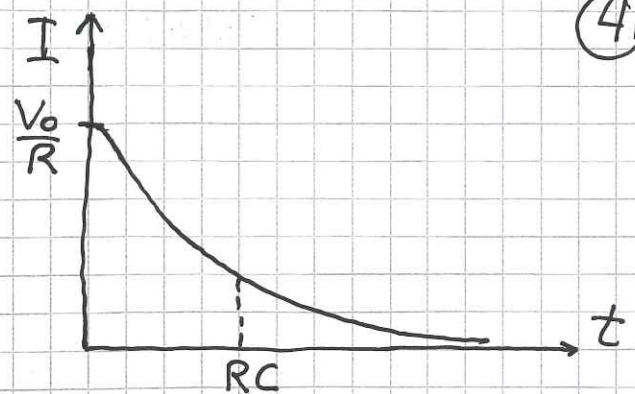
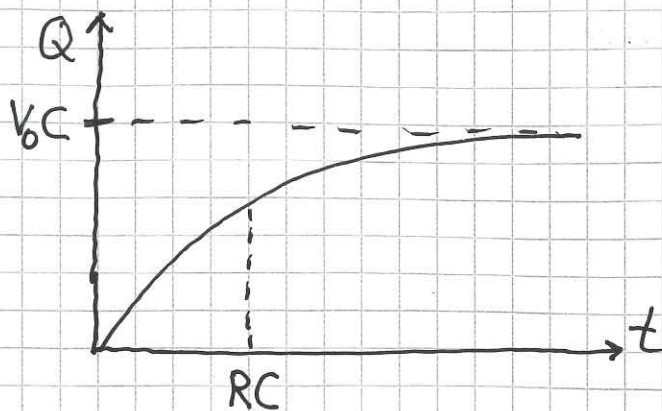
$$\Rightarrow -RC \frac{dQ}{dt} = Q - V_0 C$$

$$\Rightarrow \int_0^Q \frac{dQ}{Q - V_0 C} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln \left\{ \frac{Q - V_0 C}{-V_0 C} \right\} = - \frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow Q(t) = V_0 C \left\{ 1 - e^{-t/RC} \right\}$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$



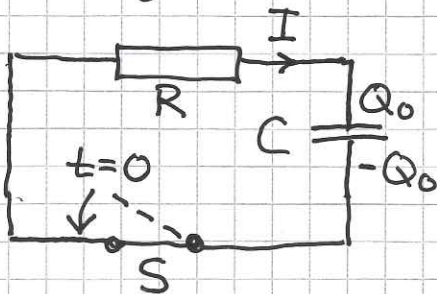
Produktet RC angir en tidsskala for opplading av kondensatoren i en RC -krets.

Kalles kretsens tidskonstant : $\tau = RC$

$$Q(\tau) = V_0 C (1 - 1/e) \approx 0.63 V_0 C ; Q(3\tau) \approx 0.95 V_0 C$$

$$I(\tau) = \frac{V_0}{R} \cdot \frac{1}{e} \approx 0.37 \frac{V_0}{R} ; I(3\tau) = 0.05 \frac{V_0}{R}$$

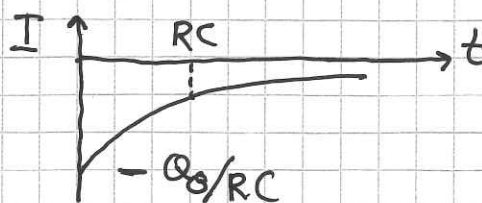
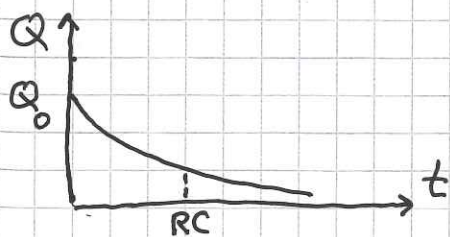
Utlading av oppladet kondensator:



- Før $t=0$: $Q=Q_0$; $I=0$
- Lukker S ved $t=0$
- Finn $Q(t)$ og $I(t)$

$$K2: -Q/C - R dQ/dt = 0 \Rightarrow \int_{Q_0}^Q \frac{dQ}{Q} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} ; I(t) = -(Q_0/RC) e^{-t/RC}$$



Anvendelser: Blinklys, Blitz,

Magnetostatikk [OS2 11,12 ; YF 27,28 ; LHL 23] (42)

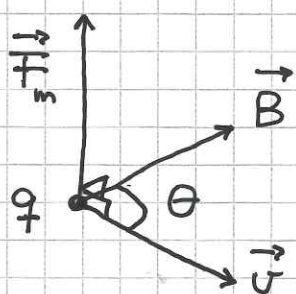
Magnetisk kraft [OS2 11.2 ; YF 27.2 ; LHL 23.4]

En elektrisk strøm omgir seg med et magnetfelt $\vec{B}$.

Gir magnetisk kraft

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$$

på ladning q i bevegelse med hastighet $\vec{v}$.

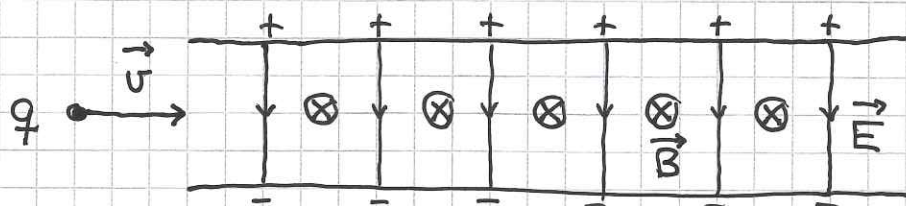


$$F_m = q v B \sin \theta$$

$$\vec{F}_m \perp \vec{B}, \quad \vec{F}_m \perp \vec{v}$$

$$[B] = \frac{N}{C \cdot m/s} = \frac{N}{A \cdot m} = T \quad (\text{tesla})$$

Eks: Krysset $\vec{E}$ - og $\vec{B}$ -felt



$\otimes$ inn i planet

$\odot$ ut av —||—

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B}$$

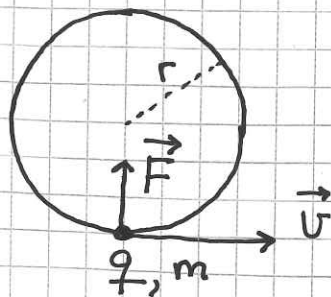
(= Lorentz kraften)

$$q > 0 \Rightarrow \vec{F}_e \text{ ned}, \quad \vec{F}_m \text{ opp}$$

$\Rightarrow$ Ingen avbryning ($F=0$) hvis $v = E/B$.

Ladning i uniformt $\vec{B}$ -felt [OS2 11.3; YF 27.4; LHL 23.1+4] (43)

$\vec{B} \otimes$
(inn i planet)



Anta $\vec{v} \perp \vec{B}$

$$\Rightarrow F = qvB$$

Tilført effekt: $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$

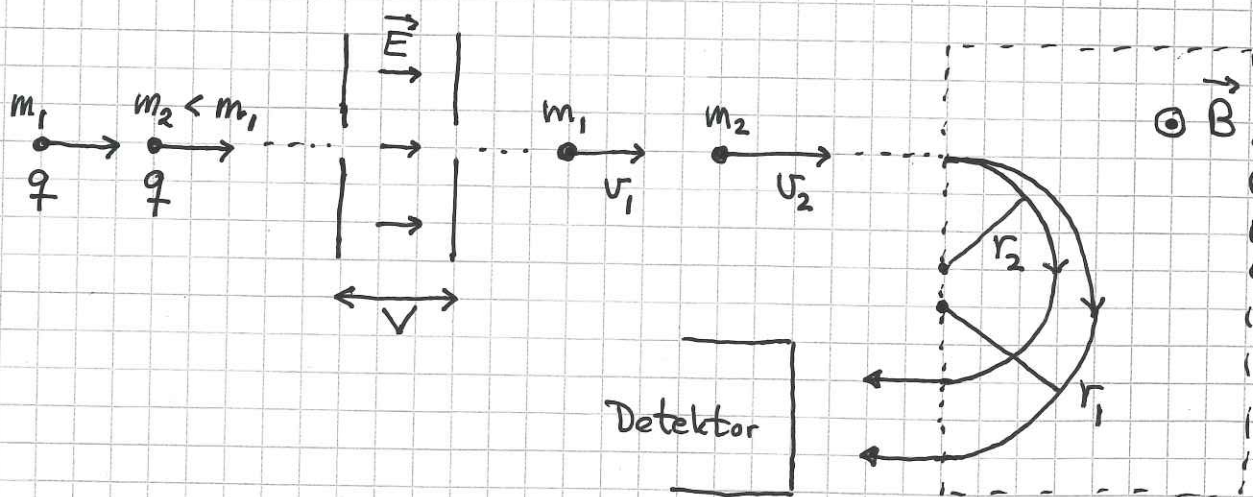
Dvs: Magnetisk kraft kan ikke gjøre et arbeid.

$\Rightarrow K = \frac{1}{2}mv^2 = \text{konstant} \Rightarrow$ uniform sirkelbevegelse

$$N2: qvB = mv^2/r \Rightarrow r = mv/qB$$

$$\Rightarrow \omega_c = v/r = qB/m = \text{syklotronfrekvensen}$$

Eks: Massespektrometer [OS2 11.7; YF 27.5] (Ør.12)

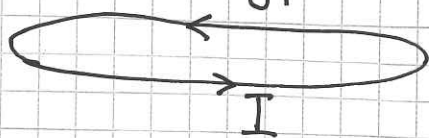


$\Rightarrow$ Separasjon av ulike isotoper med lik ladning q men ulik masse m_1 og m_2 .

Biot-Savarts lov [OS2 12.1; YF 28.2; LHL 23.5]

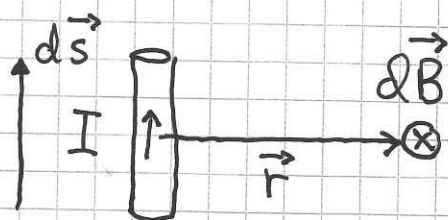
(44)

Strømsløyfe



$$\vec{B} = ?$$

Et lite "strømelement" $I \cdot d\vec{s}$ gir et lite bidrag $d\vec{B}$ til det totale magnetfeltet $\vec{B}$ i avstand $\vec{r}$ fra strømelementet:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Vakuum permeabiliteten:

$$\mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A} \quad (\text{evt. N/A}^2)$$

$$(\text{Før 20.05.2019: } \mu_0 \equiv 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A})$$

$$(\text{Lysfarten i vakuum: } c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s})$$

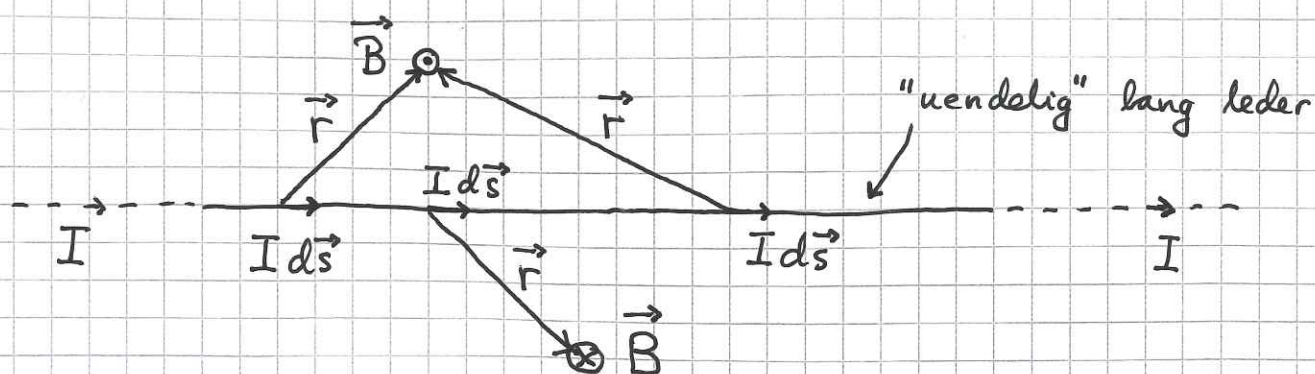
Totalt magnetfelt fra ei strømsløyfe blir dermed:

$$\boxed{\vec{B} = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}} \quad \text{Biot-Savarts lov (1820)}$$

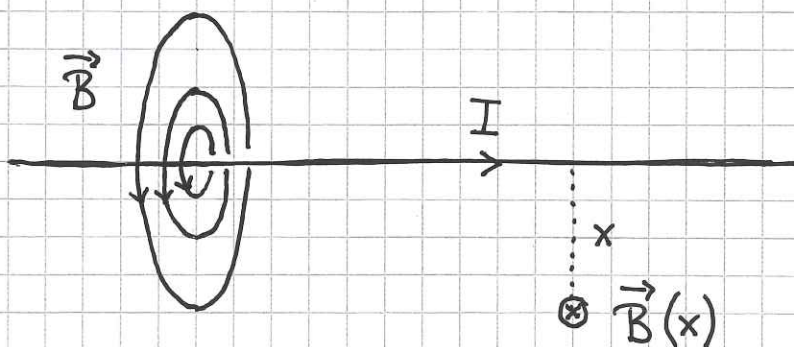
Sammenlign med elektrisk felt fra ladningsfordeling:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq \hat{r}}{r^2} ; \text{ Coulombs lov}$$

Eks 1 : $\vec{B}$ fra lang, rett strømførende leder
 [OS2 12.2 ; YF 28.3 ; LHL 23.5]



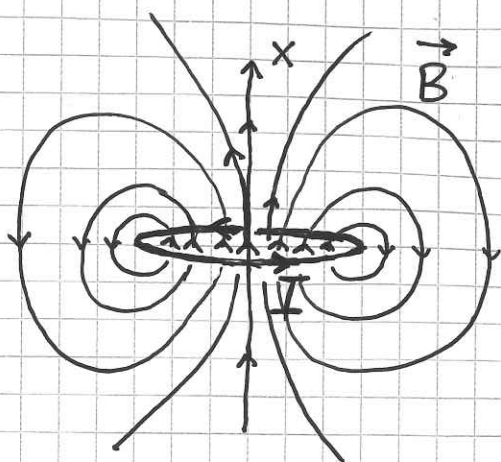
- $d\vec{B} \sim I d\vec{s} \times \vec{r} \Rightarrow$ alle bidrag peker ut av / inn i planet på oppsiden / nedsiden av lederen
- $\vec{B}$ må da være tangentiell til sirkel konsentrisk med lederen $\Rightarrow$ feltlinjer for $\vec{B}$ er sirkler konsentriske med lederen



- Biot-Savarts lov gir $B(x) = \mu_0 I / 2\pi x$
 (se pdf-notat for detaljer)
- Høyrehandsregel : Tommel langs I $\Rightarrow$ Resterende fingre krummer i retningen til $\vec{B}$
- Alltid lukkede feltlinjer for $\vec{B}$: Vi har ikke magnetisk ladning. Men vi har magnetiske dipoler, se Eks 2 og 3.

Eks 2: $\vec{B}$ fra sirkulær strømsløyfe

[OS2 12.4; YF 28.5; LHL 23.6]

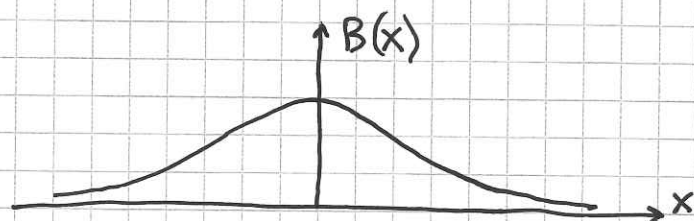


- Strømsløyfe i yz -planet. Strøm I . Radius R .
- Nær lederen er $\vec{B}$ omtrent som for lang, rett leder (sirkulære feltlinjer)

- På x -aksen er $\vec{B} \parallel \hat{x}$ pga symmetri

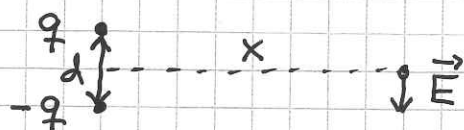
- Biot-Savarts lov gir, for B på x -aksen: $B(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$

(se notat for detaljer)



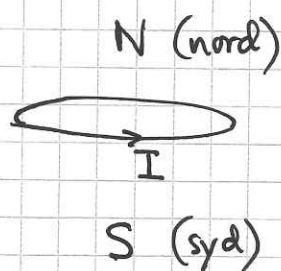
- Langt unna, for $x \gg R$, på x -aksen: $B(x) \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3} \sim \frac{1}{x^3}$

Sammenlign med el. felt fra el. dipol:



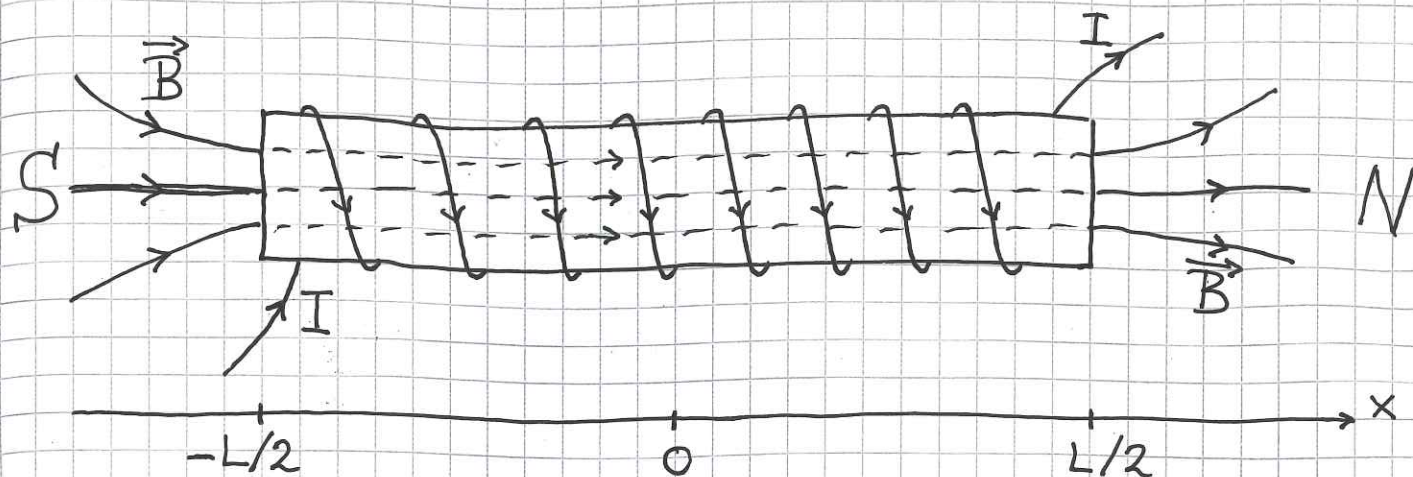
$$E(x) \stackrel{x \gg d}{\approx} \frac{q d}{4\pi\epsilon_0 x^3} \sim \frac{1}{x^3}$$

Strømsløyfa er en magnetisk dipol:



(Mer om magn. dipoler og magn. dipolmoment snart.)

Eks 3: $\vec{B}$ fra strømførende spole [OS2 12.6; YF 28.7; LHL 23.6] (47)



- N viklinger på lengde L . Tverrsnitt $A = \pi R^2$
- Tettliggende viklinger $\Rightarrow$ som $\vec{B}$ fra N sirkulære strømsløyper $\Rightarrow$ kan summere/integrere $\vec{B}$ fra Eks 2 (se notat for detaljer)
- På spolens akse: $B(x) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left\{ \frac{L/2 - x}{\sqrt{(\frac{L}{2} - x)^2 + R^2}} + \frac{L/2 + x}{\sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + R^2}} \right\}$
med $n = N/L$ = viklingstettheten = viklinger pr lengdeenhet

- Lang spole, $L/2 \gg R$:

$$B(\pm L/2) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \quad (\text{på aksene, ved spolens ender})$$

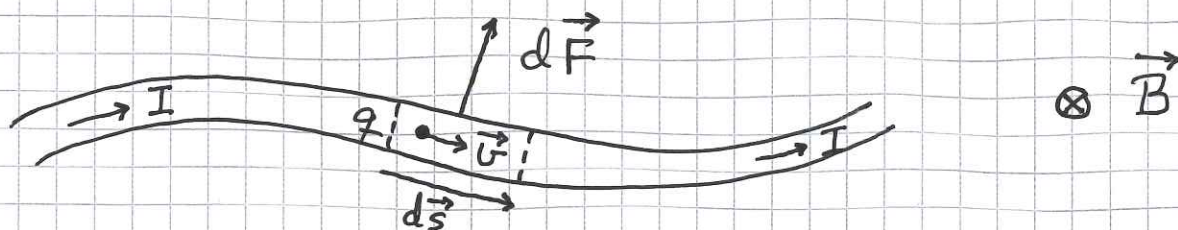
Overalt inni spolen (så lenge $|x| \ll L/2$):

$$\boxed{B = \mu_0 n I} \quad \text{Vårt "hovedresultat" !}$$

Utenfor spolen:

$$B \approx 0$$

Magnetisk kraft på strøm [OS2 11.4 ; YF 27.6 ; LHL 23.2] (48)



N frie ladninger q med driftshastighet $\vec{v}$ på lederbit med lengde (og orientering) $d\vec{s}$

$$\Rightarrow d\vec{F} = Nq\vec{v} \times \vec{B} = \text{kraft på lederbiten}$$

$$I = dQ/dt = Nq / (ds/v)$$

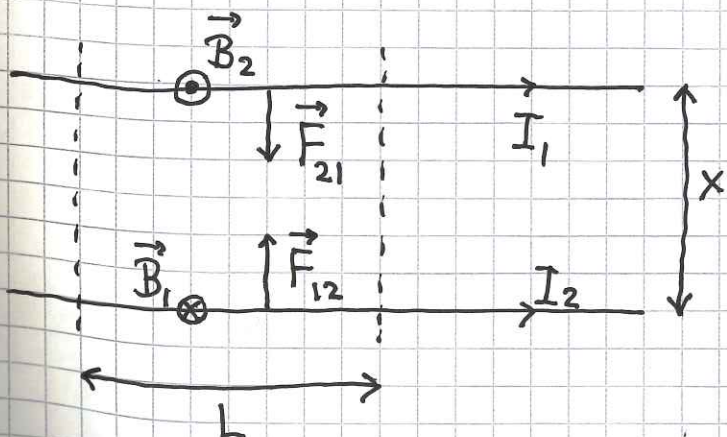
$$\Rightarrow Nq\vec{v} = I d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \underline{d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}}$$

Total kraft på hele ledaren:

$$\boxed{\vec{F} = \int d\vec{F} = I \int d\vec{s} \times \vec{B}}$$

Eks 1: Kraft mellom parallelle strømmer
[OS2 11.4 ; YF 28.4 ; LHL 23.5]



$$B_{1,2} = \frac{\mu_0 I_{1,2}}{2\pi x} =$$

feltstyrke i avstand

x fra leder 1, 2

Innbyrdes kraft på lengde ~~enheter~~ L : $F_{12} = F_{21} = F$ (N3)

$$F_{12} = I_2 L B_1 = \frac{\mu_0 L}{2\pi x} I_2 I_1$$

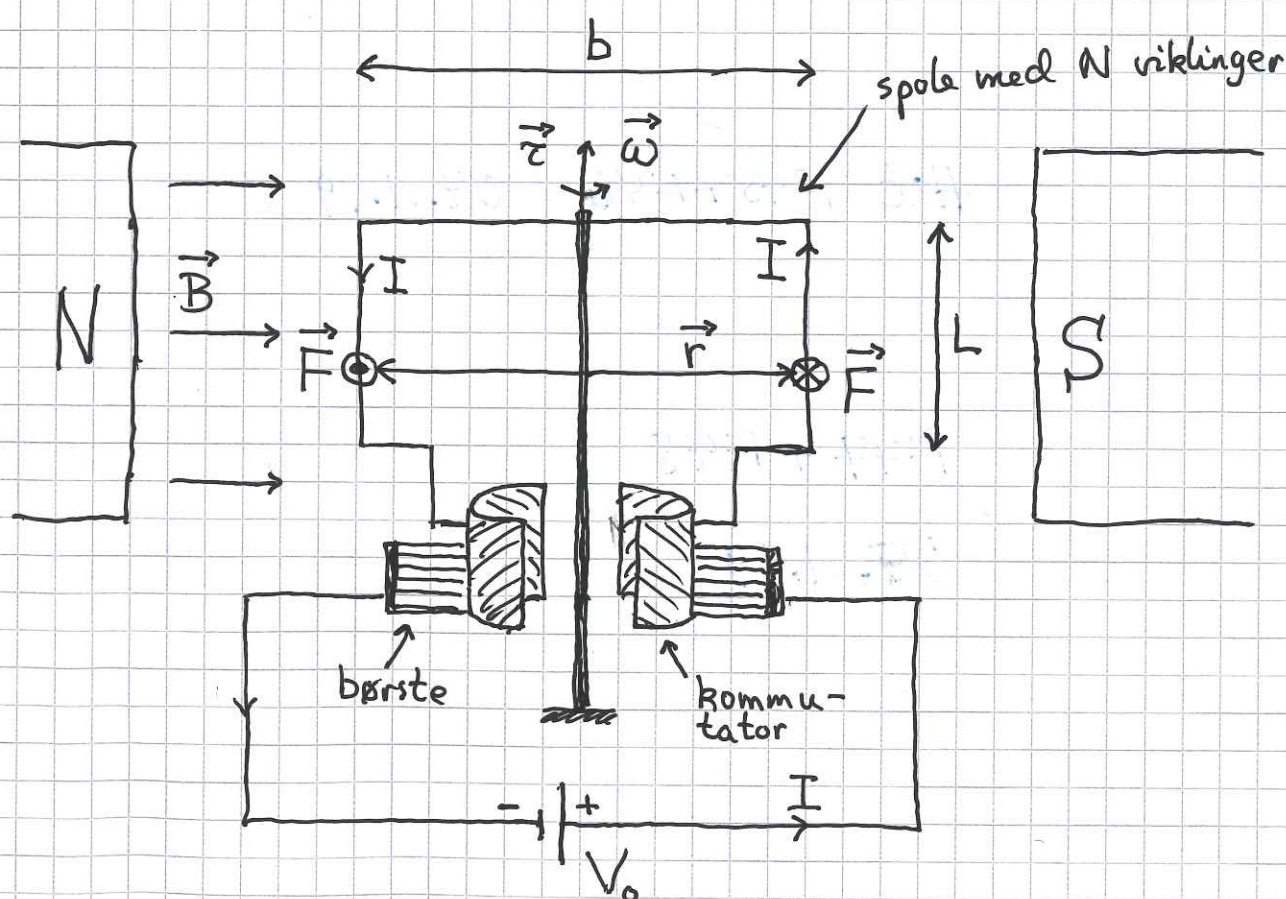
$$F_{21} = I_1 L B_2 = \frac{\mu_0 L}{2\pi x} I_1 I_2 = F_{12}$$

Kraft pr lengdeenhet: $f = F/L = \mu_0 I_1 I_2 / 2\pi x$

I_1 og I_2 i samme retning $\Rightarrow$ Tiltrekning

— " — motsatt — " — $\Rightarrow$ Frastøtning

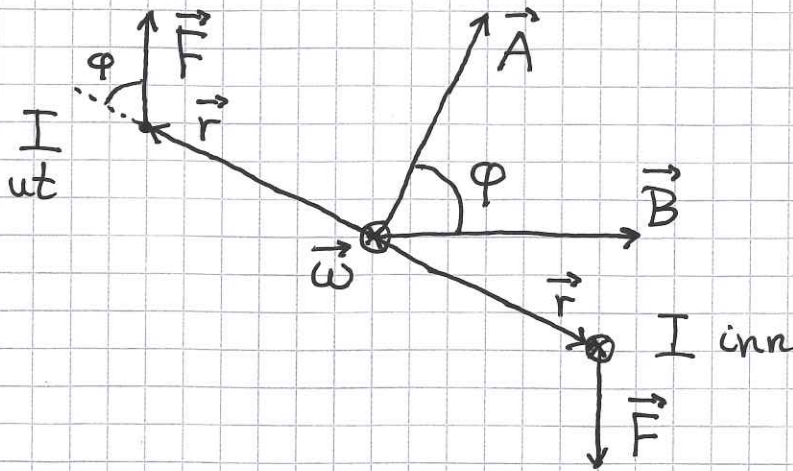
Eks 2. Likestrømsmotor [OS2 11.5 ; VF 27.8 ; LHL 26.3]



Kommutatoren roterer med spolen og gir strømretning slik at $\vec{\tau}$ peker i samme retning hele tiden.

Børstene sørger for kontakt mellom DC-kilden (V_0) og kommutatoren.

Sett langs rot. aksen, med $\vec{\omega}$ inn i planet:



$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

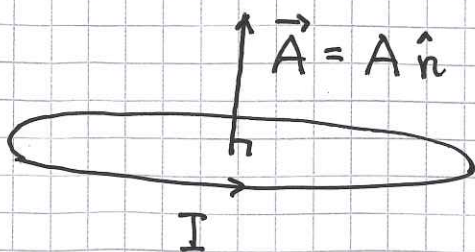
$$\vec{\tau} = \sum \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\begin{aligned} \tau = |\vec{\tau}| &= 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot ILB \cdot \sin\varphi \cdot N \\ &= N \cdot IA \cdot B \cdot \sin\varphi \quad (A = b \cdot L) \\ &= |N I \vec{A} \times \vec{B}| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = N I \vec{A} \times \vec{B} = \text{dreiemoment p\aa spole med } N \text{ vindinger}$$

Magnetisk dipolmoment [OS2 11.5 ; YF 27.7 ; LHL 23.3, 26.2]

Ei str\u00f8msl\u00f8yfe er en magnetisk dipol:



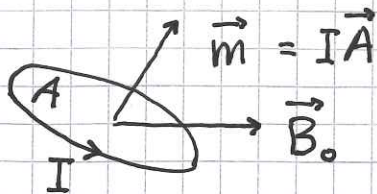
Positiv retning p\aa $\vec{A}$ med h\u00f8yreh\u00e5ndsregel.

Str\u00f8msl\u00f8yfas magnetiske dipolmoment:

$$\boxed{\vec{m} = I \vec{A}}$$

$$\text{Enhet: } [m] = A m^2 = J/T$$

Magn. dipol i ytre $\vec{B}$ -felt :

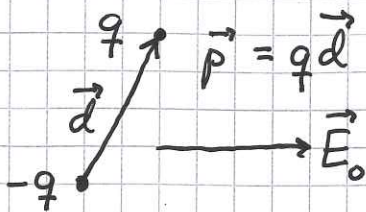


$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0$$

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$$

(Øving 13)

Elektrisk dipol i ytre $\vec{E}$ -felt :



$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0 ; U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

Generelle dipol-definisjoner (ikke pensum) :
(for $\vec{m}$)

$$\vec{p} = \int \vec{r} dq = \int \vec{r} \rho dV$$

ρ = ladning pr volumenhet

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int (\vec{r} \times \vec{j}) dV$$

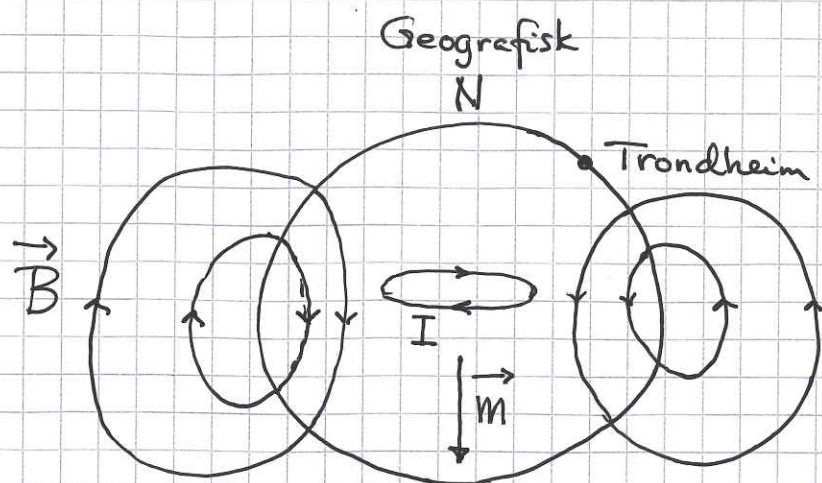
$\vec{j}$ = strøm pr flateenhet

Eks 1. (a) Bestem $|\vec{m}|$ for spole med 800 viklinger og tverrsnitt 4 cm^2 når strømstyrken i spoletråden er 0.5 A .

(b) Bestem max $|\vec{\tau}|$ på spolen i ytre felt $B_0 = 0.3 \text{ T}$.

Løsning: (a) $m = NIA = 800 \cdot 0.5 \text{ A} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = \underline{\underline{0.16 \text{ Am}^2}}$

(b) $\tau_{\max} = m \cdot B_0 = 0.16 \cdot 0.3 \text{ Nm} = \underline{\underline{0.048 \text{ Nm}}}$



$$m \approx 8 \cdot 10^{22} \text{ Am}^2$$

Magnetisk N (Betegnes ofte som magn. syd.)

Magnetiske poler der $\vec{B}$ er vertikal (dvs $\perp$ jordkloden)

"World Magnetic Model":

Magn. S : 86.4° N , 175.3° Ø (Mellom Alaska og Svalbard)

Magn. N : 64.1° S , 136.0° Ø (Ved Antarktis, i retning Sydney)

Trondheim (4/11-2019):

$$|\vec{B}| \approx 52.00 \mu\text{T}$$

$$B_{\perp} \approx 50.19 \mu\text{T}$$

$$B_{\parallel} \approx 13.59 \mu\text{T}$$

$$B_N \approx 13.56 \mu\text{T}$$

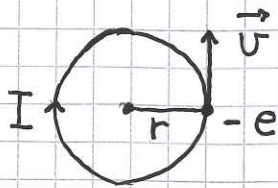
$$B_{\varnothing} \approx 0.90 \mu\text{T}$$

$$\frac{d|\vec{B}|}{dt} \approx 46 \text{ nT pr år}$$

Magnetisme [OS2 12.7; YF 28.8; LHL 26.1-26.6]

(53)

Atomer er magnetiske dipoler (noen har $m=0$) :



$$I = \frac{e}{T} ; T = \frac{2\pi r}{v} ; A = \pi r^2$$

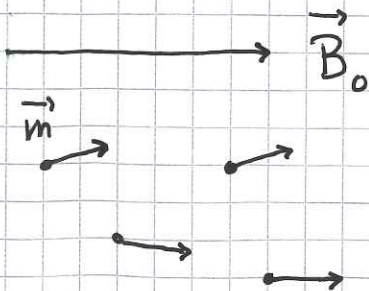
$$\Rightarrow m = IA = \frac{1}{2} e v r \sim 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^6 \text{ m/s} \cdot 10^{-10} \text{ m} \sim 10^{-23} \text{ Am}^2$$

Kvantemekanikk (og eksperimenter) viser at et elektron har en indre dreieimpuls, et spinn $\vec{S}$, tilsvarende et magn. dipolmoment

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e} \approx 9.274 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2 = 1 \text{ Bohr magneton}$$

$$(h \approx 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = \text{Plancks konstant})$$

Materialer magnetiseres når atomære dipoler rettes inn med $\vec{m}$ langs et ytre felt $\vec{B}_0$:

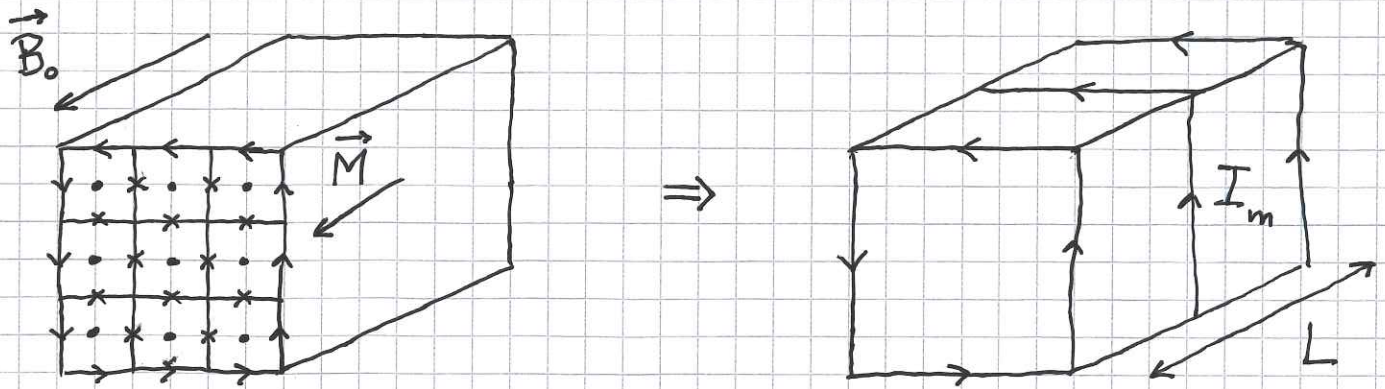


$$\text{Magnetisering : } \vec{M} = \sum_i \vec{m}_i / V \quad \left(\begin{array}{l} \text{dipolmoment} \\ \text{volumenhet} \end{array} \right) \text{ pr}$$

$$[M] = \text{A/m}$$

$$(\text{Elektrisk polarisering : } \vec{P} = \sum_i \vec{p}_i / V)$$

Nettoeffekten er en overflatestrøm (magnetiseringsstrøm):



- bundet strøm i hvert atom:
- alle indre strømmer kansellerer
- $i_m = I_m / L =$ induert overflatestrøm pr lengdeenhet
- som en spole!
- feltet styrkes inni materialet: $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$
- lineær respons: B_m prop. med $B_0 \Rightarrow B$ prop. med B_0
- materialets relative permeabilitet μ_r :

$$B = \mu_r B_0 \quad ; \quad [\mu_r] = 1$$

If. dielektrikum: $E = E_0 / \epsilon_r$ (svekket felt inni)

- materialets permeabilitet:

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0$$

If. dielektrikum: $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$

Paramagnetisme:

Svak innretting av $\vec{m}$ langs $\vec{B}_0$. Al: $\mu_r = 1.00002$

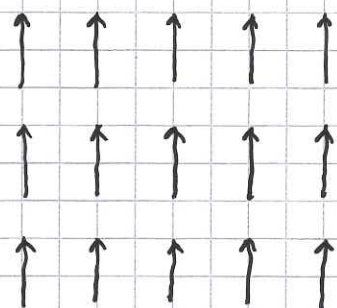
Diamagnetisme:

$\vec{B}_0$ induserer ~~en~~ motsatt rettet $\vec{m}$. Cu: $\mu_r = 0.999994$

Superledere: $\mu_r = 0 \Rightarrow \vec{B} = 0$ inni en (normal) superleder

Ferromagnetisme:

Nabospinn vekselvirker $\Rightarrow$ Parallell $\vec{m}$ gir lavest energi:



$\vec{M} \neq 0$ selv med

null ytre felt

Eks: Fe, Ni, Co, $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$

(Nd = neodym;
metall; $Z = 60$)

$\Rightarrow$ Stor verdi for μ_r , opp mot 10^3 eller mer.

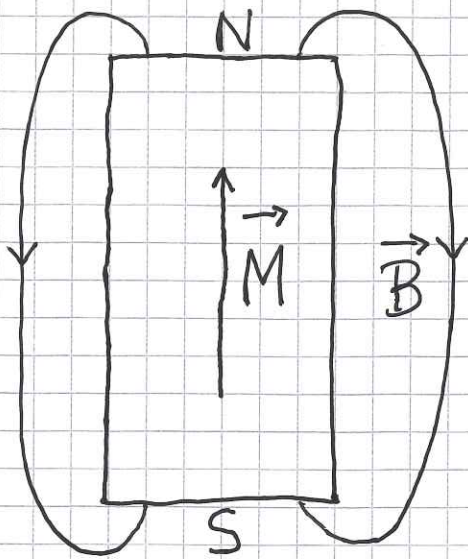
Curie-temperaturen:

Økende T ødelegger innrettingen av $\vec{m}$.

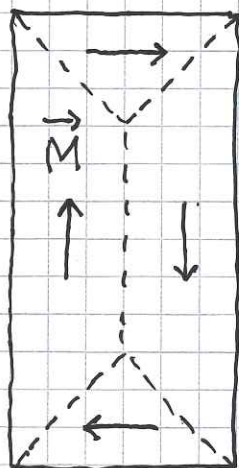
Gir faseovergang, fra ferromagnet til paramagnet, ved en kritisk temperatur T_c .

Eks: For rent jern (Fe) er $T_c = 770^\circ\text{C}$

Permanent-magnet vs unmagnetisk ferromagnet:



- Ganske mye energi i feltet omkring magneten; energi pr volumenhet $u_B = B^2/2\mu_0$
- Minimal vekselvirkningsenergi mellom atomære $\vec{m}$
- Eks: Neodymmagnet



$B \approx 0$
utenfor
materialet

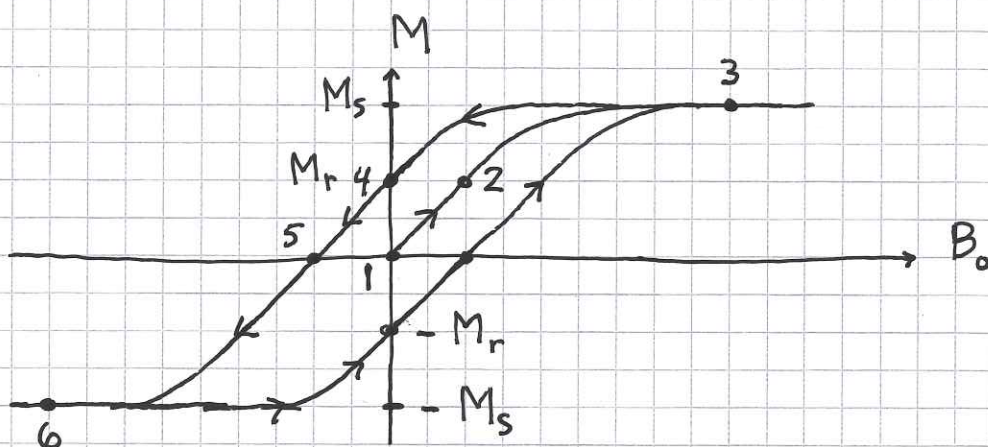
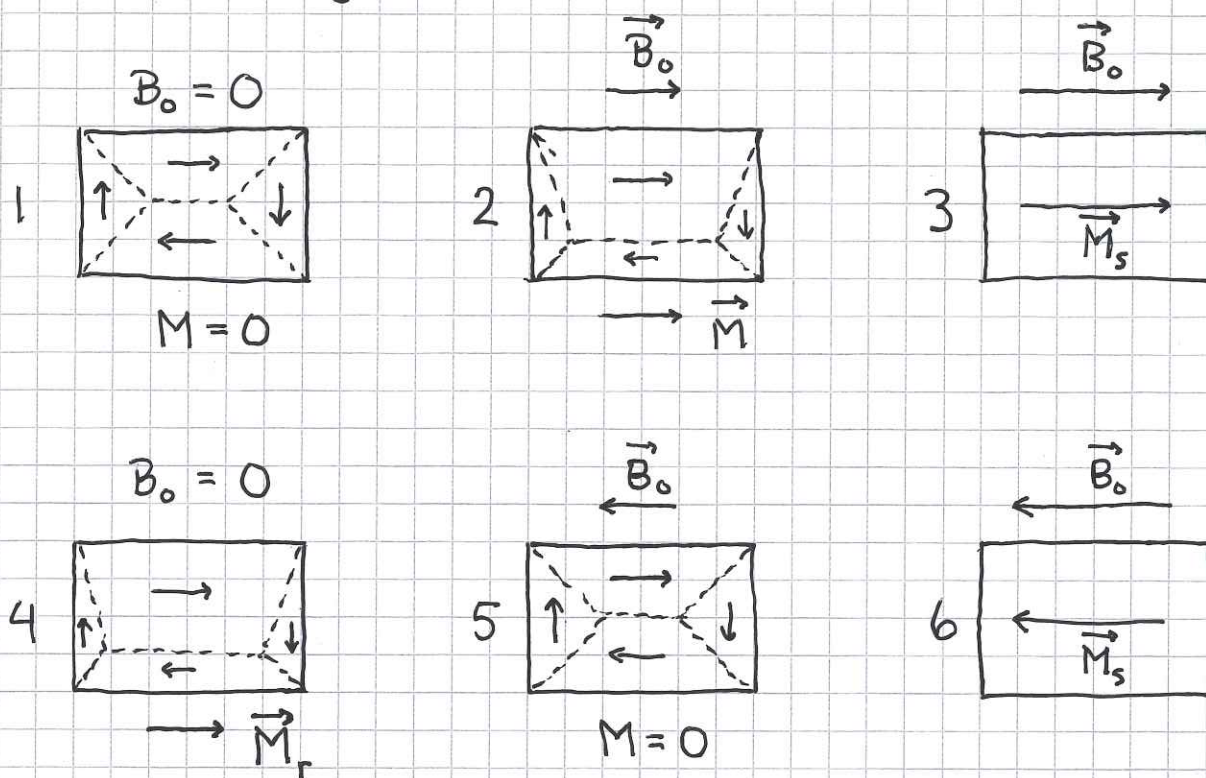
- Liten energi i feltet omkring ($B \approx 0$)
- Større v.v. energi nær domeneveggene (-----). Her endres retningen på atomære $\vec{m}$:



- Domenestørrelse: $10^{-4} - 10^{-6}$ m
- Eks: Stål
- Magnetiseres i et ytre felt $\vec{B}_0$

Magnetisk hysteresese:

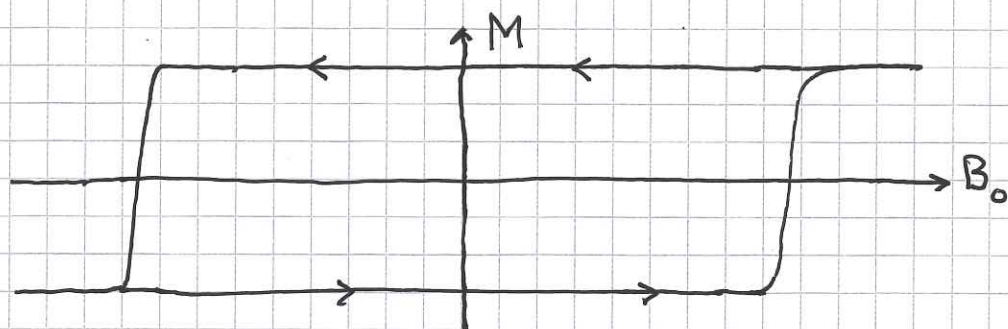
(57)



M_s = metningsmagnetisering ; alle $\vec{m}$ peker i samme retning ("saturation")

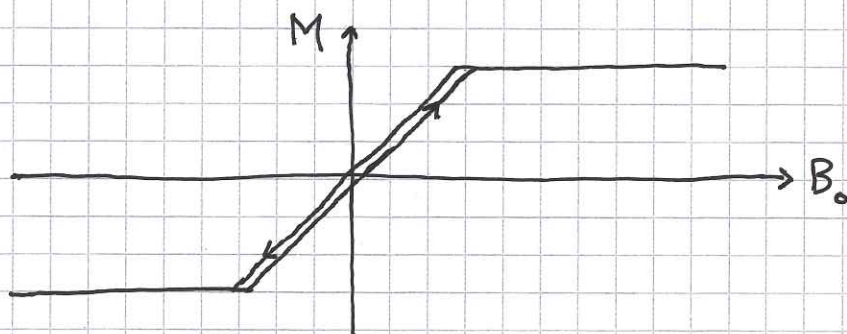
M_r = restmagnetisering ("rem^anent magnetization"); materialet "husker" at $\vec{M}_s$ pekte i en gitt retning før $\vec{B}_0$ ble redusert til null ; materialets tilstand avhenger av dets forhistorie

Permanentmagnet ("hard" magnet) :



- Vanskelig å armagnetisere
- Stor M når $B_0 = 0$ ($M_r \approx M_s$)
- Ikke egnet som kjerne i spole i AC-kretser (*)

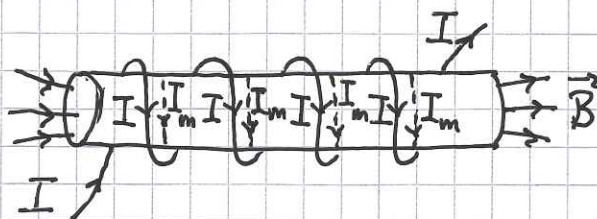
Stål ("bløt" magnet) :



- Lett å magnetisere og armagnetisere
- Liten M når $B_0 = 0$ ($M_r \approx 0$)
- Godt egnet som kjerne i spole i AC-kretser (*)

(*) Arealet omsluttet av hysteresekurven tilsvarer energi som omdannes til varme pr syklus, dvs for hver hele svingning av $\vec{B}_0$

Eks 1: Hva er B inne i en jernkjerne med $\mu_r = 100$, i en spole der $I = 0.3 \text{ A}$ og $N = 400$ viklinger på lengden $l = 6 \text{ cm}$?



Løsn: Ytre felt inne i spolen, dvs inne i jernkjernen:

$$B_0 = \mu_0 n I \quad ; \quad n = N/l$$

Jernet magnetiseres, med $\vec{M}$ langs $\vec{B}_0$, og det induseres en overflatestrøm I_m pr viking.

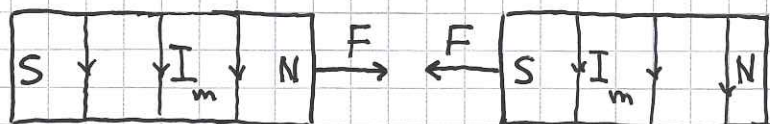
Magnetfeltet styrkes med faktoren μ_r inne i spolen:

$$B = \mu_r B_0 = \mu_r \mu_0 n I = \mu n I \quad (\mu = \mu_r \mu_0)$$

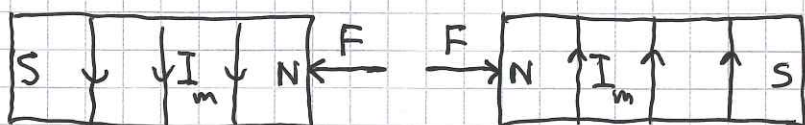
$$= 100 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{400}{0.06} \cdot 0.3 \text{ T}$$

$$\approx \underline{0.25 \text{ T}}$$

Eks 2: Tiltrekning og frastøtning mellom magneter



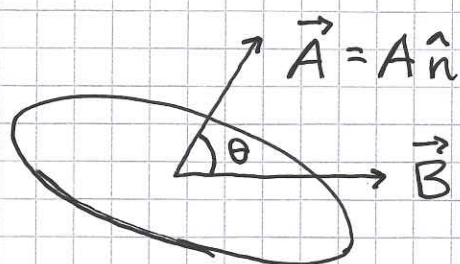
Parallelle strømmer
 $\Rightarrow$ Tiltrekning



Antiparallelle strømmer
 $\Rightarrow$ Frastøtning

Elektrodynamikk

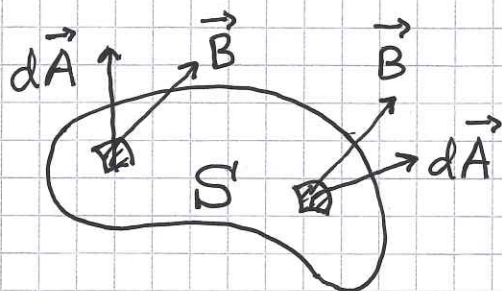
[OS2 13-15 ; YF 29-31 ; LHL 24, 25, 27]

Magnetisk fluks [OS2 13.1 ; YF 27.3 ; LHL 23.7]Magn. fluks gjennom flaten A er

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos \theta$$

når $\vec{B}$ er uniformt og flaten er plan.

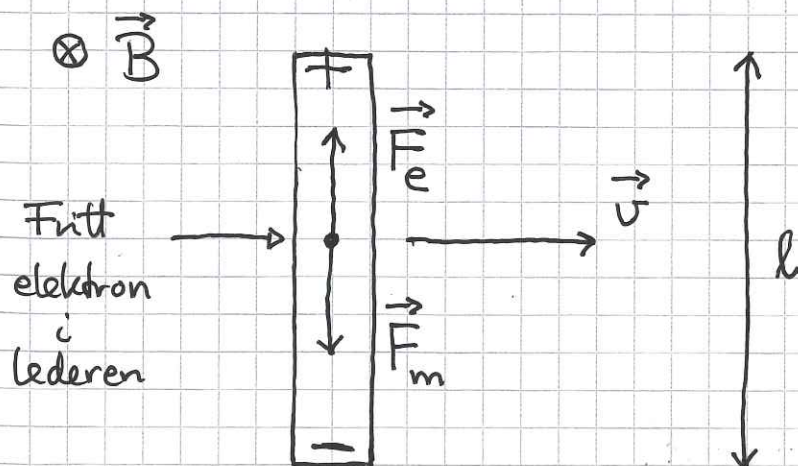
Generelt:



$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Faradays induksjonslov [OS2 13.1 ; YF 29.1-4 ; LHL 24.1]

Trekk en leder med lengde l med fart $\vec{v}$ gjennom et uniformt magnetfelt $\vec{B}$; $\vec{v} \perp \vec{B}$:



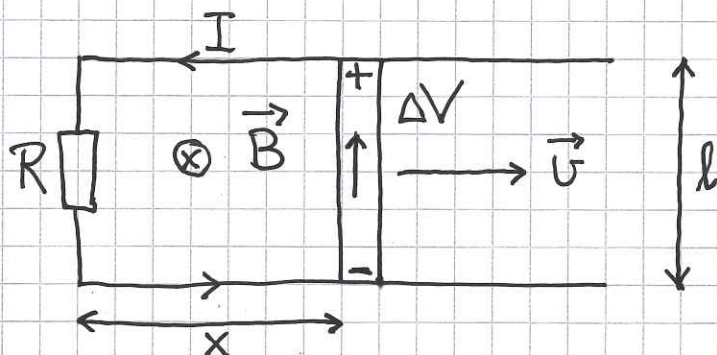
(61)

$\vec{F}_m = -e \vec{v} \times \vec{B}$ gir overskudd av elektroner nederst og underskudd øverst. Gir et induisert elektrisk felt $\vec{E}$ i ledere, rettet nedover, og dermed en indusert spenning i ledere, $\Delta V = E \cdot l$

Dynamisk likevekt når $\vec{F}_m + \vec{F}_e = 0$

$$\Rightarrow eE = evB \Rightarrow E = vB \Rightarrow \Delta V = vBl$$

Kobler ledere til motstand R :



$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{vBl}{R}$$

$$\begin{aligned} \underline{\Delta V} &= vBl = \frac{dx}{dt} Bl = \frac{d}{dt} (Blx) \\ &= \frac{d}{dt} (B \cdot A) = \frac{d}{dt} (\vec{B} \cdot \vec{A}) \\ &= \underline{\underline{d\Phi/dt}} \end{aligned}$$

som er Faradays induksjonslov:

Indusert spenning i ei sløyfe er lik endringen i omskuttet magnetisk flukes pr tidsenhet.

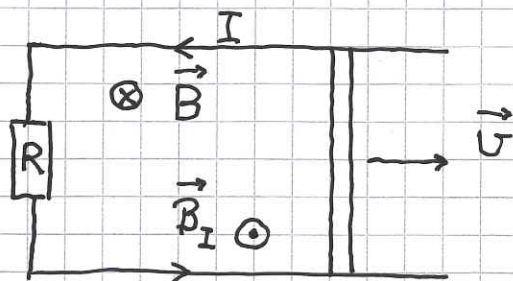
Gjelder generelt, enten det er $|\vec{A}|$, retningen på $\vec{A}$, $|\vec{B}|$ eller retningen på $\vec{B}$ som varierer med tiden t .

Lenz' lov [OS2 13.2; YF 29.3; LHL 24.1]

(62)

Indusert strøm I går den veien som gir tilhørende magnetfelt $\vec{B}_I$ og fluks $\Phi_I = \vec{B}_I \cdot \vec{A}$ som motvirker påtvunget fluksendring $\Delta\Phi$.

Eks:



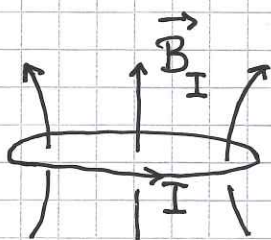
Økt omsluttet fluks inn i planet (pga økt areal)

$\Rightarrow$ indusert I mot klokka $\Rightarrow$ indusert omsluttet fluks

$\Phi_I = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$ ut av planet, som motvirker endringen.

Induktans [OS2 14.1-2; YF 30.2; LHL 25.1] og induksjon

Selvinduktans:



Siden $\vec{B}_I$ er prop. med I , er også omsluttet fluks

$$\Phi = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$$

prop. med I :

$$\boxed{\Phi = L \cdot I}$$

L = sløyfas (selv-) induktans

$$[L] = [\Phi/I] = \text{T} \cdot \text{m}^2/\text{A} = \text{H (henry)}$$

Eks: Bestem L ^(ideell) for spole med N viklinger på lengde l , kjerne med relativ perm. μ_r , omsluttet areal A .

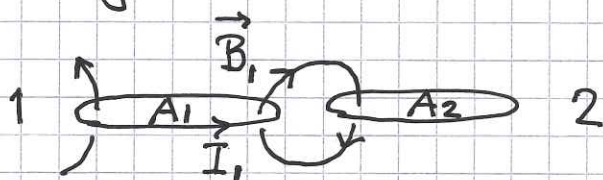
Løsn: $B = \mu n I = \mu_r \mu_0 \frac{N}{l} I$ overalt inni kjernen, og N viklinger omslutter arealet A

$$\Rightarrow \Phi = NBA = (N^2 \mu_r \mu_0 A / l) \cdot I \Rightarrow \underline{\underline{L = N^2 \mu_r \mu_0 A / l}}$$

Merk: L øker med N^2 og med μ_r

Vi ser at $[\mu] = \text{H/m}$ (Jf. $[\epsilon] = \text{F/m}$)

Gjensidig induktans:



I_1 i sløyfe 1 $\Rightarrow$ fluks $\Phi_2 = \int_{A_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2$ omsluttet av sløyfe 2

Siden B_1 er prop. med I_1 , er Φ_2 prop. med I_1 :

$$\Phi_2 = M_{21} \cdot I_1$$

Omvendt: I_2 i sløyfe 2 $\Rightarrow$ fluks $\Phi_1 = \int_{A_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{A}_1$

omsluttet av sløyfe 1, prop. med I_2 :

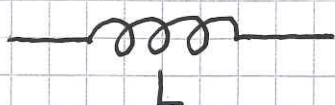
$$\Phi_1 = M_{12} \cdot I_2$$

$M_{21} = M_{12} = M =$ sløyfenes gjensidige induktans

$$[M] = \text{H} \quad (\text{henry})$$

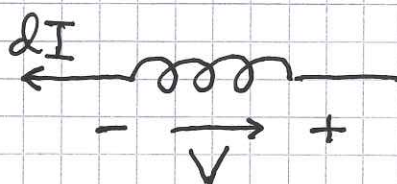
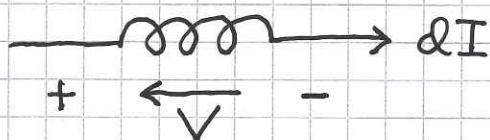
(Selv-) Induksjon: Hvis $dI/dt \neq 0$ i (f.eks.) 64
en spole, er også $d\Phi/dt \neq 0$, dvs det induseres
en (mot-)spenning $V = -d\Phi/dt = -L dI/dt$ i
spolen, med retning bestemt av Lenz' lov.

Spole som kretselement:

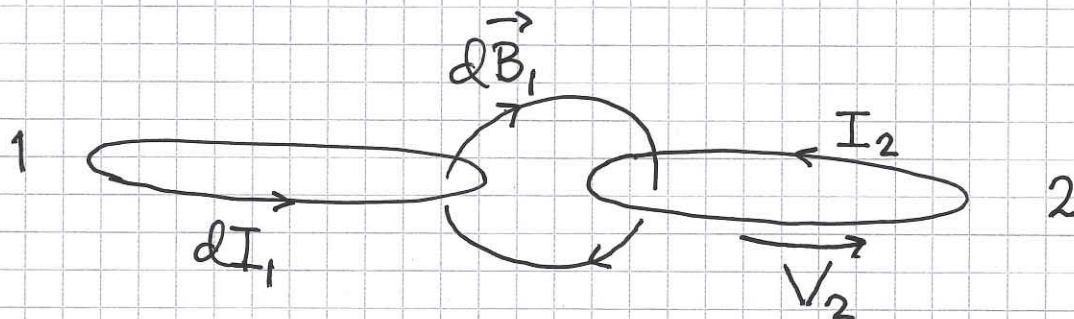


$$V = -L \dot{I}$$

Retning på V :



Gjensidig induksjon:

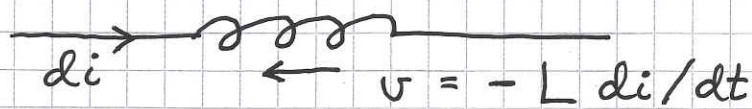


$$\dot{I}_1 \neq 0 \Rightarrow V_2 = -\dot{\Phi}_2 = -M \dot{I}_1$$

$$\dot{I}_2 \neq 0 \Rightarrow V_1 = -\dot{\Phi}_1 = -M \dot{I}_2$$

Energi i $\vec{B}$ -feltet [OS2 14.3; YF 30.3; LHL 25.3] (65)

Energi lagret i $\vec{B}$ -feltet inni en spole ($B = \mu_0 n I$) tilsvarer arbeidet som må gjøres mot den induerte spenningen når strømstyrken økes fra $i = 0$ til $i = I$:


$$v = -L \frac{di}{dt}$$

Påkrevd energi for å øke strømmen fra i til $i + di$:

$$dU = P \cdot dt = -v \cdot i \cdot dt = L \frac{di}{dt} \cdot i \cdot dt = L \cdot i \cdot di$$

$$\Rightarrow U = \int dU = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} L I^2$$

$$B = \mu_0 (N/l) I \Rightarrow I^2 = B^2 l^2 / \mu_0^2 N^2$$

$$L = \Phi / I = NAB / I = \mu_0 N^2 A / l$$

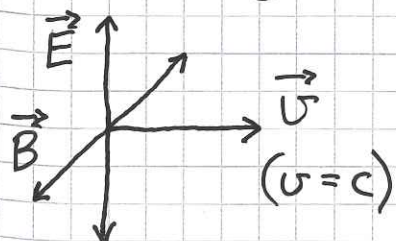
$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} (\mu_0 N^2 A / l) (B^2 l^2 / \mu_0^2 N^2) = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot \underbrace{(A \cdot l)}_{\text{volumet i spolen, der } B \neq 0}$$

$$\Rightarrow u_B = B^2 / 2\mu_0 = \text{energi pr volumenhet i magnetfelt}$$

$\Rightarrow$ Energitetthet i et elektromagnetisk (EM) felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Eks: EM-bølger (lys etc) er forplantning av $\vec{E}$ - og $\vec{B}$ -felt; både $\vec{E}$ og $\vec{B} \perp$ bølgens forplantningsretning, og $\vec{E} \perp \vec{B}$.



$$B = E/c \Rightarrow u_B = \frac{E^2/c^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = u_E$$

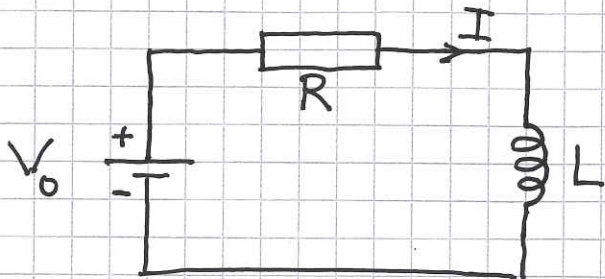
(siden $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$)

$$\Rightarrow \underline{u} = u_E + u_B = 2u_E = \underline{\epsilon_0 E^2}$$

Kretser og anvendelser ; DC og AC

[OS2 14, 15 ; YF 30.4-6 ; LHL 25.2, 27.1+2+3+5]
31.5

① RL-krets ; DC



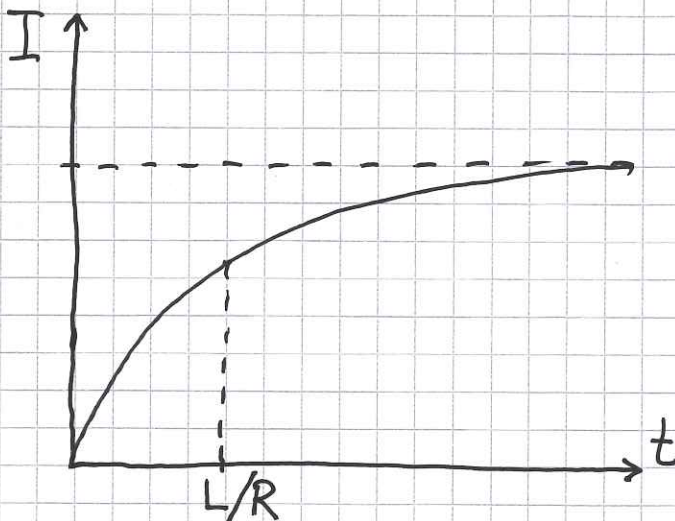
V_0 kobles til ved $t=0$

$$K2: V_0 - RI - L \frac{dI}{dt} = 0$$

den samme ligning for I som for Q i RC-kretsen

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

med tidskonstant $\tau = L/R$

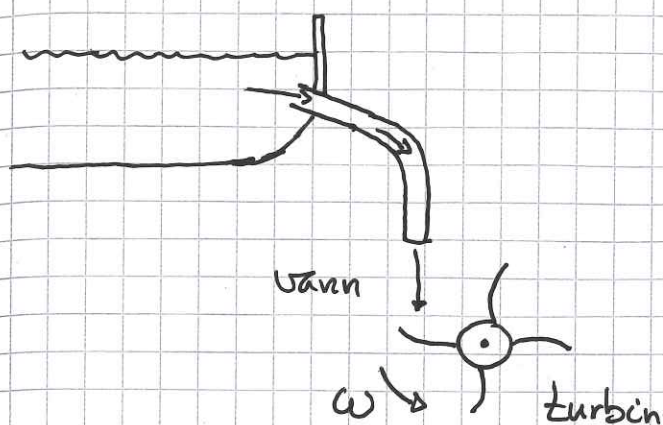


Induktansen L gir en indust motspenning i kretsen når vi med V_0 prøver å øke strømmen. Da blir I ikke umiddelbart V_0/R , det tar litt tid!

Tidsskala gitt ved $\tau = L/R$.

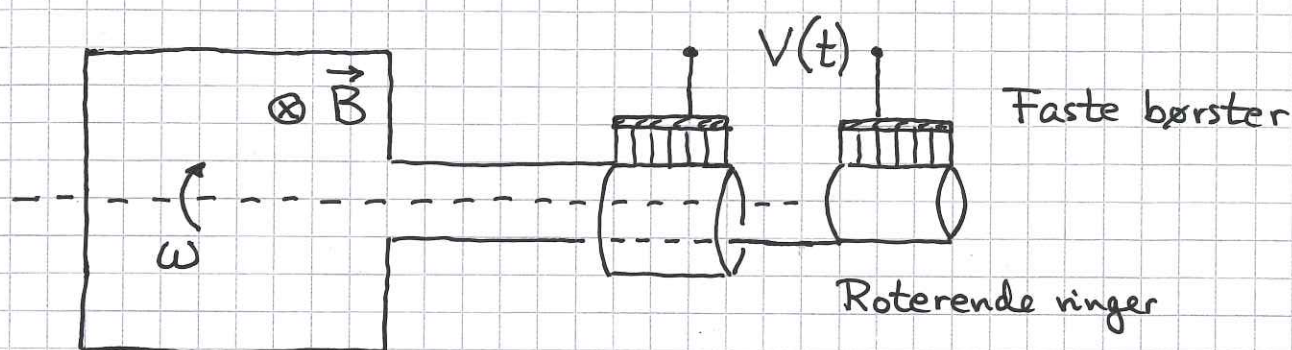
AC spenningskilde

(AC = alternating current = vekselstrøm)



$$U_{\text{vann}} \rightarrow K_{\text{vann}} \rightarrow K_{\text{rot turbin}}$$

som roterer spole i $\vec{B}$ -felt
og gir harmonisk tidsavhengig
omsluttet fluks $\Phi(t)$

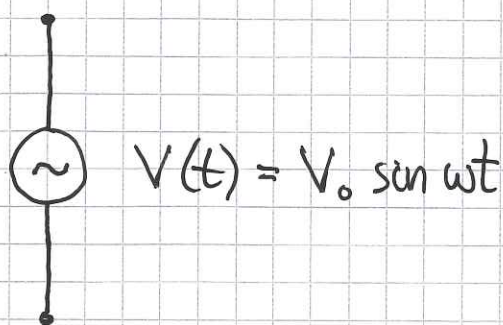


Spole, N viklinger, omsluttet areal A

$$\Rightarrow \Phi(t) = NBA \cos \omega t$$

$$\Rightarrow V(t) = V_0 \sin \omega t \quad \text{med} \quad V_0 = NBA\omega$$

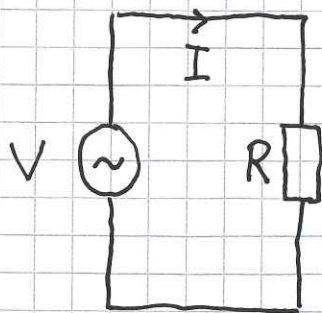
Kretssymbol:



$$\text{Frekvens: } f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Europa: 50 Hz

(2)

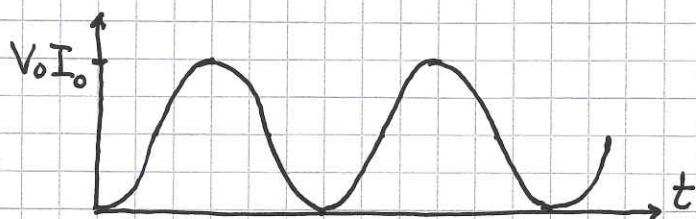


$$K2: V_0 \sin \omega t - RI = 0$$

$$\Rightarrow I(t) = I_0 \sin \omega t ; I_0 = V_0 / R$$

$\Rightarrow V$ og I svinger i fase

$$\text{Effekttap: } P(t) = V(t)I(t) = V_0 I_0 \sin^2 \omega t$$



$$\text{Midlere effekttap: } \langle P \rangle = V_0 I_0 \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0$$

$$\text{Effektivverdier: } \langle P \rangle = V_{\text{rms}} \cdot I_{\text{rms}}$$

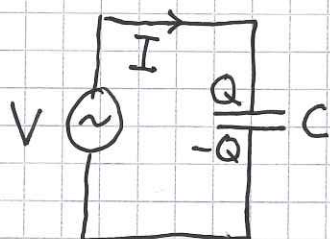
$$\text{med } V_{\text{rms}} = V_0 / \sqrt{2} ; I_{\text{rms}} = I_0 / \sqrt{2}$$

$$\text{I veggen: } V_{\text{rms}} \approx 230 \text{ V} ; V_0 \approx 325 \text{ V}$$

rms = root mean square:

$$\begin{aligned} V_{\text{rms}} &= \sqrt{\langle V^2 \rangle} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V(t)^2 dt} \\ &= V_0 / \sqrt{2} \end{aligned}$$

③



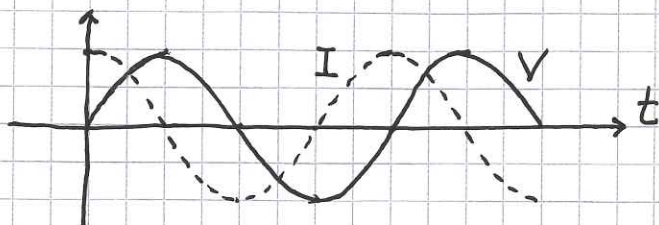
$$K2: V_0 \sin \omega t - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow Q(t) = V_0 C \sin \omega t$$

$$\Rightarrow I(t) = V_0 \omega C \cos \omega t$$

69

Faseforskjell $\pi/2$ mellom $V(t)$ og $I(t)$:

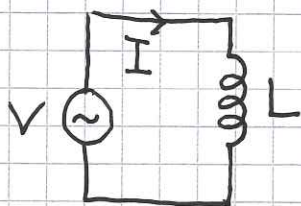


$$\langle P \rangle = V_0 I_0 \langle \sin \omega t \cdot \cos \omega t \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0 \langle \sin 2\omega t \rangle = 0$$

Dvs, kondensatoren er et tapsfritt kretselement.

Strøamplituden $I_0(\omega) = V_0 \omega C$ øker med frekvensen.

④

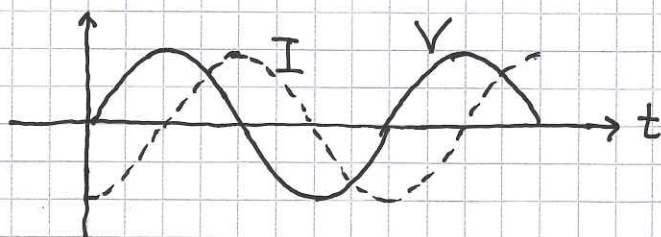


$$K2: V_0 \sin \omega t - L \dot{I} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{I}(t) = \frac{V_0}{L} \sin \omega t$$

$$\Rightarrow I(t) = -\frac{V_0}{\omega L} \cos \omega t$$

Faseforskjell $(-)\pi/2$ mellom $V(t)$ og $I(t)$:



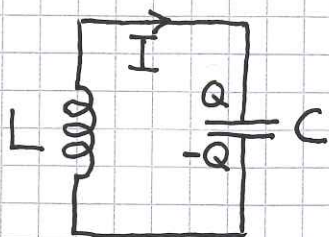
$$\langle P \rangle \sim \langle \sin \omega t \cdot \cos \omega t \rangle = 0$$

Dvs, en induktans er også et tapsfritt kretselement.

Strøamplituden $I_0(\omega) = V_0 / \omega L$ avtar med frekvensen.

⑤ LC - krets

70



Anta $Q(0) = Q_0$

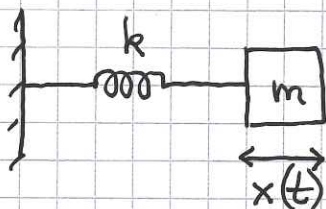
$$K2: -L\dot{I} - Q/C = 0$$

$$I = \dot{Q} \Rightarrow \ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

Dvs: Harmonisk oscillator.

$$\Rightarrow Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t \quad ; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Mekanisk analogi:



$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Analoge størrelser:

$$Q \leftrightarrow x, \quad I \leftrightarrow \dot{x}, \quad L \leftrightarrow m, \quad C \leftrightarrow 1/k$$

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} L I^2 = \text{energi i } \vec{B}\text{-felt i spolen}$$

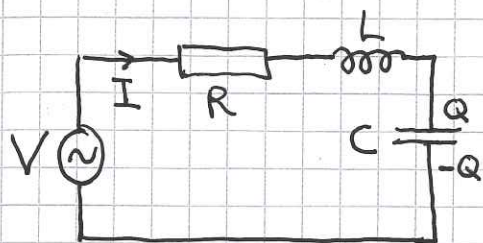
$$U = \frac{1}{2} k x^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q^2 = \text{---} \vec{E}\text{-felt i kondensatoren}$$

Konservativt system. Ingen dissipasjon av energi når $R = 0$:

$$\begin{aligned} Q^2/2C + \frac{1}{2} L I^2 &= \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} L Q_0^2 \underbrace{\omega_0^2}_{=1/LC} \sin^2 \omega_0 t \\ &= \frac{Q_0^2}{2C} = \text{konstant} \end{aligned}$$

⑥ RLC resonanskrets

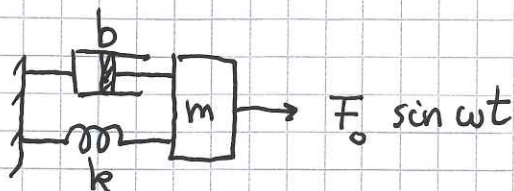
71



$$K2: V_0 \sin \omega t - RI - L\dot{I} - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_0 \sin \omega t$$

Mekanisk analogi:



$$N2: m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

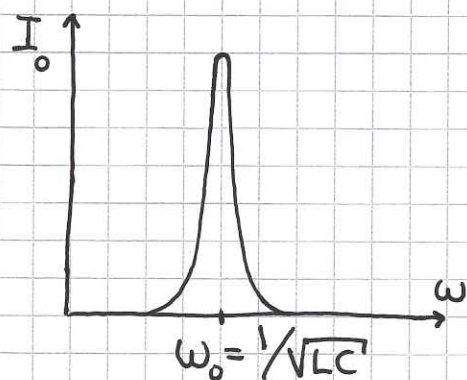
$$\Rightarrow b \leftrightarrow R, \quad F_0 \leftrightarrow V_0$$

$$\Rightarrow \text{Resonans när } \omega \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC} :$$

$$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$$

$$Q_0(\omega) = \frac{V_0/L}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} ; \quad 2\gamma = R/L$$

$$I(t) = I_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi) ; \quad I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega)$$



$$\text{Halvverdbredda: } \Delta\omega = 2\gamma = R/L$$

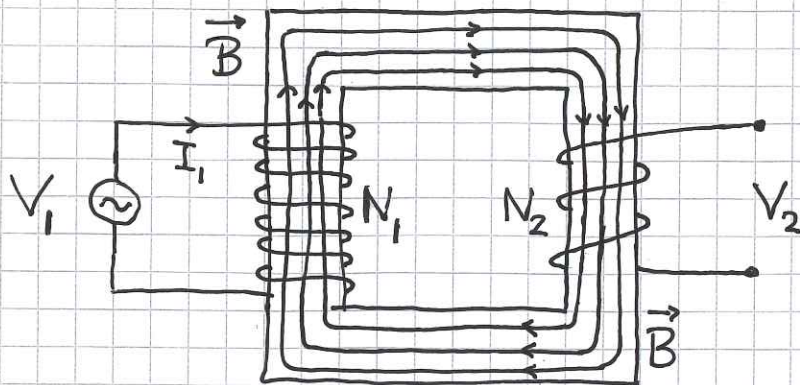
$$\text{Kvalitetsfaktor: } \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$$

Måler $I_0(\omega)$ og $Q_0(\omega)$ ved å måle $V_R = RI$ og $V_C = Q/C$ over hhv R og C .

⑦

Transformator

⑦2



Magnetisering av jernkjernen fører til at feltlinjene for $\vec{B}$ følger jernet; gir samme $|\vec{B}|$ i begge spoler.

Omskuttet fluks:

$$\Phi_1 = N_1 AB \quad ; \quad \Phi_2 = N_2 AB$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\dot{\Phi}_1}{\dot{\Phi}_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Dvs: Spenningen inn, V_1 , kan transformerer til spenning ut, V_2 , med redusert eller økt amplitude, med hhv $N_2 < N_1$ eller $N_2 > N_1$:

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} \cdot V_1$$