

FY6019 Moderne fysikk

①

Kap. 37 - 44 i Young & Freedman (YF)

37 Relativitetsteori. Dekkes i FY6015.

38, 39 Partikkel-bølge-dualisme.

40 Kvantemekanikk. Schrödingerligningen.

41 Atomer.

42 Molekyler. Faste stoffer. Anvendelser.

43 Kjernefysikk. Radioaktivitet.

44 Partikkelfysikk.

Sannsynlig plan:

Samling 1 og 2: YF 38 - 41

Selvstudium: YF 42 - 43

Orienteringsstoff: YF 44

Vurderingsordning: 100% hjemmeksamen

"Obligatoriske" øvinger

Kompetansemål VGS:

②

Bohrs atommodell

Spektrallinjer

Fotoelektrisk effekt

Compton - spredning

Partiklers bølgenatur

Heisenbergs uskarphetsrelasjon

Røntgen, ultralyd, magnetisk resonans

Fisjon, fusjon

Elementærpartikler.

Standardmodellen.

} YF44

Halvledere. Diode, transistor

} FY6018

Annen litteratur:

P.C. Hemmer

"Kvantemekanikk"

I. Øverbø

"Tillegg"

J.A.S.

Tarlenotater

} BB

Innledning til kvantemekanikk

(3)

[YF 38, 39 (37)]

Status, klassisk fysikk ca 1900 :

- Mekanikk. Newtons lover. Galileisk relativitet. [Galilei 1564-1642; Newton 1642-1727]
- Termodynamikk. Statistisk mekanikk. [W. Thomson (Lord Kelvin) 1824-1907; L. Boltzmann 1844-1906;]
- Elektromagnetisme. Maxwells ligninger. Lys er bølger. [Gauss, Ampere, Henry, Faraday, Hertz, Maxwell,]
- Atomer. Materie er partikler. Elektronet. "Rosinbollemodell". [J.J. Thomson 1856-1940, NP 1906]

NP : Nobelpris i fysikk, f.o.m. 1901

Problemer med klassisk fysikk, og teoretisk utvikling ca 1900-1923 : (4)

- Linjespektre : Absorpsjon og emisjon av EM stråling med bestemte bølgelengder.

Eksempler :

Na, $\lambda = 589 \text{ nm}$ (gult) [Melville 1752]

Mørke linjer i solspekteret (pga absorpsjon i atmosfæren) [Wollaston 1802 ; Fraunhofer 1814]

H, Balmerserien, 410, 434, 486 og 656 nm
(= Fraunhofers h, G', F og C)

J. Balmer 1885 : $\lambda = B \cdot \frac{n^2}{n^2 - 4}$; $n = 3, 4, 5, 6$;

$B = 364.5 \text{ nm}$

N. Bohr 1913, NP 1922 : Bohr-modellen
(mer om den senere)

- Lysfarten (i vakuum) er like stor i alle inertialsystemer, uansett deres relative bevegelse. Galileisk relativitet holder ikke for lys.

Exp: Michelson & Morley 1887

↑ NP 1907

Teori: A. Einstein 1905, Spesiell relativitetsteori (SR), litt mer om det senere.

- Stråling fra svart legeme:

EM stråling inn mot legeme absorberes, reflekteres og transmitteres, med andeler

$$a, r \text{ og } t \Rightarrow a + r + t = 1$$

Svart legeme: idealisering med $a = 1$

Ved termisk likevekt (konstant temperatur T)

må legemet absorbere og emitte like mye energi $\Rightarrow a = e = 1$; $e = \text{emissivitet}$

(6)

$j(T) = \int_0^{\infty} I(\nu, T) d\nu =$ utstrålt energi pr
tids- og flateenhet ; $\nu =$ frekvensen

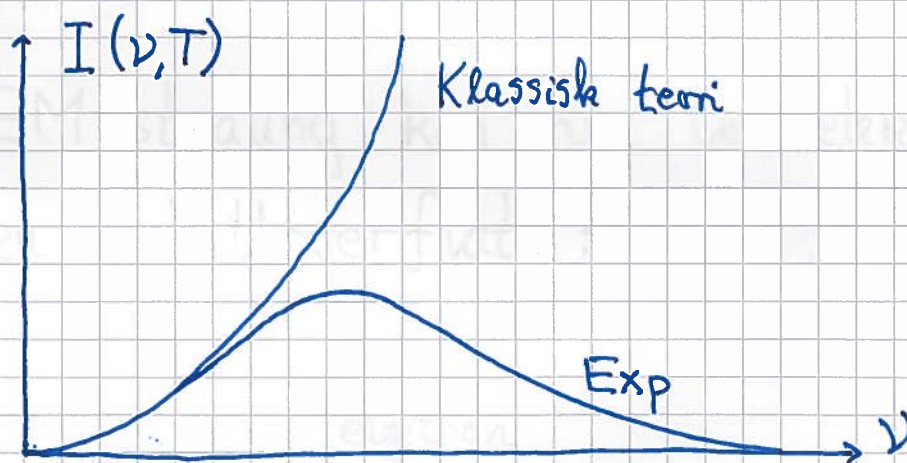
$I(\nu, T) =$ utstrålt effekt pr flate- og frekvensenhet

Klassisk teori gir Rayleigh - Jeans lov

$$I(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} k_B T$$

($c =$ lysfarten ; $k_B =$ Boltzmanns konstant)

som stemmer med eksperimenter for lave frekvenser
(dvs lange bølglengder λ), men ikke for høye ν :



"ultrafiolett katastrofen" :

$j(T) \rightarrow \infty$ med klassisk teori

Max Planck, 1900, NP 1918:

(7)

EM stråling med frekvens ν har kvantisert energi,

$$E = 0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots$$

Plancks kvantehypotese

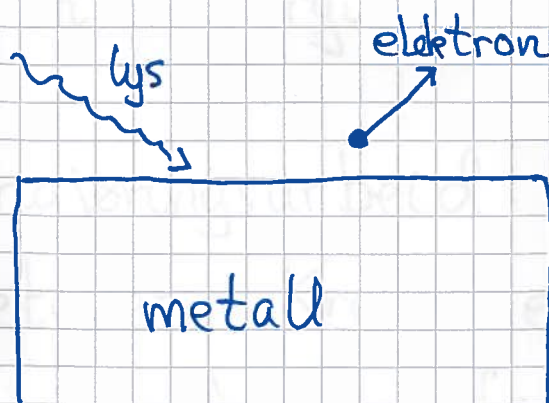
som gir

$$I(\nu, T) = \frac{2\pi \nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

Plancks strålingslov

- Fotoelektrisk effekt:

EM stråling kan rive løs elektroner fra en metalloverflate:



Exp:

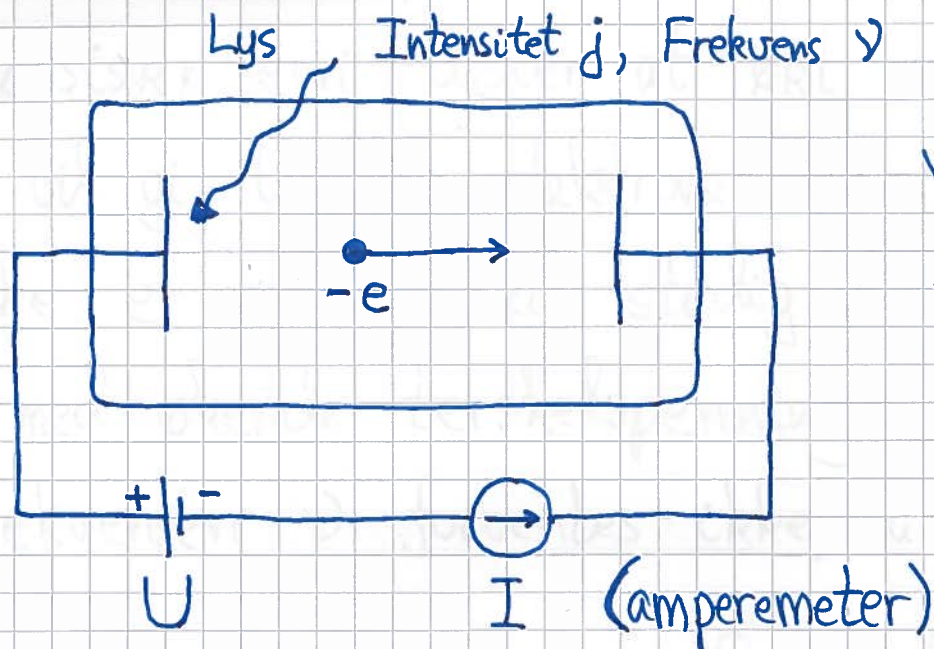
Hertz 1887

Lenard 1900

R. Millikan 1914

(NP 1923)

(8)



Terskelspanning : Noen løsrevne elektroner treffer den andre elektroden ; gir strøm I i kretsen. Trenger motspanning

$$U = K_{\max} / e$$

for å redusere I til null. Kaller U terskelspanningen. Her er $K_{\max}$ maksimal kinetisk energi for løsrevne elektroner.

Frigjøringsarbeid : Elektronene er bundet til metallet. Kreves en minsteenergi

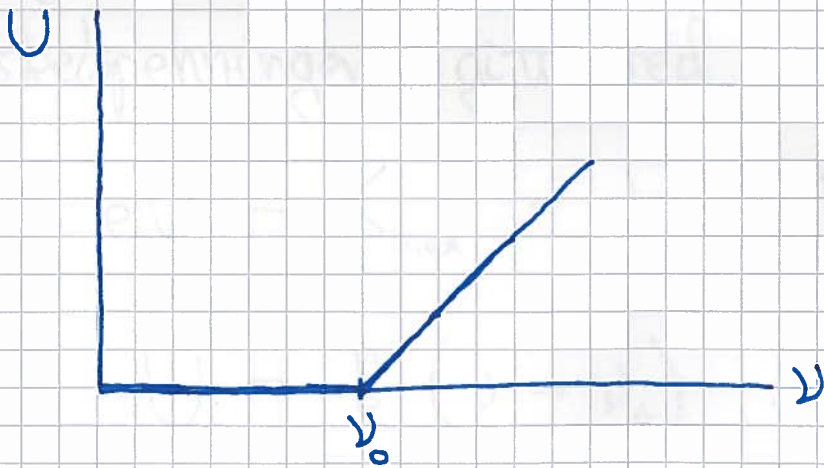
$W =$ frigjøringsarbeidet for å rive løs elektroner.

Klassisk teori tilsier at økt intensitet ⑨
j vil gi løsrevne elektroner (når liten intensitet
ikke er nok), med stadig økende $K_{\max}$ og
dermed økende terskelspenning U .
Frekvensen ν forventes ikke å påvirke U .

Ekperimentene gav $I = 0$ så lenge ν var
mindre enn en bestemt (materialavhengig)
terskel frekvens ν_0 , selv med økt intensitet.

Dvs: $U = 0$ så lenge $\nu < \nu_0$.

Hvis $\nu > \nu_0$, øker U lineært med ν .



Millikan 1914, NP 1923

Einstein forklarte resultatene med (10)

Plancks kvantehypotese: (1905, NP 1921)

Lysets energi kommer i "hele pakker" proporsjonale med frekvensen, $E = h\nu$, med h som innført av Planck. Et elektron i metallet kan bare absorbere hele energien $h\nu$. (Liten sannsynlighet for å absorbere to eller flere energipakker samtidig.)

Må nå ha $h\nu \geq W$ for å rive løs elektroner.

Med $h\nu > W$ får løsrevne elektroner kinetisk energi inntil $h\nu - W$. Dermed blir terskelspanningen gitt ved

$$eU = K_{\max} = h\nu - W$$

dvs

$$U = \frac{h}{e} (\nu - \nu_0) = \text{terskelspanning}$$

med

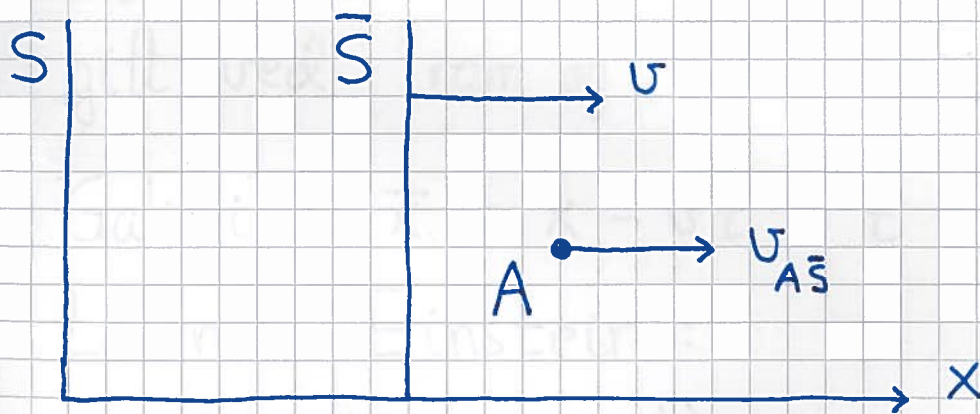
$$\nu_0 = W/h = \text{terskeelfrekvens}$$

Millikan målte $e \approx 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ i 1909, slik at $U(\nu)$ gav exp. verdi for h ($\approx 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$)

- Einsteins spesielle relativitetsteori: (11)
Bygger på to postulater: (1905)

1. Relativitetsprinsippet: De samme naturlover gjelder i alle inertialsystemer. (Også formulert av Galilei mye tidligere.)
2. Lysfarten i vakuum er den samme for alle observatører, uavhengig av observatørens relative bevegelse.

Konsekvenser av disse postulatene:



S og $\bar{S}$ er to inertialsystemer ("koordinat-systemer") i relativ bevegelse:

$u = u_{\bar{S}S}$ = farten til $\bar{S}$ relativt S ,
dvs slik at omvendt er $u_{S\bar{S}} = -u$

- (12)
- Samtidighet er relativt: Samtidige hendelser i S er ikke samtidige i $\bar{S}$.
 - Tidsdilatasjon: Klokke i bevegelse går saktere enn klokke som er i ro.
 - Lengdekontraksjon: Objekter i bevegelse er kortere enn objekter i ro.
 - Galileisk relativitet holder ikke:

$$v_{AS} \neq v_{A\bar{S}} + v_{\bar{S}S}$$
 - Nye regler for transformasjon av hendelser gitt ved "rom og tid" (x, y, z, t) .

Galilei: $\bar{x} = x - vt$; $\bar{t} = t$

Lorentz / Einstein:

$$\bar{x} = \gamma (x - vt)$$

$$\bar{t} = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

med

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$c = \text{lysfarten} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

- (13)
- Nye uttrykk for impuls $\vec{p}$ og energi E , for å få prinsippene om impuls- og energibevarelse i samsvar med relativitetsprinsippet:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad ; \quad E = \gamma mc^2 = E_0 + K$$

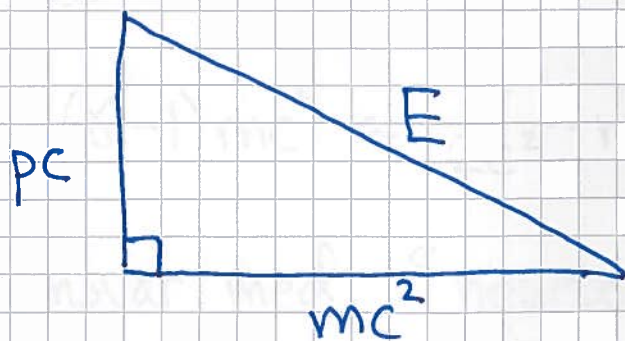
Hvileenergi: $E_0 = mc^2$

Kinetisk energi: $K = E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2$

Gir sammenhengen

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

for partikkel med masse m , impuls p og energi E .



Eks: Lys; bølgelengde λ , frekvens ν og (bølge-)fart c . Er samtidig å betrakte som partikler (pga fotoelektrisk effekt). Siden $v = c$, vil $\gamma \rightarrow \infty$ for lyskvant (fotoner). Med $p = \gamma m v$ må vi da ha $m = 0$, for å unngå at $p \rightarrow \infty$. Med $m = 0$ blir $E = pc$. Med $c = \lambda \nu$ og $E = h\nu$ følger det at

$$p = E/c = h\nu/c = h/\lambda$$

Eks: K for partikkel med $v \ll c$

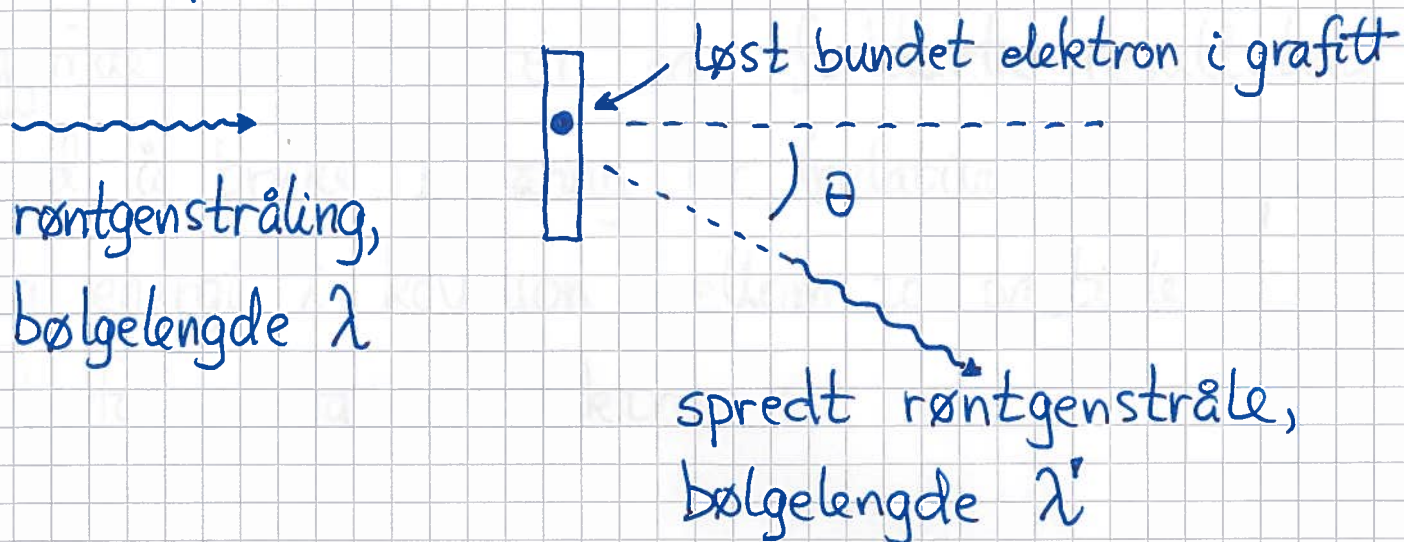
Med $v \ll c$ er $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$ slik at

$$K = (\gamma - 1)mc^2 \approx \frac{v^2}{2c^2} \cdot mc^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

i samsvar med "newton-mekanikk".

• Compton - effekten :

(15)



Klassisk teori :

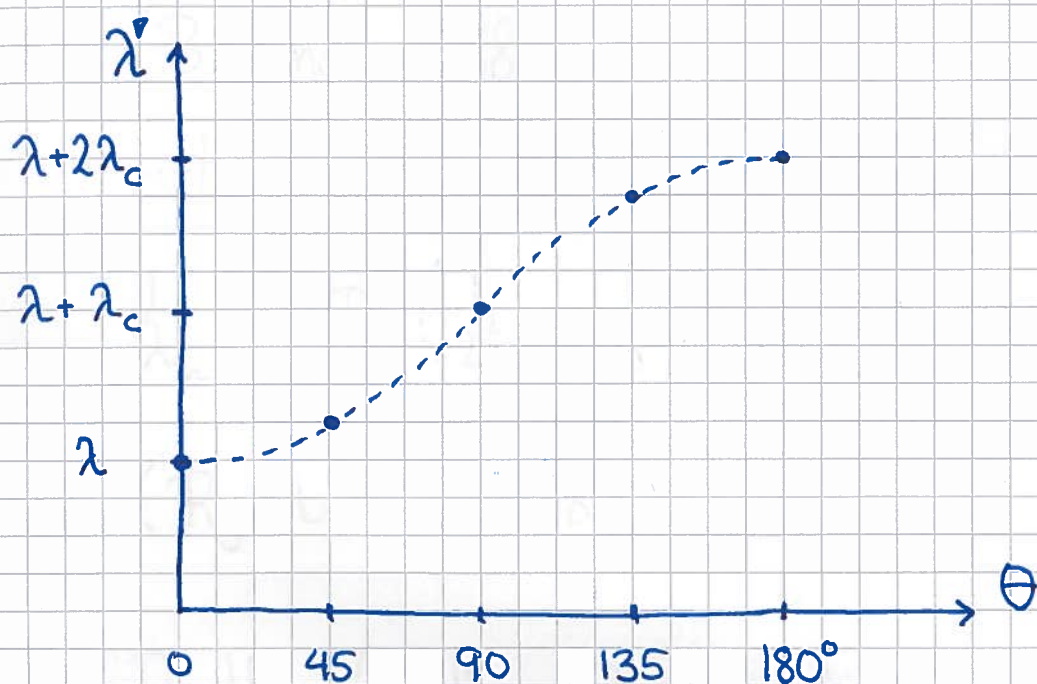
Røntgenstrålene er EM bølger med frekvens $\nu = c/\lambda$. EM-bølger har oscillerende elektrisk felt $\vec{E}(t)$ som gir oscillerende kraft $\vec{F}(t) = -e\vec{E}(t)$ på elektronet. Elektronet settes i svingninger med samme frekvens ν . I følge Maxwells ligninger vil en slik oscillerende ladning sende ut EM-bølger med frekvens ν .

Dermed bør spredt røntgenstråle ha samme bølgelengde som innkommende stråle, dvs $\lambda' = \lambda$; uavhengig av vinkelen θ .

A. H. Compton (1923, NP 1927)

(16)

gjorde eksperimenter og forklarte resultatene ved å bruke bevaring av (relativistisk) impuls og energi i kollisjon mellom to partikler, et foton og et elektron :



A. H. Compton,
Phys. Rev. 21,
483 (1923)

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c (1 - \cos \theta)$$

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} \approx 2.4 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 0.024 \text{ \AA}$$

= compton-bølgelengden for elektronet

Et overbevisende resultat i favør av fotonbegrepet.

Bohr - modellen (1913, NP1922)

(17)

Bakgrunn for Niels Bohrs ideer:

- Balmerserien for H-atomet.

$$\lambda_n = B \frac{n^2}{n^2 - 4} ; B \approx 364.5 \text{ nm} ; n=3,4,5,6$$

(Balmer 1885)

ert.

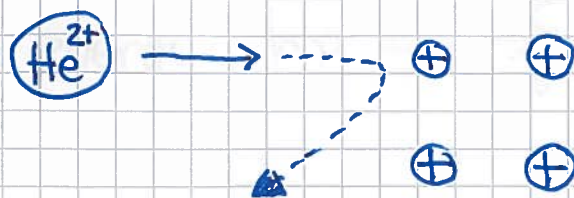
$$\frac{1}{\lambda_n} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) ; R = \frac{4}{B} \approx 10^7 \text{ m}^{-1}$$

(Rydberg 1888)

- Rutherfords atommodell (1911).

Atomenes positive ladning er samlet i en liten kjerne; ikke jevnt fordelt som i Thomsons modell.

Exp. motivert: α -partikler (He^{2+}) ble sendt mot tynn gullfolie. Noen ble sterkt avbøyd.



- Plancks kvantehypotese og Einsteins (18)
forklaring av fotoelektrisk effekt. Viste
at strålingsenergi opptrer i enheter av $h\nu$.

Bohrs postulater:

- Stasjonære tilstander, med bestemte energier. Klassisk fysikk tilsier at elektronet i H-atomet må tape energi i form av EM stråling, fordi det er i akselerert bevegelse. Dette må være forhindret.
- Kvantepresprang. Absorpsjon og emisjon av foton gir overgang for elektronet mellom stasjonære tilstander.

Balmerserien antyder at energinivåene i H-atomet er

$$E_n = - \frac{hcR}{n^2} \approx - \frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

siden et foton har energi $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$.

- Elektronet går i klassiske sirkelbaner (19) rundt kjernen. [Stemmer ikke!]

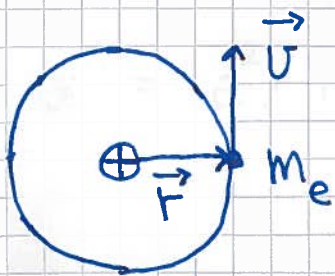
Newtons 2. lov, $F = m_e a$, med $a = v^2/r$

og $F = e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$ gir $v^2 = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e r$,

$K = \frac{1}{2} m_e v^2 = e^2/8\pi\epsilon_0 r$, og total energi

$$E = K + V = e^2/8\pi\epsilon_0 r - e^2/4\pi\epsilon_0 r = -e^2/8\pi\epsilon_0 r$$

- Elektronets dreieimpuls er kvantisert. [Stemmer!]



$$L = |\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = r m_e v$$

Bohrs forslag: $L = n\hbar$, med $n = 1, 2, 3, \dots$

og $\hbar = h/2\pi \approx 1.05 \cdot 10^{-34}$ Js ("h-strek")

[Stemmer ikke!]

Dermed:

$$L^2 = r^2 m_e^2 v^2 = r^2 m_e^2 e^2 / 4\pi\epsilon_0 m_e r = n^2 \hbar^2,$$

dvs sirkelbanene har radius

$$r_n = n^2 \cdot 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / m_e e^2 = n^2 \cdot a_0$$

der Bohr-radien er $a_0 = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / m_e e^2 \approx 0.529 \text{ \AA}$

Energiniivåene:

(20)

$$E_n = -e^2 / 8\pi\epsilon_0 r_n = - \frac{m_e e^4 / 32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}{n^2} \approx \frac{-13.6 \text{ eV}}{n^2}$$

i samsvar med Balmers (og Rydbergs) formel!

Vi ser at $|E_n| \ll m_e c^2$ = elektronets hvileenergi:

$$E_n = -\frac{1}{2} \alpha^2 m_e c^2 / n^2$$

$$\alpha = e^2 / 4\pi\epsilon_0 \hbar c \approx 1/137 \quad (\text{finstrukturkonstanten})$$



- Riktige energiniivåer for hydrogen.
- L er kvantisert, og proporsjonal med $\hbar$, men $L=0$ i grunntilstanden for hydrogen, ikke $\hbar$ som i Bohrs modell.
- Bohr-modellen fungerte dårlig på andre atomer.
- Ideen om elektronet som klassisk partikkel i baner rundt kjernen måtte forkastes.

Interferens med partikler

(21)

Louis de Broglie (1892-1987):

"Hvis lys er både bølger og partikler, bør massive partikler være både partikler og bølger!"

(1923/24 ; NP 1929)

For lys: $E = h\nu$ og $E = pc$

$$\Rightarrow p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Dermed, for massive partikler med impuls p og energi E :

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}, \quad \nu = \frac{E}{h}}$$

de Broglies
hypotese

For en ikke-relativistisk ideel gass av atomer eller molekyler har vi

$$K_{\text{trans}} = \frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2} k_B T$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}} = \text{partiklens termiske de Broglie bølgelengde}$$

Noen exp. som viser partiklers bølgeegenskaper :

Davisson & Germer 1927 : Diffraksjon av elektroner mot Ni-krystall.

[Davisson, G. P. Thomson NP 1937]

C. Jönsson. 1961 : Dobbeltspalteforsøk med elektroner.

Tonomura et al 1989 : Interferensmønster selv med ett og ett elektron mot dobbeltspalte.

Zeilinger et al 2003 : Interferens med ett og ett C_{60} -molekyl mot diffraksjonsgitter.

Arndt et al 2015 : Interferens med $C_{168}H_{94}F_{152}O_8N_4S_4$ - molekyler.

Schrödingerligningen [YF40]

(23)

Erwin Schrödinger (1925 ; NP1933 med Paul Dirac ; Werner Heisenberg fikk NP i 1932):

"Hva slags bølgeligning kan fungere for de Broglies partikkelbølger?"

Vi rekapitulerer fra mekanikk og elmag:
Bølgelign. som beskriver mekaniske og EM bølger er

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

evt, i 3D,

$$\nabla^2 y = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} ; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

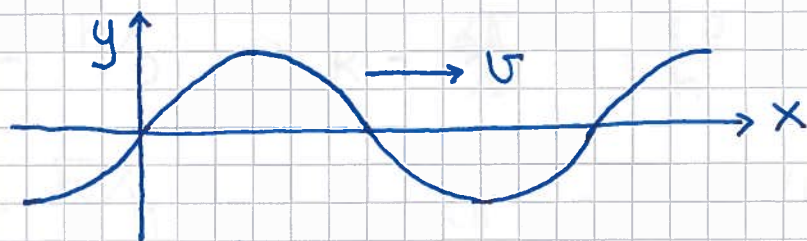
med løsninger på formen

$$y(x,t) = y(x \pm vt)$$

Her kan y være: utsving på en streng, avvik fra likevektstrykket i luft, elektrisk felt $\vec{E}$, magnetfelt $\vec{B}$ osv.

Eks: Harmonisk bølge

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$



$k = 2\pi/\lambda$ = bølgetallet ; λ = bølgelengden

$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ = vinkelfrekvensen ; T = perioden

$v = \lambda/T = \lambda\nu = \omega/k$ = fasehastigheten

$v_g = d\omega/dk$ = gruppehastigheten

Vi ser på enkleste mulige eksempel :

Fri partikkel med veldefinert fart i x -retning.

$$\vec{v} = v \hat{x}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = mv \hat{x} = \text{impuls}$$

$$E = K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \text{energi}$$

(der vi har valgt pot. energi $V=0$)

I følge de Broglie har partikkelen bølgeegenskaper:

$$\lambda = h/p \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h} = p/\hbar$$

$$\nu = E/h \Rightarrow \omega = 2\pi\nu = 2\pi E/h = E/\hbar$$

Så vi prøver å beskrive partikkelbølgen med bølgefunksjonen

$$\Phi(x, t) = \cos\left(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right) ; \text{ evt sinus.}$$

Kan vi finne en noenlunde enkel bølgeligning som har slike løsninger, og som samtidig er konsistent med at $E = p^2/2m$?

Derivasjon (husk kjerneregel!) 2 ganger mhp x og 1 gang mhp t "trekker ut" hhv faktorer prop. med p^2 og E og går nesten bra. Men:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi = -\left(\frac{p}{\hbar}\right)^2 \cos\left(\frac{px}{\hbar} - \frac{Et}{\hbar}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi = \left(\frac{E}{\hbar}\right) \sin\left(\frac{px}{\hbar} - \frac{Et}{\hbar}\right)$$

Forsøk på å kombinere disse til en ligning på formen

(26)

$$(p^2/2m - E) \cdot (\text{en funksjon av } x \text{ og } t) = 0$$

lykkes ikke. Men vi vet at derivasjon av exp-funksjonen gir samme funksjon tilbake. Kombinasjonen

$$e^{i(px - Et)/\hbar} = \cos\left(\frac{px}{\hbar} - \frac{Et}{\hbar}\right) + i \sin\left(\frac{px}{\hbar} - \frac{Et}{\hbar}\right)$$

bør derfor gå bedre.

Dette er Eulers formel, og vi kaller gjerne funksjonen $\exp[i(px - Et)/\hbar]$ for en plan bølge.

Her er $i = \sqrt{-1}$, slik at $i^2 = -1$.

Se notatet "Matematikk: Komplekse tall".

Vi prøver med bølgefunksjonen

$$\Psi(x, t) = e^{i(px - Et)/\hbar}$$

som gir

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \left(\frac{ip}{\hbar}\right)^2 e^{i(px - Et)/\hbar} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi$$

slik at

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) = \frac{p^2}{2m} \Psi(x, t)$$

Videre er

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \Psi$$

slik at

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = E \Psi(x, t)$$

Husk at vi her har antatt en fri partikkel og valgt $V=0$, slik at $E=K=p^2/2m$.

Da kan vi skrive $E\Psi = \frac{p^2}{2m} \Psi$, eller

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t)} \quad \begin{array}{l} \text{SL i} \\ \text{1D} \end{array}$$

som er selveste Schrödingerligningen, for en fri partikkel i én dimensjon (1D).

Merknader:

- SL er den enkøste diff. ligning som oppfylles av plane de Broglie-bølger for en ikke-relativistisk (dvs $v \ll c$, slik at $K = p^2/2m$) fri partikkel.
- SL viser seg å fungere i praksis, også for $V = \text{konstant} \neq 0$, og til og med for $V \neq \text{konstant}$, dvs $V(x)$, evt $V(\vec{r})$ i 3D.
- Vi må ha komplekse løsninger av SL.
 Reell Ψ gir reell "høyreside" $(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2})$
 og imaginær "venstreside" $(i\hbar \partial \Psi / \partial t)$,
 og det er ikke mulig.
- Målbare fysiske størrelser er reelle.
 Dermed kan bølgefunksjonen Ψ
ikke være en direkte målbare størrelse.

Tolkning av bølgefunksjonen:

(29)

Max Born (1926, NP 1954) foreslo en statistisk tolkning,

$dP = |\Psi(x,t)|^2 dx$ = sannsynligheten for å finne partikkelen (som beskrives av Ψ) mellom x og $x+dx$ dersom dens posisjon måles ved tidspunktet t

Da blir $|\Psi(x,t)|^2 = dP/dx$, dvs sannsynligheten pr lengdeenhet, eller sannsynlighetstettheten.

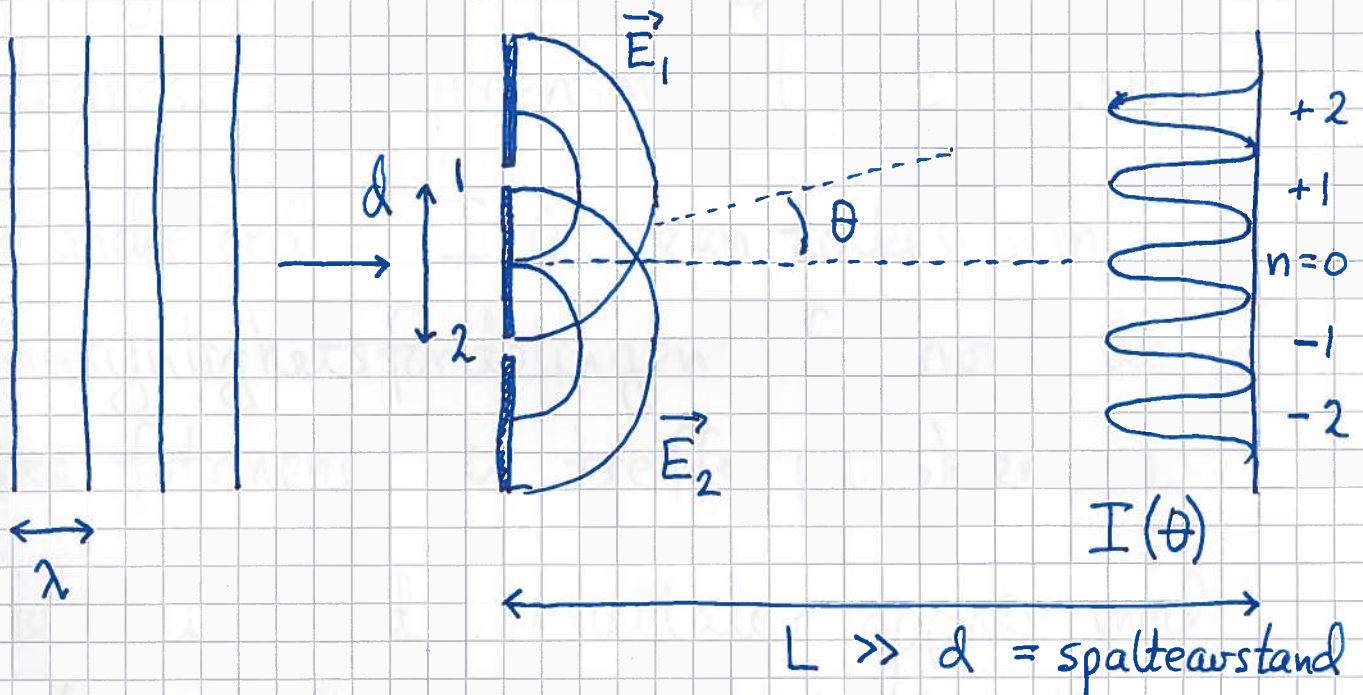
Normering av sannsynlighet:

Et eller annet sted må partikkelen være, til enhver tid, slik at $\int dP = 1$. Dvs

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$$

Begrunnelse for en slik tolkning av Ψ : (30)

Ser på plan EM-bølge inn mot vegg med to smale åpne spalter (T. Young 1801).



Total bølge som treffer skjermen: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

Intensitet på skjermen: $I \sim |\vec{E}|^2 = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2$

Veilengdeforskjell, til skjerm fra 1 og 2:

$$\Delta r = d \sin \theta$$

$\Rightarrow$ Konstruktiv interferens når $d \sin \theta = n\lambda$;

da er $\vec{E}_2 \approx (+1)\vec{E}_1$ og $I \sim 4E_1^2$

Destruktiv interferens når $d \sin \theta = (n + \frac{1}{2})\lambda$;

da er $\vec{E}_2 \approx -\vec{E}_1$ og $I \approx 0$

Men lys er også partikler (fotoner): (31)

Hvis ett og ett foton sendes mot dobbeltspalten, får vi tilsynelatende tilfeldige treffsteder på skjermen. Etter mange fotoner avtegnes interferensmønsteret $I(\theta)$.

Med andre ord: $I(\theta)$ kan tolkes som sannsynlighetsfordelingen for hvor de ulike fotonene vil treffe på skjermen.

Siden tilsvarende resultater oppnås med elektroner inn mot en dobbeltspalte

(jf. Tonomura et al, Am J. Phys 57, 117 (1989)), blir det naturlig å tolke $|\Psi(x,t)|^2$ som en sannsynlighetsfordeling for hvor en vil finne elektronet ved tidspunkt t .

Bølgepakker:

Planbølge med veldefinert ("skarp")

impuls p , $\Psi(x,t) = \exp[i(px - Et)/\hbar]$,
er ikke normerbar, fordi

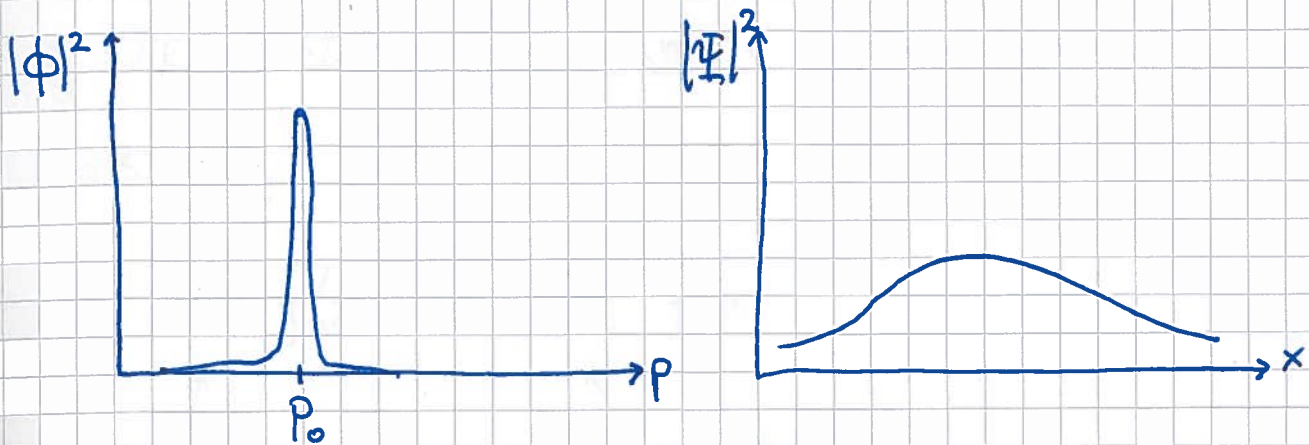
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot dx = \infty$$

Vi kan "lokalisere" partikkelen, og normere sannsynligheten, ved å beskrive partikkelen med en sum av planbølger med ulike impulser, dvs en bølgepakke:

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) e^{i(px - Et)/\hbar} dp$$

Her tolker vi $\phi(p)$ som andelen av $\Psi(x,t)$ som har impuls p , slik at $|\phi(p)|^2 dp$ blir sannsynligheten for at en måling av partikkelens impuls vil gi resultat mellom p og $p+dp$.

Dersom $|\phi(p)|^2$ er smal, vil $|\Psi(x,t)|^2$ (33)
være bred, og omvendt. F.eks slik:



Hvis Δp og Δx er hhv "uskarpheten"
i partikkelens impuls og posisjon,
skal vi senere se at vi alltid har

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$$

som er Heisenbergs uskarphetsrelasjon.

Operator. Egenfunksjon. Egenverdi

Hvis en operator virker på en funksjon $f(x)$, og resultatet blir samme $f(x)$ ganget med en konstant, dvs

$$\hat{A} f(x) = A f(x)$$

$\uparrow$ operator $\uparrow$ konstant

da er $f(x)$ en egenfunksjon til operatoren $\hat{A}$, med tilhørende egenverdi A .

Eks:

- $\frac{\partial}{\partial x} \cos(px/\hbar) = -(p/\hbar) \sin(px/\hbar)$
 $\Rightarrow \cos(px/\hbar)$ er ikke egenf. til oper. $\partial/\partial x$
- $\frac{\partial}{\partial x} \exp(ipx/\hbar) = (ip/\hbar) \exp(ipx/\hbar)$
 $\Rightarrow \exp(ipx/\hbar)$ er egenf. til $\partial/\partial x$,
 med egenv. $ip/\hbar$
- $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \exp(ipx/\hbar) = p \exp(ipx/\hbar)$
 $\Rightarrow \exp(ipx/\hbar)$ er egenf. til $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ med egenv. p

$\Rightarrow$ Vi kaller $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ en impulsoperator,

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

og vi kaller ligningen

$$\hat{p} \Psi = p \Psi$$

en egenverdiligning.

Og vi ser at $\exp(ipx/\hbar)$, og dermed også den plane bølge.

$$\Psi(x,t) = \exp(ipx/\hbar - iEt/\hbar)$$

er egenfunksjon til $\hat{p}$ med egenverdi p .

La oss ta for oss energien, først for en fri partikkel med $V=0$, slik at

$$E = K = p^2/2m$$

Det er da rimelig å kalle operatoren

$$\frac{1}{2m} \hat{p}^2 = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

en energioperator, mer presist en oper. for kin. energi.

I klassisk mekanikk kalles energien, eller funksjonen som beskriver energien, gjerne Hamiltonfunksjonen H .

I QM (kr.mek.) kaller vi derfor oper. for energi Hamiltonoperatoren $\hat{H}$.

For fri partikkel, med $V=0$: $\hat{H} = \hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

Fri part., med $V=V_0 \neq 0$:

$$E = K + V = p^2/2m + V_0$$

$$\hat{H} = \hat{K} + \hat{V} = \hat{K} + V \quad (\hat{V} = V)$$

$$= \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + V = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0$$

Hva med $V \neq \text{konst.}$? Dvs $F = -\frac{dV}{dx} \neq 0$?

Schrödinger satset på samme ligning, dvs

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi ; \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

som er SL i 1D, og som fungerer!

$$[3D: \hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i} \nabla ; V(x) \rightarrow V(\vec{r}) ; \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r})]$$

Stasjonære tilstander og tidsuavhengig (37)

Schrödingerligning (TUSL)

Ofte er potensialet $V(x)$ uavhengig av tiden t . Da har SL løsninger på formen

$$\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar}$$

Dette er et eksempel på en stasjonær tilstand, med sannsynlighetsfordeling som ikke avhenger av t :

$$|\Psi(x,t)|^2 = |\psi(x)|^2$$

fordi $|\exp(-iEt/\hbar)|^2 = 1$.

Bewis: SL, dvs $i\hbar \partial \Psi / \partial t = \hat{H} \Psi$,
har produktløsninger $\Psi(x,t) = \psi(x) \cdot T(t)$
når $\hat{H}$ er uavhengig av t . Innsetting og
divisjon med Ψ gir

$$\cancel{i\hbar \partial \Psi / \partial t} \quad i\hbar \frac{\partial T / \partial t}{T} = \frac{\hat{H} \psi}{\psi}.$$

Her er v. side kun avh. av t og h. side kun av x .

Da må begge sider av lign. være lik en og samme konstant, som vi kan kalle E . Løser for T :

$$\frac{dT}{T} = \frac{E dt}{i\hbar} \Rightarrow T(t) = \text{konst.} \cdot e^{-iEt/\hbar}$$

Lign. for $\Psi(x)$:

$$\boxed{\hat{H}\Psi(x) = E\Psi(x)} \quad \text{TUSL i 1D}$$

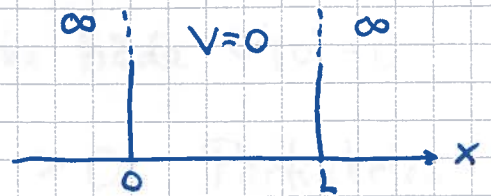
med $\hat{H} = \hat{K} + V = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$. Siden $\hat{H}$ er operator for total energi, er det naturlig å tolke egenverdiene E som systemets mulige energier og $\Psi(x)$ som systemets mulige tilstander.

Men husk at $\Psi(x,t) = \Psi(x) e^{-iEt/\hbar}$ er den fulle løsningen av SL. Dette er stasjonære tilstander, fordi $|\Psi(x,t)|^2 = |\Psi(x)|^2$ er uavh. av t .

Partikkel i boks (1D)

En partikkel, masse m , i potensialet

$$V(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 < x < L \\ \infty & ; \text{ellers} \end{cases}$$



En klassisk partikkel i dette potensialet har $E = K = \frac{1}{2}mv^2$, og alle $E \geq 0$ er mulige. Partikkelen seiler fram og tilbake med farten $v = \sqrt{2E/m}$.

Kvantemekanisk må vi løse SL, som har løsninger

$$\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar}$$

der $\psi(x)$ og E er hhv. egenf. og egenv. til

$$\hat{H} = \hat{K} + V = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x), \text{ dvs}$$

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$$

Utenfor boksen: $V = \infty$, og vi må ha $\psi = 0$; her kan ikke partikkelen befinne seg.

Inni boksen: $V = 0$. Vi må kunne anta at

$E \geq 0$, og at $\psi(x)$ er kontinuerlig, slik at $|\psi|^2$ blir kontinuerlig.

Da er $\Psi(0) = \Psi(L) = 0$.

(40)

Da er $E=0$ ikke mulig: I såfall er $\Psi''(x) = 0$,
dvs $\Psi(x) = Ax + B$, men da er ikke både $\Psi(0) = 0$
og $\Psi(L) = 0$ mulig! Dvs: $E > 0$. Partikkelen
kan ikke ligge i ro!

Generell løsning av TUSL der $V=0$:

$$\Psi'' + k^2 \Psi = 0 \quad ; \quad k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \Psi(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

$$\Psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow \Psi(x) = A \sin kx$$

$$\Psi(L) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow k_n \cdot L = n \cdot \pi \quad ; \quad n=1,2,3,\dots$$

Vi har fått kvantisering av energien:

$$E_n = \hbar^2 k_n^2 / 2m = n^2 \cdot \hbar^2 \pi^2 / 2mL^2 \quad ; \quad n=1,2,3,\dots$$

Tilhørende egenf: $\Psi_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{L}$

Fastlegger A_n med normeringskravet:

$$\int_0^L |\Psi_n(x)|^2 dx = 1 \quad (\text{for hver } n)$$

Skriver om kvadratet av sinus:

$$\sin^2 \alpha = \left\{ \frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) \right\}^2 = -\frac{1}{4} \{ e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha} - 2 \}$$

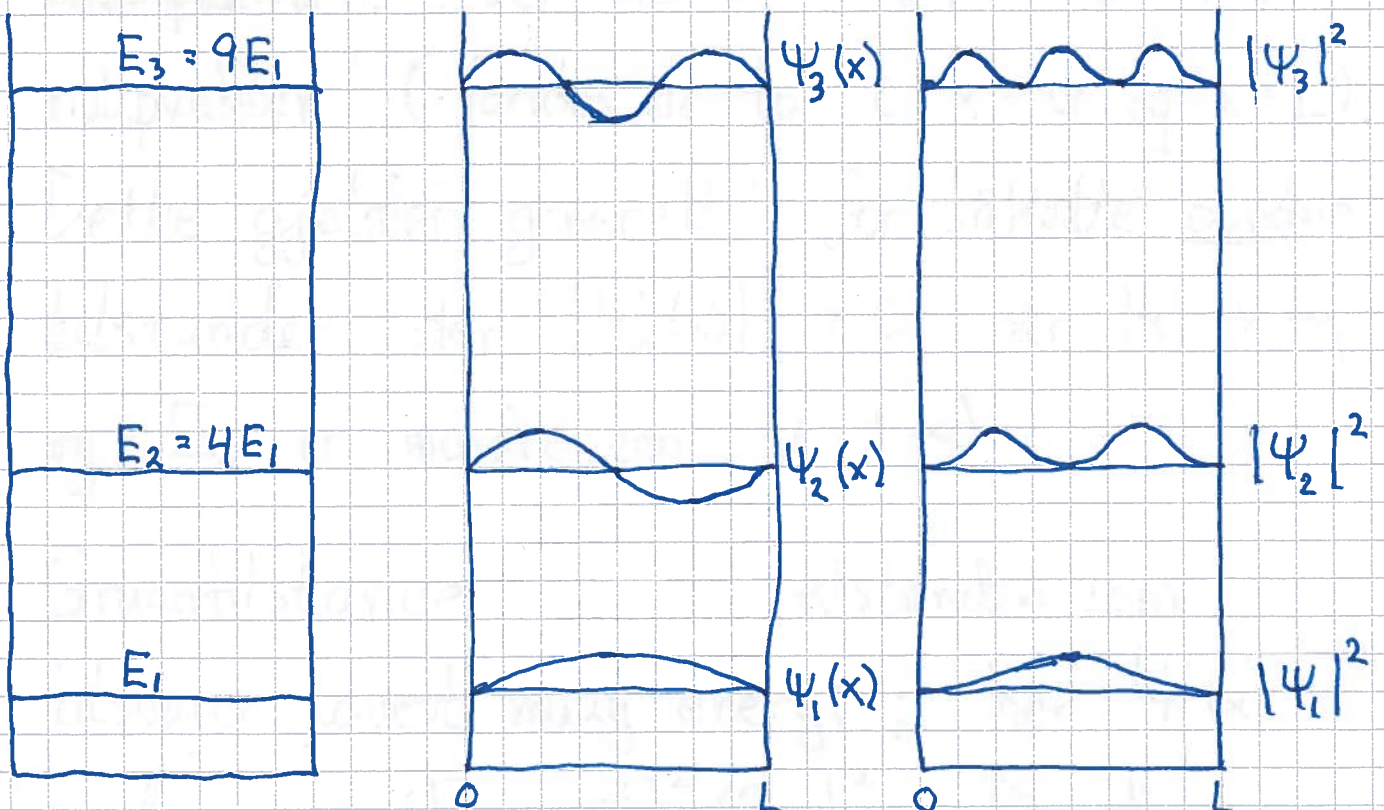
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha$$

Dermed:

$$|A_n|^2 \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{L} \right) dx = 1$$

$$\Rightarrow |A_n|^2 \cdot \frac{L}{2} = 1 \Rightarrow A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\Rightarrow \text{Normerte egenfunksjoner: } \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$



En klassisk analogi: Stående bølger på streng.

Merknader:

(42)

- Symmetri. Her er $V(x)$ symmetrisk om $x = L/2$.
Da må også $|\Psi_n(x)|^2$ være symm. om $x = L/2$.
Da må $\Psi_n(x)$ være symm. eller antisymm. om $x = L/2$. Vi ser at dette stemmer her: $\Psi_n(x)$ er symm. for $n = 1, 3, 5, \dots$ og antisymm. for $n = 2, 4, 6, \dots$
- Nullpunkter. Ser her at $\Psi_n(x)$ har $n-1$ nullpunkter (foruten de to i $x=0$ og $x=L$). Dette gjelder generelt, for såkalte bundne tilstander, der $|\Psi_n(x)| \rightarrow 0$ når $|x| \rightarrow \infty$, og E_n er mindre enn $V(\pm\infty)$.
- Grunntilstanden er den tilstanden som tilsvarer lavest mulig energi; her $\Psi_1(x)$ med energi $E_1 = \pi^2 \hbar^2 / 2mL^2$. Deretter er $\Psi_2(x)$ 1. eksiterte tilstand, osv.

- Grensebetingelser.

$\Psi(x)$ må være kontinuerlig overalt. Hvis ikke, blir sannsynlighetstettheten $|\Psi(x)|^2$ ikke entydig i alle posisjoner x ; det ville være fysisk urimelig.

Omskriving av TUSL gir

$$\Psi''/\Psi = \frac{2m}{\hbar^2} (V-E),$$

som viser at $\Psi'(x)$ også er kontinuerlig overalt, bortsett fra der $V(x)$ gjør et uendelig stort sprang. Der blir $\Psi'(x)$ diskontinuerlig, dvs $\Psi(x)$ har et "knekkpunkt". (I vårt eksempel skjer dette i $x=0$ og $x=L$.)

- Bølgefunksjonens krumningsegenskaper.

(44)

Vi har $\Psi''/\Psi = \frac{2m}{\hbar^2} (V-E)$.

Der $E > V$ er dermed $\Psi''/\Psi < 0$, og Ψ krummer mot x -aksen. Omvendt, der $E < V$ blir $\Psi''/\Psi > 0$, og Ψ krummer bort fra x -aksen.

I klassisk fysikk kan en partikkel bare være der $E \geq V$ (dvs $K \geq 0$). Vi kaller dette et klassisk tillatt område.

Med kvantemekanikk skal vi se at partikler også kan være i områder der $E < V$ (så lenge V er endelig, dvs $|V| < \infty$). Vi kaller dette et klassisk forbudt område.

[Hvis $V = \infty$, er $\Psi = 0$, så slike områder er forbudt, både klassisk og kvantemekanisk!]

- Ortogonalitet.

Vanlige vektorer er ortogonale hvis skalarproduktet er null: $\vec{V}_i \cdot \vec{V}_j = 0 \Leftrightarrow \vec{V}_i \perp \vec{V}_j$.

Hvis lengden (absoluttverdien) av $\vec{V}_i$ dessuten er lik 1, kan vi si at vektorene også er normerte.

Eller, for enkelhets skyld, ortonormerte dersom de er både ortogonale og normerte.

Dette kan uttrykkes svært "kompakt" med en Kronecker-delta,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i=j \\ 0 & \text{hvis } i \neq j \end{cases}$$

Dvs: Vektorsettet $\{\vec{V}_i\}$ ($i=1,2,3,\dots$) er ortonormert dersom $\vec{V}_i \cdot \vec{V}_j = \delta_{ij}$

På lignende vis sier vi at funksjonssettet $\{\psi_n(x)\}$; $n=1,2,3,\dots$ er ortonormert dersom

$$\langle \psi_n, \psi_k \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \psi_k(x) dx = \delta_{nk}$$

Ulike egenfunksjoner til $\hat{H}$ (med ulike tilhørende egenverdier E_n) vil generelt være ortogonale. La oss vise dette i vårt eksempel, ved å regne ut integralet

$$\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cdot \sin \frac{j\pi x}{L} dx \quad (\text{med } n \neq j)$$

Vi slår opp i f.eks. Rothmann, eller bruker Eulers formel til å skrive om integranden:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cdot \sin \beta &= \frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) \cdot \frac{1}{2i} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) \\ &= -\frac{1}{4} (e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)} - e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)}) \\ &= \frac{1}{2} \cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

$$\left[\text{der vi brukte at } \sin \alpha = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}), \right. \\ \left. \cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}), \text{ samt } i^2 = -1 \right]$$

Integralet ovenfor blir dermed

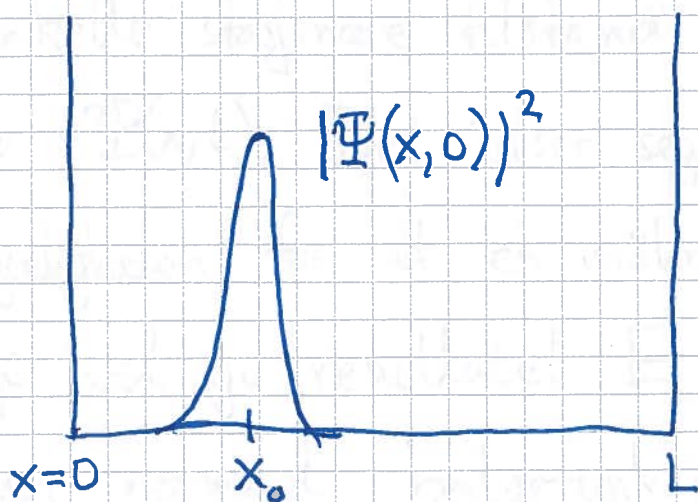
$$\frac{1}{2} \int_0^L \left(\cos \frac{(n-j)\pi x}{L} - \cos \frac{(n+j)\pi x}{L} \right) dx = 0$$

fordi vi får $\sin \frac{(n \pm j)\pi x}{L}$, som innsatt $x=L$ og $x=0$ i begge tilfelle gir 0.

Ikke-stasjonære løsninger av SL

(47)

Anta at vi i vår endimensjonale "boks", med $V=0$ på $0 < x < L$ og $V=\infty$ ellers, kunne foreta en serie med praktisk talt identiske forsøk, der vi lar en partikkel med masse m ved tid $t=0$ starte i posisjon x_0 med hastighet v_0 , dvs med impuls $p_0 = mv_0$. Hvordan skulle vi beskrive dette, med kvantemekanikk? Heisenbergs uskarphetsprinsipp, $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$, forbyr oss å kjenne både x_0 og p_0 presist ved et gitt tidspunkt. Men vi kan tillate en viss usikkerhet Δx og Δp i vår kjennskap til partikkelenes posisjon og impuls ved $t=0$. En "rimelig" sannsynlighetsfordeling $|\Psi(x,0)|^2$ ved $t=0$ kunne da se omtrent slik ut:



Vi ser uten videre at $\Psi(x,0)$ ikke er en (48)
av de stasjonære tilstandene $\psi_n(x)$ som vi har funnet.
Samtidig vet vi at en partikkel som befinner seg i
denne boksen, ikke kan ha andre energier enn de
egenverdiene E_n som vi har funnet.

Men da er det vel rimelig å anta at $\Psi(x,0)$ må
kunne skrives som en sum (lineærkombinasjon) av
stasjonære løsninger, dvs

$$\Psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x),$$

slik at partikkelen for senere tider, $t > 0$,
beskrives av bølgefunksjonen

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}.$$

Koeffisientene c_n må da uttrykke i hvor stor grad
den enkelte stasjonære tilstand bidrar til den
totale $\Psi(x,t)$. Det viser seg at $|c_n|^2$ gir
sannsynligheten for at en måling av partikkelens
energi vil gi resultatet E_n , dersom $\Psi(x,t)$
er en normert bølgefunksjon.

Det må selvsagt bety at

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 1,$$

for en eller annen energiverdi må jo en måling av partikkelenes energi gi!

Hvis vi kjenner starttilstanden $\Psi(x, 0)$, er det "enkelt" å beregne koeffisientene c_n :

Vi ganger ligningen $\Psi(x, 0) = \sum_n c_n \Psi_n(x)$ med $\Psi_j^*(x)$ på begge sider og integrerer på begge sider over x fra $-\infty$ til $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j^*(x) \Psi(x, 0) dx = \sum_n c_n \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j^*(x) \Psi_n(x) dx$$

Verdien av integralet på høyre side er δ_{jn} (se s. 45), slik at høyre side blir

$$\sum_n c_n \delta_{jn} = c_j$$

Med andre ord:

$$c_j = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j^*(x) \Psi(x, 0) dx \quad ; \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

La oss sjekke påstanden om at $\sum_n |c_n|^2 = 1$. (50)

Med normert $\Psi(x,t)$ og et ortonormert funksjonssett $\{\psi_n\}$ har vi:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t) \Psi(x,t) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ c_1^* \psi_1^*(x) e^{+iE_1 t/\hbar} + \dots \right\} \cdot \left\{ c_1 \psi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} + \dots \right\} dx \\ &= |c_1|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_1(x)|^2 dx + |c_2|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_2(x)|^2 dx + \dots \\ &\quad + c_1^* c_2 e^{i(E_1 - E_2)t/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x) \psi_2(x) dx + \dots \\ &= |c_1|^2 \cdot 1 + |c_2|^2 \cdot 1 + \dots + c_1^* c_2 e^{i(E_1 - E_2)t/\hbar} \cdot 0 + \dots \\ &= |c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots = \sum_n |c_n|^2 \quad ; \quad \text{OK!} \end{aligned}$$

Ofte vil det være vanskelig/umulig å regne ut

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \Psi(x,0) dx$$

analytisk ("eksakt"), men det er ikke vanskelig å

tenke seg eksempler på $\Psi(x,0)$ som gjør det relativt

enkelt. Et konkret eksempel: $\Psi(x,0) = \sqrt{2/L}$

for $L/4 < x < 3L/4$ og $\Psi(x,0) = 0$ ellers. Da er

$$\text{f.eks. } c_1 = \sqrt{2/L} \cdot \sqrt{2/L} \int_{L/4}^{3L/4} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot 1 \cdot dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}, \quad \text{og}$$

$c_2 = c_4 = c_6 = \dots = 0$ (pga symmetri).

Men la oss her se på et eksempel der vi kjenner 51
 c_1 og c_2 , mens $c_3 = c_4 = \dots = 0$. Hvordan
vil da $\Psi(x,t)$ og $|\Psi(x,t)|^2$ oppføre seg?

Løsning:

$$\begin{aligned} |\Psi(x,t)|^2 &= |c_1 \Psi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 \Psi_2(x) e^{-iE_2 t/\hbar}|^2 \\ &= \{c_1^* \Psi_1^* e^{iE_1 t/\hbar} + c_2^* \Psi_2^* e^{iE_2 t/\hbar}\} \cdot \\ &\quad \{c_1 \Psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 \Psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar}\} \\ &= |c_1|^2 \cdot |\Psi_1|^2 + |c_2|^2 \cdot |\Psi_2|^2 + \\ &\quad c_1^* c_2 \Psi_1^* \Psi_2 e^{i(E_1 - E_2)t/\hbar} + \\ &\quad c_1 c_2^* \Psi_1 \Psi_2^* e^{-i(E_1 - E_2)t/\hbar} \end{aligned}$$

Her er de to siste leddene kompleks konjugert av hverandre,
og generelt er $z + z^* = 2 \cdot \text{Re } z$. Her er Ψ_1 og Ψ_2
reelle funksjoner, og vi kan velge reelle c_1 og c_2 ,
slik at de to siste leddene blir

$$\begin{aligned} &c_1 c_2 \Psi_1 \Psi_2 \left\{ e^{i(E_2 - E_1)t/\hbar} + e^{-i(E_2 - E_1)t/\hbar} \right\} \\ &= 2 c_1 c_2 \Psi_1 \Psi_2 \cos \frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar} \end{aligned}$$

La oss nå være helt konkrete og velge $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
(slik at $|c_1|^2 + |c_2|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$). Da har vi

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{L} \sin^2 \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{L} \sin^2 \frac{2\pi x}{L} \quad (52)$$

$$+ \frac{2}{L} \cdot \sin \frac{\pi x}{L} \cdot \sin \frac{2\pi x}{L} \cdot \cos \frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}$$

dvs en sannsynlighetstetthet som oscillerer med vinkelfrekvens $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar = 3E_1/\hbar$, dvs med periode $T = 2\pi/\omega = 2\pi\hbar/3E_1$, som med $E_1 = \pi^2 \hbar^2 / 2mL^2$ blir $T = 4mL^2 / 3\pi\hbar$.

Har vi riktig enhet? $[mL^2/\hbar] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{Js}$, som med $\text{J} = \text{Nm} = (\text{kg m/s}^2) \cdot \text{m} = \text{kg m}^2/\text{s}^2$ blir nettopp s.

Hva slags "tidsskala" snakker vi om? F.eks. for et elektron i en boks med lengde $L = 10 \text{ nm}$?

Da blir

$$T = \frac{4 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot (10^{-8})^2}{3 \cdot \pi \cdot 1.05 \cdot 10^{-34}} \text{ s} = \frac{36.44}{3.15 \pi} \cdot 10^{-13} \text{ s}$$

$$\approx 3.6 \cdot 10^{-13} \text{ s} = \underline{0.36 \text{ ps}} \quad (\text{p} = \text{piko} = 10^{-12})$$