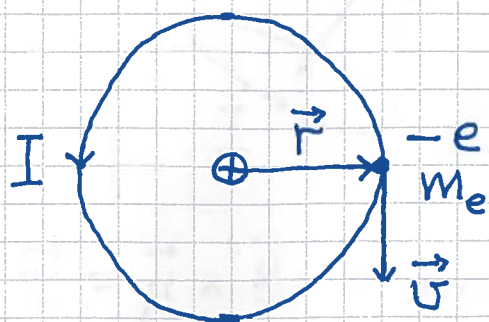


Elektroner i magnetfelt: spinn

$$\text{Strøm: } I = \frac{q}{T} = \frac{e}{\frac{2\pi r}{v}} = \frac{ev}{2\pi r}$$

$$\text{Dreieimpuls: } L = r m_e v$$

Magnetisk dipolmoment:

$$\mu = IA = \frac{ev}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} evr$$

$$\Rightarrow \vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$$

$$\text{Gyromagnetisk forhold: } \mu/L = e/2m_e$$

$$\text{Bohr: } L = n\hbar; \quad n=1, 2, 3, \dots$$

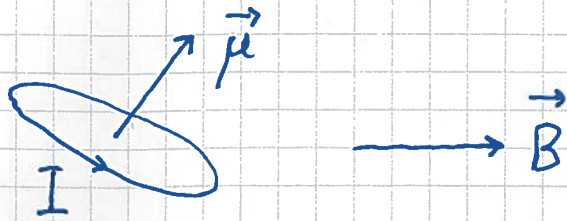
$$\Rightarrow \mu = n \cdot \frac{e\hbar}{2m_e} = n \cdot \mu_B$$

$$\text{med } \mu_B = e\hbar/2m_e = 1 \text{ Bohr-magneton} \\ \approx 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^2$$

$$\text{Schrödinger: } L = \sqrt{l(l+1)} \hbar; \quad l=0, 1, \dots, n-1$$

$$L_z = m_l \hbar; \quad m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l$$

Magnetisk dipol i magnetfelt $\vec{B}$: (FY6017) (74)



$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \text{dreiemoment på dipolen}$$

$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \text{dipolens potensielle energi}$$

$$\Rightarrow \text{lavest energi med } \vec{\mu} \parallel \vec{B}$$

$$\vec{F} = -\nabla V = \nabla (\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = \text{kraft på dipolen}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = 0 \text{ i uniformt } \vec{B}\text{-felt}$$

Zeeman - effekten (P. Zeeman 1897; NP 1902):

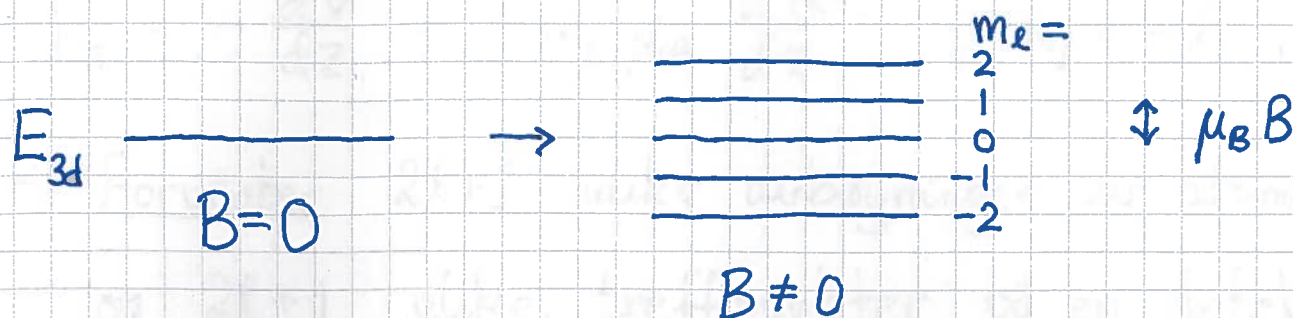
Hvis H-atomer med $\vec{\mu} = (-e/2m_e) \vec{L}$ plasseres i magnetfelt $\vec{B} = B \hat{z}$, har de et bidrag til pot. energi,

$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{e}{2m_e} L_z B = m_l \cdot \frac{eh}{2m_e} \cdot B = m_l \mu_B B$$

der $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$. Gir oppsplitting av energinivåer med $l > 0$, i $2l+1$ nivåer.

Eks: $3d$; $l=2$; $m_l = 0, \pm 1, \pm 2$

(75)



Liten (men målbar) effekt:

Med $B = 1 \text{ T}$ (et ganske sterkt magnetfelt) er

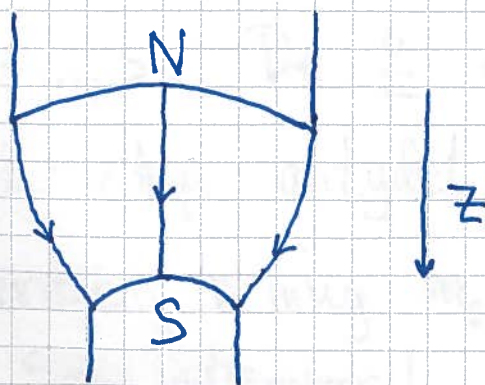
$$\Delta E = \mu_B B = 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ J} \approx 6 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$$

Til sammenligning er f.eks.

$$E_{3d} - E_{2p} = 13.6 \text{ eV} \cdot \left(-\frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} \right) \approx 2 \text{ eV}$$

Stern - Gerlach - eksperimentet
(1922; O. Stern NP 1943):

Sendte (sølv-)atomer gjennom område med
inhomogent magnetfelt $\vec{B}(z)$:



Kraft på atomene:

$$F_z = - \frac{dV}{dz} = - m_\ell \mu_B \frac{dB_z}{dz} \quad ; \quad m_\ell = -l, \dots, 0, \dots, l$$

⇒ Forventer $2l+1$ ulike avbøyninger av atomene og $2l+1$ ulike treffpunkter på en detektor plassert bak magneten.

Ekspenimentene gav 2 treffpunkter (striper)!

Goudsmit og Uhlenbeck foreslo (i 1925) at elektronet har en indre dreieimpuls - et spinn - $\vec{S}$, med et tilhørende magnetisk dipolmoment $\vec{\mu}_s$. I analogi til en kvantisert (bane-)dreieimpuls med $L = |\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)} \hbar$ og $L_z = m_\ell \hbar$, med $m_\ell = -l, \dots, 0, \dots, +l$, foreslo de at spinnet også er kvantisert, med

$$S = |\vec{S}| = \sqrt{s(s+1)} \hbar \quad \text{og} \quad S_z = m_s \hbar$$

med $m_s = -s, \dots, s$. De 2 avbøyningene i Stern-Gerlach-eksp. antydte at m_s bare har 2 mulige verdier, nemlig $m_s = -1/2$ og $m_s = 1/2$, ders $s = 1/2$. Som stemmer!

Kommentarer :

- "Klassisk" forventer vi nå at $\vec{\mu}_s = -\frac{e}{2m_e} \vec{S}$
(siden $\vec{\mu}_L = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$)
- Eksperimenter gir $\vec{\mu}_s \approx -\frac{e}{m_e} \vec{S}$; meget gode
exp. gir gyromagnetisk faktor

$$g_s = 2.002319304374 \pm 8 \cdot 10^{-12}$$

når vi skriver

$$\vec{\mu}_s = g_s \cdot \left(\frac{-e}{2m_e}\right) \vec{S}$$

- Relativistisk QM (dvs Dirac-ligningen)
gir $g_s = 2$.

- Kvanteelektrodynamikk (QED) gir

$$g_s = 2.00231930$$

- Også protonet og nøytronet er "spinn- $\frac{1}{2}$ -partikler",
med $s = \frac{1}{2}$ og $m_s = \pm \frac{1}{2}$. Gyromagnetisk faktor
er hhv $g_p = 5.59$ og $g_n = -3.83$, dvs

$$\vec{\mu}_p = 5.59 \cdot \frac{e}{2m_p} \vec{S}_p ; \quad \vec{\mu}_n = -3.83 \cdot \frac{e}{2m_n} \vec{S}_n$$

- Total dreieimpuls for elektron i tilstand med dreieimpulskvantetall l :

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

med kvantisert $J = |\vec{J}| = \sqrt{j(j+1)} \hbar$

og $J_z = m_j \hbar$; $m_j = -j, -j+1, \dots, j-1, j$

Her kan $\vec{S}$ peke i (mer eller mindre) samme retning som $\vec{L}$ eller (mer eller mindre) motsatt retning av $\vec{L}$, slik at $j = l + 1/2$ eller $j = l - 1/2$. (Bare $j = 1/2$ dersom $l=0$.)

Eks: H-atom med elektronet i en tilstand med $l=1$. Da er $j = 1/2$ eller $j = 3/2$.

Hvis derimot atomet er i grunntilstanden, dvs

ψ_{100} , er $l=0$. Da er $j = 1/2$ og $\vec{J} = \vec{S}$

og $J_z = S_z$, dvs $m_j = m_s = \pm j = \pm s = \pm 1/2$,

som vi typisk betegner hhv "spinn opp" ($m_s = 1/2$)

og "spinn ned" ($m_s = -1/2$).

Pauliprinsippet

Elektroner (og andre typer elementærpartikler) er identiske : Ombytte av to elektroner har ingen målbar konsekvens. Dermed :

$$|\Psi(1,2)|^2 = |\Psi(2,1)|^2$$

der 1 og 2 representerer koordinatene til elektron nr 1 og 2, $1 \hat{=} (\vec{r}_1, s_1)$ og $2 \hat{=} (\vec{r}_2, s_2)$.

To muligheter :

Bosoner : Symmetrisk Ψ ved ombytte $1 \leftrightarrow 2$

$$\Psi(1,2) = \Psi(2,1)$$

Eks: Fotonet

Fermioner : Antisymmetrisk Ψ ved ombytte $1 \leftrightarrow 2$

$$\Psi(1,2) = -\Psi(2,1)$$

Eks: Elektronet, protonet, nøytronet

Et system med to elektroner kan da beskrives med bølgefunksjonen

$$\Psi_A(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \Phi_i(1) \Phi_j(2) - \Phi_i(2) \Phi_j(1) \}$$

der Φ_i og Φ_j er to vilkårlige enpartikkeltilstander.

Da ser vi at dersom de to elektronene er i samme enpartikkeltilstand, dvs $\phi_i = \phi_j$, så blir $\Psi_A(1,2) = 0$!!

Konklusjon:

I et system med to (eller flere) elektroner må alle elektronene befinne seg i ulike enpartikkeltilstander.

Dette er Paulis eksklusjonsprinsipp.

Vi må huske at hver enpartikkeltilstand ϕ_j avhenger av både romlige koordinater $\vec{r}$ og spinnkoordinaten s , dvs

$$\phi_j(\vec{r}, s) = \psi(\vec{r}) \cdot \chi_{m_s}(s)$$

med romlig orbital $\psi(\vec{r})$ og spinnfunksjon $\chi_{m_s}(s)$.

For elektroner er $s = 1/2$ og $m_s = \pm 1/2$.

Det innebærer at hver romlige orbital $\psi(\vec{r})$ kan kombineres med $\chi_{1/2}$ og $\chi_{-1/2}$, og dermed okkuperes av inntil 2 elektroner.