

LØSNINGSFORSLAG TIL OPPGAVENE 1 – 7 I NOTAT 1

Oppgave 1: Vi substituerer $x = h\nu/k_B T$, som anbefalt i oppgaven. Da er $\nu^3 d\nu = (k_B T/h)^4 x^3 dx$, slik at

$$j(T) = \frac{2\pi h}{c^2} \cdot \left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} T^4.$$

Innsetting av tallverdier fra tabellen på side 27 gir $j(T) = \sigma T^4$ med $\sigma \simeq 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}^4)$ – Stefan-Boltzmanns konstant.

Oppgave 2: Oppgaven løses essensielt på samme måte som den forrige. Fra Notat 1 har vi at $u(\nu, T) = (4/c)I(\nu, T)$, slik at $n(\nu, T) = u(\nu, T)/h\nu = (8\pi/c^3) \cdot \nu^2/(\exp(h\nu/k_B T) - 1)$. Samme substitusjon som over gir $\nu^2 d\nu = (k_B T/h)^3 x^2 dx$, og dermed

$$n(T) = \frac{8\pi}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^3 \cdot 2.4041.$$

Innsetting av tallverdier fra tabellen på side 27 gir $n(T) = 2.029 \cdot 10^7 T^3$, der enheter er slik at innsetting av temperaturen T i K (kelvin) gir antall fotoner pr m^3 .

Nå har vi uttrykk for $I(T)$ og $n(T)$. Midlere fotonenergi er da

$$\bar{E} = u(T)/n(T) = 4I(T)/cn(T) = \pi^4 k_B T/15 \cdot 2.4041 \simeq 2.701 k_B T.$$

(Siden $k_B T$ er en energistørrelse – ”typisk termisk energi pr partikkel ved temperaturen T – må tallfaktoren foran $k_B T$ være dimensjonsløs. Og det ble den; alle fysiske konstanter kansellerte!)

Oppgave 3: Et foton med frekvens ν har energi $E_\gamma = h\nu$. Fotonets hastighet, dvs lyshastigheten, er $c = \lambda\nu$, slik at $E_\gamma = hc/\lambda$. Telleren, hc , har dimensjon som energi ganget med lengde, og dermed enhet f.eks eVm. Med $h = 4.136 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}$ og $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ blir $hc = 1.24 \cdot 10^{-6} \text{ eVm}$, og $E_\gamma = 1.24 \cdot 10^{-6} \text{ eVm}/\lambda$.

Synlig lys består av fotoner med bølgelengde mellom 0.4 og 0.7 μm (mikrometer, dvs 10^{-6} m), og dermed energi mellom $1.24 \cdot 10^{-6} \text{ eVm}/0.7 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1.77 \text{ eV}$ og $1.24 \cdot 10^{-6} \text{ eVm}/0.4 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 3.1 \text{ eV}$. Fotoelektrisk effekt er bare mulig dersom et enkelt foton har energi som er minst like stor som stoffets frigjøringsarbeid W . Dette er tilfelle med synlig lys for Cs (cesium) men ikke for Au (gull).

Oppgave 4: Ca 2.5 W ($= 2.5 \text{ J/s}$) sendes ut som fotoner i det synlige området. For enkelhets skyld antar vi at alle fotonene i det synlige området har bølgelengde 0.55 μm , dvs $5.5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Hvert av disse fotonene har da energi $E = hc/\lambda \simeq 6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 / 5.5 \cdot 10^{-7} \text{ J} \simeq 3.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Antall slike fotoner utsendt pr sekund blir dermed $2.5/3.6 \cdot 10^{-19} \simeq 6.9 \cdot 10^{18}$.

La oss anta at disse sendes ut i alle mulige retninger, jevnt fordelt. Vi må dermed regne ut radien r til en kuleflate, slik at bare 5 fotoner pr sekund passerer en liten bit av kuleflaten, med areal 0.5 cm^2 . Hele kuleflaten har areal $4\pi r^2$. Da må forholdet $5/6.9 \cdot 10^{18}$ være lik forholdet $0.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/4\pi r^2$. Dermed:

$$r = \sqrt{\frac{0.5 \cdot 10^{-4} \cdot 6.9 \cdot 10^{18}}{5 \cdot 4\pi}} \simeq 2.3 \cdot 10^6 \text{ m},$$

dvs ca 2300 km.

Oppgave 5: Siste del av oppgave 3 side 20 i Hemmer: Fra figuren ser vi at frekvensspekteret til den kosmiske bakgrunnsstrålingen har et maksimum for $\nu/c \simeq 5.5 \text{ cm}^{-1} = 550 \text{ m}^{-1}$, og dette forholdet skal samtidig være lik $2.82k_B T/hc$. Med andre ord, den kosmiske bakgrunnsstrålingen tilsvarer en temperatur

$$T \simeq 550 \cdot 6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 / 2.82 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \simeq 2.8 \text{ K}.$$

Oppgave 6: Compton-relasjonen (T1.6),

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta),$$

gir bølgelengden λ' for et foton som i utgangspunktet har bølgelengde λ , og som kolliderer med (spres på) en (fri) partikkel med masse m og endrer sin bevegelsesretning med vinkelen θ (se Notat 1 side 6). Relasjonen gjelder like godt for et proton som for et elektron. Protonets Compton-bølgelengde er dermed

$$\lambda_C = \frac{h}{m_p c} \simeq 1.3 \cdot 10^{-15} \text{ m},$$

mer enn 1800 ganger mindre enn elektronets Compton-bølgelengde $h/m_e c$.

Oppgave 7:

a. En partikkel med impuls p har de Broglie-bølgelengden $\lambda = h/p$. Et elektron med kinetisk energi $K (= E_{\text{kin}}) = 200 \text{ eV}$ kan beskrives med ikke-relativistisk mekanikk, siden K er mye mindre enn hvileenergien $m_e c^2 \simeq 0.5 \text{ MeV}$. Dermed er $K = m_e v^2/2 = p^2/2m_e$, slik at $p = \sqrt{2m_e K}$, og

$$\lambda = h/\sqrt{2m_e K} = 6.626 \cdot 10^{-34} / \sqrt{2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 200 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}} = 8.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}.$$

På atomært nivå brukes ofte lengdeenheten Ångström: $1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$. Disse elektronene har dermed en de Broglie-bølgelengde på ca 0.9 Å.

b. Fra forrige punkt har vi at λ er proporsjonal med $1/\sqrt{K}$. En økning av K med en faktor 100 (fra 200 til 20000 eV) må dermed innebære en reduksjon av λ med en faktor $\sqrt{100} = 10$, dvs $\lambda \simeq 0.09 \text{ Å}$.

c. Forholdet mellom relativistisk impuls p_R og ikke-relativistisk impuls p_{IR} er

$$\begin{aligned} \frac{p_R}{p_{IR}} &= \sqrt{\frac{E^2/c^2 - m_e^2 c^2}{2m_e K}} \\ &= \sqrt{\frac{(K + m_e c^2)^2/c^2 - m_e^2 c^2}{2m_e K}} \\ &= \sqrt{\frac{K^2/c^2 + 2m_e K}{2m_e K}} \\ &= \sqrt{1 + K/2m_e c^2} \end{aligned}$$

Her er $K = 20 \text{ keV}$ mens $2m_e c^2 \simeq 1 \text{ MeV}$, dvs $K/2m_e c^2 \simeq 0.02 \ll 1$, og vi kan med god tilnærming sette

$$p_R/p_{IR} = \sqrt{1 + K/2m_e c^2} \simeq 1 + K/4m_e c^2 \simeq 1.01.$$

Med andre ord, den ikke-relativistiske beregningen i **b** tar i bruk en impuls som er ca 1% for liten, noe som gir en de Broglie-bølgelengde som er ca 1% for stor (siden $\lambda = h/p$).